

CH07 : Topologie des espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel normé, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I Notions générales de topologie

Pour tout $a \in E$ et pour tout réel $r > 0$, on rappelle que $B(a, r)$ (resp. $B_f(a, r)$) désigne la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon r .

Egalement, on notera $d(a, x) = \|x - a\|$ la distance entre deux points a, x de E .

1) Voisinages

Définition 1 (Voisinage d'un point)

Soit $a \in E$ et soit $A \subset E$. On dit que A est un **voisinage** de a s'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.

Lemme 2 (Reformulation avec des boules fermées)

Soit $a \in E$ et soit $A \subset E$.

A est un voisinage de $a \iff$ il existe un réel $r > 0$ tel que $B_f(a, r) \subset A$.

2) Ouverts, fermés

Définition 3 (Partie ouverte)

Une partie $U \subset E$ est dite **ouverte** si pour tout $a \in U$, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.

Définition 4 (Partie fermée)

Une partie $F \subset E$ est dite **fermée** si son complémentaire $E \setminus F$ est une partie ouverte de E .

Vocabulaire

Une partie ouverte (resp. fermée) de E est aussi appelée "un ouvert de E " (resp. "un fermé de E ").

Propriété 5 (Stabilité par réunion / intersection)

- (i) Toute réunion de parties ouvertes (même infinie) est ouverte.
- (ii) Toute intersection **finie** de parties ouvertes est ouverte.
- (iii) Toute intersection de parties fermées (même infinie) est fermée.
- (iv) Toute réunion **finie** de parties fermées est fermée.

Propriété 6 (Topologie des boules, sphères, singletons)

- (i) Toute boule ouverte est une partie ouverte de E .
- (ii) Toute boule fermée est une partie fermée de E .
- (iii) Toute sphère est une partie fermée de E .
- (iv) Tout singleton $\{a\}$ est une partie fermée de E .

Propriété 7 (Produit fini d'ouverts, de fermés)

Soit $(E_1, N_1), \dots, (E_n, N_n)$ des \mathbb{K} -evn. On munit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ de la norme

$$N : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & N(x) = \max_{1 \leq i \leq n} N_i(x_i) \end{cases} .$$

- (i) Si pour tout $i \in [1, n]$, U_i est un ouvert de (E_i, N_i) alors le produit $U = U_1 \times \dots \times U_n$ est un ouvert de (E, N) .
- (ii) Si pour tout $i \in [1, n]$, F_i est un fermé de (E_i, N_i) alors le produit $F = F_1 \times \dots \times F_n$ est un fermé de (E, N) .

3) Intérieur, adhérence, frontière

Définition 8 (Point intérieur à une partie)

Soit $A \subset E$ et soit $a \in E$. On dit que a est **intérieur** à A lorsque A est un voisinage de a , c'est-à-dire lorsqu'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.

Notation

Pour toute partie $A \subset E$, on notera $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A , appelé **l'intérieur** de A .

Propriété 9 (Caractérisation de l'intérieur en tant qu'ouvert)

Soit $A \subset E$. Alors, $\overset{\circ}{A}$ est la plus grande partie ouverte contenue dans A .

Corollaire 10 (Caractérisation des ouverts par l'intérieur)

Une partie A est ouverte si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.

Définition 11 (Point adhérent à une partie)

Soit $A \subset E$ et soit $a \in E$. On dit que a est **adhérent** à A lorsque pour tout réel $r > 0$, la boule $B(a, r)$ contient au moins un élément de A (i.e $\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$).

Notation

Pour toute partie $A \subset E$, on notera \overline{A} l'ensemble des points adhérents à A , appelé **l'adhérence** de A .

Propriété 12 (Complémentaire et intérieur/adhérence)

Pour toute partie $A \subset E$, on a $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{E \setminus A}$, ainsi que $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$.

Propriété 13 (Caractérisation de l'adhérence en tant que fermé)

Soit $A \subset E$. Alors \overline{A} est la plus petite partie fermée contenant A .

Corollaire 14 (Caractérisation des fermés par l'adhérence)

Une partie A est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.

Définition 15 (Frontière d'une partie)

Soit $A \subset E$. On appelle **frontière** de A (ou **bord** de A) la partie $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Notation

Parfois, la frontière de A est notée ∂A .

Propriété 16 (Fermeture de la frontière)

Pour toute partie $A \subset E$, $Fr(A)$ est fermée.

4) Caractérisations séquentielles

Théorème 17 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence)

Soit $A \subset E$ et soit $a \in E$. Alors :

$a \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a .

