Programme de colle 7
Semaine du lundi 30/11/2026

- **Chapitre 8 : Réduction des endomorphismes, aspects géométriques**
- **Chapitre 9 : Réduction des endomorphismes, aspects algébriques**

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

1) Première partie de la colle : (25 minutes max)

Liste des questions de cours :

- **(MPI*)** CH8 : Enoncé et preuve du théorème 34 : théorème de trigonalisation.
- **(MPI*)** CH8 : Enoncé et preuve du théorème 41 : caractérisation en dim finie des endomorphismes nilpotents.
- **(MPI*)** CH9 : Enoncé et preuve du théorème 15 (de Cayley-Hamilton).
- **(MPI*)** CH9 : Enoncé et preuve du théorème 19 (lemme de décomposition des noyaux).

Liste des exercices de la banque INP :

- Ex. 62 (Etude d'un endomorphisme avec polynôme annulateur de degré 2)
- Ex. 65 (Composition sur $\mathbb{K}[u]$ et applications aux polynômes annulateurs)
- Ex. 88 (Polynôme annulateur d'un endo de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et diagonalisabilité)
- Ex. 91 (Calcul du polynôme minimal d'une matrice $3*3$ et calcul de puissance)
- Ex. 93 (Utilisation du lemme des noyaux sur un exemple)

2) Seconde partie de la colle (30 minutes min)

Résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI* seront plus difficiles.

Notions importantes :

- Les différentes CNS pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, méthode pratique de diagonalisation.
- Les différentes CNS pour qu'un endomorphisme soit trigonalisable, trigonalisation explicite seulement en petite dimension (2 ou 3),
- Expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres (comptées avec multiplicité),
- Caractérisation des endomorphismes nilpotents.
- Lien entre valeurs propres et racines d'un polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$.
- Montrer qu'un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable en exhibant un polynôme annulateur scindé à racines simples.
- Déterminer le polynôme minimal à partir des diviseurs du polynôme caractéristique.
- Calculer les puissances d'une matrice ou d'un endo à l'aide d'un polynôme annulateur.
- A l'aide d'un polynôme annulateur et du lemme des noyaux, décomposer l'espace E en somme directe de sous-espaces stables par u, et en déduire une matrice représentative simple de u.