Programme de colle 1

Semaine du lundi 22/09/2025

- **Chapitre 1 MPI : Séries numériques et sommabilité**
- **Chapitre 2 MPI : Intégration sur un intervalle quelconque**

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

La première partie de la colle (**25 min maximum**) consiste en une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes. Certaines questions de cours sont réservées aux MPI*.

Liste des questions de cours du CH1 :

- (MPI*) Enoncé et démonstration du th. 25 (sommation des relations de comparaison, cas CV)
- (MPI*) Enoncé et démonstration du th. 26 (sommation des relations de comparaison, cas DV)

Liste des questions de cours du CH2 :

- Enoncé et démonstration du th.17 (critère de majoration pour les fonctions positives)
- Enoncé et démonstration du th.18 (critère des équivalents pour les fonctions positives)
- (MPI*) Enoncé et démonstration du th.29 (intégration des relations de comparaison, cas CV)
- (MPI*) Enoncé et démonstration du th.30 (intégration des relations de comparaison, cas DV)

Liste des exercices de la banque INP :

- Ex 5 (séries de Bertrand dans le cas $\alpha = 1$)
- Ex 6 (règle de d'Alembert)
- Ex 7 (critère des équivalents)
- Ex 46 (étude d'une série avec DL)
- Ex 28 (deux exemples d'étude d'intégrabilité)

La seconde partie de la colle consiste en la résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI* seront plus difficiles.

Notions importantes :

- Appliquer les critères classiques (comparaison, équivalents, d'Alembert) pour étudier la nature d'une série à termes positifs.
- Utiliser le télescopage pour calculer des sommes.
- Convergence absolue pour les séries numériques.
- Critère spécial des séries alternées (avec la majoration du reste).
- Comparaison série-intégrale (encadrer des sommes partielles / des restes).
- Sommation des relations de comparaison (cas convergent et divergent).
- Vérifier si une famille est sommable à l'aide du théorème de sommation par paquets "positif" (en l'appliquant à la famille $|u_i|$).
- Calculer la somme d'une famille sommable à l'aide du théorème de sommation par paquets.
- Permutation de séries doubles à l'aide des théorèmes de Fubini (positif ou complexe).
- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.
- Etudier soigneusement la nature d'une intégrale impropre, ou l'intégrabilité d'une fonction (attention au vocabulaire!) en utilisant différents critères.
- Calculs d'intégrales impropres, notamment avec IPP ou changement de variable (généralisés ou non).

- Comparaison série-intégrale (encadrer des intégrales par des sommes et vice-versa).
Attention, le "théorème de comparaison série-intégrale" qui relie la nature d'une série et d'une intégrale impropre dans le cas décroissant et positif n'est plus au programme.
- Intégration de relations de comparaison (O , o , $\sim$), cas convergent et divergent : c'est l'analogue de la sommation des relations de comparaison (déjà vue pour les séries numériques).
- Remarque : les théorèmes de permutation limite/intégrale ou permutation série/intégrale seront étudiés dans des chapitres ultérieurs.