Programme de colle 5
Semaine du lundi 16/11/2026

- **Chapitre 5 MPI : Généralités sur les EVN**
- **Chapitre 7 MPI : Topologie des EVN (tout le chapitre)**

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

1) Première partie (25 min maximum)

Une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes. Certaines questions de cours sont réservées aux MPI*.

Liste des questions de cours (CH7) :

- Enoncé et démonstration de la proposition 6 : toute boule ouverte (resp. fermée) est un ouvert (resp. un fermé), les sphères et les singletons sont fermés.
- Enoncé et démonstration du th. 17 + cor. 19 (caractérisations séquentielles de l'adhérence et des fermés).
- **(MPI*)** Enoncé et démonstration du th. 47 + cor. 48 (caractérisation ensembliste de la continuité).
- **(MPI*)** Enoncé et démonstration du th. 54 (propriétés d'une norme subordonnée)
- **(MPI*)** Enoncé et démonstration du th. 55 (continuité des applications bilinéaires)
- **(MPI*)** Enoncé et démonstration du th. 64 (théorème de Heine)

Liste des exercices de la banque INP :

- Ex 1 (non équivalences des normes 1 et infinie sur les fonctions continues et calcul d'adhérence des fonctions nulles en 0)
- Ex 13 (compacité)
- Ex 34 (adhérence d'un convexe)
- Ex 35 (caractérisation séquentielle continuité)
- Ex 36 (caractérisation de la continuité des applications linéaires)
- Ex 37 (non équivalence de normes)
- Ex 38 (normes triples)
- Ex 39 (suites de carré sommable)
- Ex 44 (adhérence d'une réunion, d'une intersection)
- Ex 45 (convexité et distance)
- Ex 54 (application linéaire définie par une série)

2) Seconde partie (30 min minimum)

Résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI* seront plus difficiles.

Notions importantes :

- Manipuler les notions de boules, voisinages, ouverts, fermés, intérieur, adhérence, dans différents contextes (espaces $\mathbb{K}^n$, espaces de polynômes, de suites, de fonctions, ...).
- Manipuler les différentes caractérisations séquentielles (pour les points adhérents, les parties fermées, les limites de fonctions, la continuité des fonctions).
- Montrer qu'un ensemble est ouvert / fermé en le faisant apparaître comme une image réciproque d'un ouvert / fermé par une application continue.

- Etudier la continuité d'une application linéaire ou multilinéaire vis à vis d'une certaine norme. Calcul de normes triples.
- Faire un raisonnement de compacité (avec des suites extraites).
- Chemins et connexité par arcs.
- Exploiter les différentes propriétés de la topologie en dimension finie (équivalence des normes, compacité des fermés/bornés, continuité des applications linéaires, etc.)