Corollaire 18 (Adhérence d'une boule ouverte)

Pour tout $a \in E$ et pour tout $r > 0$, on a $\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$.

Notation

Une boule fermée pourra donc se noter $\overline{B(a, r)}$ plutôt que $B_f(a, r)$ sans ambiguïté.

Corollaire 19 (Caractérisation séquentielle des fermés)

Une partie $A \subset E$ est fermée si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in E$, on a $\ell \in A$.

5) Densité

Définition 20 (Partie dense)

Soit $A \subset E$. On dit que A est dense dans E lorsque $\overline{A} = E$.

6) Topologie relative à une partie

Examinons maintenant ce qu'il se passe lorsqu'on se restreint à une partie $X \subset E$.

Ces notions seront utiles lorsque l'on abordera l'étude de la continuité d'une fonction définie seulement sur X (et non pas sur E tout entier).

Définition 21 (Voisinage relatif à X)

Etant donné $X \subset E$ et $a \in \overline{X}$, on appelle **voisinage de a relatif à X** toute partie de la forme $V \cap X$, où V est un voisinage de a .

Propriété 22 (Caractérisation des voisinages relatifs avec les boules)

Soit $X \subset E$, $A \subset X$, et $a \in \overline{X}$.

A est un voisinage de a relatif à X si et seulement si il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap X \subset A$.

Définition 23 (Ouvert relatif à X)

Etant donné $X \subset E$, on appelle **ouvert relatif à X** toute partie de E de la forme $U \cap X$, avec U une partie ouverte de E .

Propriété 24 (Caractérisation des ouverts relatifs avec les voisinages relatifs)

Soit $X \subset E$ et $A \subset X$. Alors A est un ouvert relatif à X si et seulement si A est un voisinage relatif à X de chacun de ses points.

Définition 25 (Fermé relatif à X)

Etant donné $X \subset E$, on appelle **fermé relatif à X** toute partie de E de la forme $F \cap X$, avec F une partie fermée de E .

Propriété 26 (Caractérisations des fermés relatifs à X)

Soit $X \subset E$ et $A \subset X$. Alors on a équivalence entre :

- (i) A est un fermé relatif à X ;
- (ii) pour toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in X$, on a $\ell \in A$;
- (iii) le complémentaire de A dans X est un ouvert relatif à X .

7) Invariance des notions topologiques par des normes équivalentes

Théorème 27 (Voisinages, ouverts, fermés pour des normes équivalentes)

Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Alors les deux espaces vectoriels normés (E, N_1) , (E, N_2) possèdent les mêmes voisinages, les mêmes ouverts et les mêmes fermés.

II Limites et continuité

Dans cette section, $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ désignent deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés. On va considérer des applications définies sur une partie $X \subset E$ et à valeurs dans F .

Lorsque E et/ou F est égal à \mathbb{K} , on le munit naturellement de la valeur absolue / du module.

Vocabulaire ("Au voisinage de ...")

Etant donné une propriété \mathcal{P} , une fonction $f : X \subset E \rightarrow F$ et un point $a \in \overline{X}$ (adhérent à X), on dira que **f possède la propriété \mathcal{P} au voisinage de a** s'il existe un voisinage V de a relatif à X tel que la restriction $f|_V : V \rightarrow F$ possède la propriété \mathcal{P} .

Sans perte de généralité, on peut supposer V de la forme $V = B(a, r) \cap X$.

1) Limite d'une fonction en un point

Définition 28 (Limite en un point)

Soit $X \subset E$, $f : X \rightarrow F$ et $a \in \overline{X}$. On dit que **f possède une limite en a** lorsqu'il existe $\ell \in F$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que **$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a** et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ou encore $f \xrightarrow[a]{} \ell$.

Lemme 29 (Reformulation de la notion de limite avec des inégalités strictes)

Soit $X \subset E$, $f : X \rightarrow F$, $a \in \overline{X}$ et $\ell \in F$. Alors :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff (\forall \varepsilon' > 0, \exists \delta' > 0, \forall x \in X, \|x - a\|_E < \delta' \implies \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon').$$

Théorème 30 (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soient $X \subset E$, $f : X \rightarrow F$, $a \in \overline{X}$ et $\ell \in F$. Alors :

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ si et seulement si pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, on a $(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Propriété 31 (Unicité de la limite d'une fonction)

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

On dit alors que ℓ est la **limite** de f en a et on note $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ou $\ell = \lim_a f$.

