

Programme de colle 2

Semaine du lundi 29/09/2025

- Révisions MP2I : arithmétique, polynômes, groupe symétrique
- Chapitre 3 MPI : Structures algébriques usuelles

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

La première partie de la colle (**25 min maximum**) consiste en une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes. Certaines questions de cours sont réservées aux MPI*.

Liste des questions de cours :

- Énoncé et démonstration des théorèmes 11 et 59 (sous-groupes et idéaux de \mathbb{Z}).
- Énoncé et démonstration du théorème 78 (idéaux de $\mathbb{K}[X]$).
- (MPI*) Énoncé et démonstration du théorème 26 (classification des groupes monogènes).
- (MPI*) Énoncé et démonstration du théorème 68 (théorème chinois).
- (MPI*) Énoncé et démonstration de la propriété 70 + du théorème 71 (condition d'inversibilité dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier).

Liste des exercices de la banque INP :

- Ex 84 (racines n-ièmes de l'unité)
- Ex 85 (multiplicité d'une racine et factorisation de polynômes)
- Ex 86 (démonstration du petit théorème de Fermat avec les outils de MP2I)
- Ex 89 (calcul d'une somme de sinus)
- Ex 94 (système de congruences)

La seconde partie de la colle consiste en la résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI* seront plus difficiles.

Notions importantes :

- Les différentes structures et leurs morphismes (groupes, anneaux, corps) ;
- Ordre d'un élément dans un groupe, sous-groupe engendré par un élément ;
- Idéaux d'un anneau commutatif, idéal engendré par un élément ;
- Traduction de problèmes d'arithmétique dans les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, utilisation du théorème chinois ;
- Inversibilité dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, indicatrice d'Euler ;
- Arithmétique des polynômes, polynômes irréductibles.