Programme de colle 4
Semaine du lundi 02/11/2026

- **Chapitre 6 MPI : Espaces préhibertiens et groupe orthogonal**
  Le chapitre 5 (généralités sur les EVN) sera couplé au chapitre 7 (topologie des EVN) lors de la prochaine colle.

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

La première partie de la colle (**25 min maximum**) consiste en une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes.
Certaines questions de cours sont réservées aux MPI*.

Liste des questions de cours :
- **(MPI*)** CH6 : Enoncé et preuve théorème 1 (supplémentaire orthogonal) + corollaire 3 (double orthogonal)
- CH6 : Enoncé et preuve théorème 9 + corollaire 10 (distance atteinte par la projection orthogonale + autre formule).
- CH6 : Enoncé et preuve prop. 17 + prop. 20 (correspondance entre isométries et matrices orthogonales).
- **(MPI*)** CH6 : Enoncé et preuve prop. 35 (matrices de $O_2(\mathbb{R})$) + prop. 38 (invariance par rapport aux bond en dim 2) + def. 39 (rotation plane).
- **(MPI*)** CH6 : Enoncé et preuve prop. 25 (caractérisation des symétries orthogonales) + prop. 41 (en dim 2, les isom négatives sont les réfléxions).

Liste des exercices de la banque INP :
- Ex 76 (inégalité de Cauchy-Schwarz)
- Ex 77 (relations d'orthogonalité)
- Ex 78 (propriétés des isométries vectorielles)
- Ex 79 (produit scalaire intégral)
- Ex 80 (calcul de projeté orthogonal avec fonctions trigo)
- Ex 81, 82 (calcul de distance avec des matrices 2*2)
- Ex 92 (matrices symétriques et antisymétriques)

La seconde partie de la colle consiste en la résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI* seront plus difficiles.

Notions importantes :
- Montrer qu'une application est un produit scalaire, et connaître les produits scalaires classiques.
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et le cas d'égalité.
- Notion d'orthogonalité entre vecteurs / sous-espaces vectoriels.
- Bases orthonormées, orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- Projection orthogonale sur un sev de dimension finie, méthode de calcul. Problèmes de distance.
- Symétries orthogonales, caractérisation matricielle.
- Isométries vectorielles : différentes caractérisations, représentation par les matrices orthogonales, classification en dimension 2.
  L'étude des isométries en dimension 3 n'a pas été faite, elle sera reprise ultérieurement dans les chapitres de réduction des endomorphismes (où l'on étudiera aussi les endomorphismes auto-adjoints).