2) Opérations sur les limites

Propriété 32 (Limite d'une fonction à valeurs dans un espace produit)

On considère des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés $(F_1, N_1), \dots, (F_p, N_p)$ et on munit l'espace produit $F = F_1 \times \dots \times F_p$ de la norme $N : F \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$N(y_1, \dots, y_p) = \max(N_1(y_1), \dots, N_p(y_p)).$$

Soit $f : X \subset E \rightarrow F$, $a \in \overline{X}$ et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in F$.

Notons $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ pour tout $x \in E$. Alors, on a :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \forall i \in \{1, \dots, p\}, f_i(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_i,$$

Vocabulaire

Les applications f_1, \dots, f_p sont appelées les **composantes** de f ou encore les **fonctions coordonnées** de f .

Propriété 33 (Opérations algébriques sur les limites de fonctions)

Soit $X \subset E$, $a \in \bar{X}$, $f : X \rightarrow F$ et $g : X \rightarrow F$. On suppose que $f \xrightarrow{a} \ell \in F$ et $g \xrightarrow{a} \ell' \in F$.

(i) On a $f + g \xrightarrow{a} \ell + \ell'$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda f \xrightarrow{a} \lambda \ell$.

Propriété 34 (Limite d'un produit externe)

Soit $X \subset E$, $a \in \bar{X}$, $\alpha : X \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \rightarrow F$. On suppose que $\alpha \xrightarrow{a} \lambda \in \mathbb{K}$ et $f \xrightarrow{a} \ell \in F$.

Alors $\alpha f \xrightarrow{a} \lambda \ell \in F$.

Propriété 35 (Limite d'un inverse scalaire)

Soit $X \subset E$, $a \in \bar{X}$, $f : X \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que $f \xrightarrow{a} \ell \in \mathbb{K}^*$.

Alors f ne s'annule pas au voisinage de a , et $\frac{1}{f} \xrightarrow{a} \frac{1}{\ell}$.

Théorème 36 (Limite d'une composée)

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels normés, Soit $f : X \subset E \rightarrow F$ et $g : Y \subset F \rightarrow G$ tel que $f(X) \subset Y$, et soit $a \in \bar{X}$. Si $f \xrightarrow{a} b \in F$ et si $g \xrightarrow{b} \ell \in G$, alors $g \circ f \xrightarrow{a} \ell$.

3) Extension : limite à l'infini, limite infinie**Définition 37 (Limite lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$)**

Soit X une partie non bornée de E , $f : X \rightarrow F$ et $\ell \in F$.

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, \forall x \in X, \|x\|_E \geq R \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} \ell$.

Définition 38 (Limite lorsque $x \rightarrow \pm\infty$)

On suppose ici que $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ est un evn quelconque.

Etant donné $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow F$ et $\ell \in F$:

(i) Si X n'est pas majorée, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, \forall x \in X, x \geq R \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

(ii) Si X n'est pas minorée, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, \forall x \in X, x \leq -R \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$.

Définition 39 (Limite infinie d'une fonction réelle)

On suppose ici que $(E, \|\cdot\|)$ est un evn quelconque et $(F, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Etant donné $X \subset E$, $a \in \bar{X}$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$:

(i) On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall R > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \delta \implies f(x) \geq R.$$

(ii) On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall R > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \delta \implies f(x) \leq -R.$$

4) Fonctions continues

Définition 40 (Continuité en un point)

Soit $X \subset E$, $f : X \rightarrow F$ et $a \in X$. On dit que f est **continue en a** lorsque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon.$$

Théorème 41 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit $f : X \subset E \rightarrow F$, $a \in X$. Alors :

f est continue en a ssi pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, on a $(x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a))$.

Définition 42 (Continuité globale)

Soit $X \subset E$. On dit qu'une application $f : X \rightarrow F$ est **continue** lorsqu'elle est continue en tout point $a \in X$.

Notation

Pour toute partie $X \subset E$, on notera $\mathcal{C}^0(X, F)$ l'ensemble des fonctions continues $X \rightarrow F$.

Propriété 43 (Coïncidence sur une partie dense)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(E, F)$ et $g \in \mathcal{C}^0(E, F)$.

Si f et g sont égales sur une partie X dense dans E , alors $f = g$.

Théorème 44 (Opérations algébriques sur les fonctions continues)

Soit $X \subset E$.

(i) $\mathcal{C}^0(X, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^X .

(ii) Si $F = \mathbb{K}$, alors $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de \mathbb{K}^X .

