

Programme de colle 3

Semaine du lundi 06/10/2025

- Révisions MP2I : Algèbre linéaire (espaces vectoriels, applications linéaires, matrices, déterminants).
- Chapitre 4 MPI : Compléments d'algèbre linéaire

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

La première partie de la colle (**25 min maximum**) consiste en une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes. Certaines questions de cours sont réservées aux MPI*.

Liste des questions de cours :

- Démonstration de : "Une application linéaire $u : E \rightarrow F$ est injective ssi $\text{Ker}(u) = \{0\}$, surjective ssi $\text{Im}(u) = F$ " (cours MP2I, CH.18)
- Démonstration de : "Une application linéaire $u : E \rightarrow F$ est injective ssi u transforme toutes les familles libres $(e_i)_{i \in I}$ en familles libres $(u(e_i))_{i \in I}$ " (cours MP2I, CH.18).
- Démonstration de : "Une application linéaire $u : E \rightarrow F$ est surjective ssi u transforme toutes les familles génératrices $(e_i)_{i \in I}$ de E en des familles $(u(e_i))_{i \in I}$ génératrices de F " (cours MP2I, CH.18).
- (MPI*) Enoncé et démonstration du théorème 5 du CH.4 (caractérisations d'une somme directe).
- (MPI*) Enoncé et démonstration du théorème 6 du CH.4 (caractérisation d'une somme directe avec les dimensions).

Liste des exercices de la banque INP :

- Ex 55 (suites récurrentes linéaires doubles)
- Ex 60 (étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)
- Ex 64 (endomorphismes avec noyau et image supplémentaires)
- Ex 71 (étude d'un projecteur de \mathbb{R}^3)
- Ex 87, 90 (interpolation de Lagrange)

La seconde partie de la colle consiste en la résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI* seront plus difficiles.

Notions importantes :

- Résoudre un système linéaire ;
- Reconnaître un SEV, passer de la définition "implicite" d'un SEV (par équation cartésienne) à la définition "paramétrique" (en déterminant une base), et réciproquement ;
- Ecrire la matrice d'une application linéaire dans un couple de bases ;
- Déterminer noyau, image, rang d'une application linéaire (ou d'une matrice) ;
- Raisonnements avec les dimensions (par ex. inclusion + égalité des dimensions) ;
- Projecteurs et symétries ;
- Base adaptée à une somme directe ;
- Produit de matrices par blocs, calculs de déterminants par blocs ;
- **Pas d'espaces préhilbertiens et de produits scalaires pour le moment.**