Propriété 45 (Continuité et produit externe)

Soit $X \subset E$. Si $\alpha \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{K})$ et si $f \in \mathcal{C}^0(X, F)$, alors $\alpha f \in \mathcal{C}^0(X, F)$.

Théorème 46 (Composition de fonctions continues)

Soit E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels normés, soit $X \subset E$, $Y \subset F$. Si $f \in \mathcal{C}^0(X, F)$, $g \in \mathcal{C}^0(Y, G)$ et $f(X) \subset Y$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(X, G)$.

5) Caractérisation ensembliste de la continuité

Théorème 47 (Caractérisation de la continuité sur X par les images réciproques des ouverts / fermés)

Soit $X \subset E$ et $f : X \rightarrow F$. Alors, on a équivalence entre :

(i) f est continue ;

(ii) pour tout ouvert U de F , $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif à X ;

(iii) pour tout fermé Y de F , $f^{-1}(Y)$ est un fermé relatif à X .

Corollaire 48 (Caractérisation de la continuité sur E par les images réciproques des ouverts / fermés)

Soit $f : E \rightarrow F$. Alors, on a équivalence entre :

(i) f est continue ;

(ii) pour tout ouvert U de F , $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E ;

(iii) pour tout fermé Y de F , $f^{-1}(Y)$ est un fermé de E .

III Continuités spécifiques

$(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ désignent toujours deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés, non nuls.

1) Fonctions uniformément continues, fonctions lipschitziennes

Définition 49 (Continuité uniforme)

Soit $X \subset E$ et $f : X \rightarrow F$. On dit que f est **uniformément continue** lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in X^2, \|x - y\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Définition 50 (Caractère lipschitzien)

Soit $X \subset E$ et $f : X \rightarrow F$. On dit que f est **lipschitzienne** lorsque :

$$\exists K \geq 0, \forall (x, y) \in X^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq K\|x - y\|_E.$$

Propriété 51 (Liens entre les différentes continuités)

f lipschitzienne $\implies f$ uniformément continue $\implies f$ continue .

2) Continuité des applications linéaires

Notation

On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires $E \rightarrow F$.

On notera également $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues $E \rightarrow F$.

On rappelle que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E .

Vu que $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F) \cap \mathcal{C}^0(E, F)$, cet ensemble est également un sous-espace vectoriel de F^E , et on a $\mathcal{L}_c(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$.

Théorème 52 (Caractérisation de la continuité des applications linéaires)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors il y a **équivalence** entre :

- (i) u est continue en 0_E ;
- (ii) u est continue ;
- (iii) u est uniformément continue ;
- (iv) u est lipschitzienne ;
- (v) $\exists C \geq 0, \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$.

3) Normes subordonnées

Définition 53 (Norme subordonnée)

Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On pose

$$\|u\| = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

On dit que $\|u\|$ est la **norme subordonnée** (ou **norme d'opérateur**, ou encore **norme triple**) de u , associée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. On la note aussi $\|u\|_{op}$.

Théorème 54 (Propriétés d'une norme subordonnée)

On dispose des propriétés suivantes :

(i) Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$:

$$\|u\| = \min\{C \geq 0, \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E\}.$$

En particulier, on a $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq \|u\| \|x\|_E$.

(ii) $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

(iii) $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative : si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$ (où G est un troisième evn), alors

$$\|v \circ u\| \leq \|v\| \|u\|.$$

En particulier, $\|\cdot\|$ est une norme sous-multiplicative sur la \mathbb{K} -algèbre $\mathcal{L}_c(E)$.

(iv) On a les égalités :

$$\|u\| = \sup_{x \in B_f(0,1) \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in B_f(0,1)} \|u(x)\|_F = \sup_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|_F,$$

où $B_f(0,1)$ désigne la boule unité fermée de E et $S(0,1)$ la sphère unité de E .

4) Continuité des applications multilinéaires**Théorème 55 (Caractérisation de la continuité des applications bilinéaires)**

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels normés et $b : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire.

On munit l'espace produit $E \times F$ de la norme :

$$\|(x, y)\|_{E \times F} = \max(\|x\|_E, \|y\|_F).$$

Alors il y a équivalence entre :

(i) b est continue ;

(ii) $\exists C \geq 0, \forall (x, y) \in E \times F, \|b(x, y)\|_G \leq C\|x\|_E\|y\|_F$.

Ce résultat se généralise aux applications multilinéaires :

Théorème 56 (Caractérisation de la continuité des applications multilinéaires)

Soient E_1, \dots, E_n, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés et $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ une application multilinéaire. On munit l'espace produit $E_1 \times \dots \times E_n$ de la norme :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_{E_1 \times \dots \times E_n} = \max_{1 \leq i \leq n} (\|x_i\|_{E_i}).$$

Alors il y a équivalence entre :

(i) f est continue ;

(ii) $\exists C \geq 0, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, \|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq C\|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_n\|_{E_n}$.

IV Compacité

$(E, \| \cdot \|)$ désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel normé.

1) Définition et premières propriétés

Définition 57 (Partie compacte)

Une partie $A \subset E$ est dite **compacte** lorsque toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ possède une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge dans A .

Vocabulaire

On dit aussi que A est "un compact" de E .

Propriété 58 (Propriétés topologiques d'une partie compacte)

Si A est compacte, alors A est fermée et bornée dans E .

Propriété 59 (Un fermé d'un compact est compact)

Soit F une partie fermée de E , et A une partie compacte de E . Si $F \subset A$, alors F est compacte.

Théorème 60 (Compacité et valeurs d'adhérence)

Soit A une partie compacte de E , et (u_n) une suite de $A^{\mathbb{N}}$.

Alors, (u_n) converge si et seulement si (u_n) possède une seule valeur d'adhérence.

Théorème 61 (Produit fini de compacts)

Si A_1, \dots, A_p sont des parties compactes de E_1, \dots, E_p (des \mathbb{K} -evn) respectivement, alors le produit $A_1 \times \dots \times A_p$ est une partie compacte de l'espace normé produit $E_1 \times \dots \times E_p$ (muni de la norme usuelle).

2) Compacité et continuité

Théorème 62 (Image continue d'un compact)

Soient E et F deux \mathbb{K} -evn.

Soit A une partie compacte de E et soit $f : A \rightarrow F$. Si f est continue, alors l'image $f(A)$ est compacte.

Théorème 63 (Théorème des bornes atteintes)

Soit A une partie compacte et non vide de E , et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $(a, b) \in A^2$ tels que

$$f(a) = \inf_{x \in A} f(x), \quad f(b) = \sup_{x \in A} f(x).$$

Théorème 64 (Théorème de Heine)

Soient E et F deux \mathbb{K} -evn, soit $A \subset E$ et $f : A \rightarrow F$.

Si A est compacte et f est continue, alors f est uniformément continue.

3) Parties compactes de $(\mathbb{K}, | \cdot |)$

Rappelons le théorème suivant, vu en MP2I :

Théorème 65 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) est bornée, alors (u_n) possède une suite extraite convergente dans \mathbb{K} .

Corollaire 66 (Caractérisation des parties compactes de \mathbb{K})

Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{K}, | \cdot |)$ une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

V Connexité par arcs

$(E, \|\cdot\|)$ désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel normé.

1) Chemins

Définition 67 (Chemin tracé dans une partie)

Etant donnée une partie $A \subset E$, on appelle **chemin dans A** (ou **arc dans A**) toute application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ telle que $\forall t \in [0, 1], \gamma(t) \in A$.

Etant donnés deux points $(x, y) \in A^2$, on appelle **chemin dans A de x vers y** toute chemin dans A tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Propriété 68 (Relation d'équivalence associée aux chemins)

Soit $A \subset E$. On définit sur A la relation binaire suivante :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad x \mathcal{R} y \iff \text{il existe un chemin dans } A \text{ de } x \text{ vers } y.$$

Cette relation est une relation d'équivalence sur A .

Définition 69 (Composantes connexes par arcs d'une partie)

Soit $A \subset E$. Les classes d'équivalences de la relation \mathcal{R} précédemment définie s'appellent les **composantes connexes par arcs** de A .

Définition 70 (Partie connexe par arcs)

Une partie $A \subset E$ est dite **connexe par arcs** lorsque pour tout $(x, y) \in A^2$, il existe un chemin dans A de x vers y .

2) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 71 (Parties connexes par arcs de \mathbb{R})

Dans \mathbb{R} , une partie A est connexe par arcs si et seulement si c'est un intervalle.

Théorème 72 (Image continue d'une partie connexe par arcs)

Soient E et F deux \mathbb{K} -evn, soit $A \subset E$ et $f : A \rightarrow F$.

Si A est connexe par arcs et f continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs dans F .

Théorème 73 (Théorème des valeurs intermédiaires généralisé)

Soit $A \subset E$ une partie connexe par arcs, et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Pour tout $(a, b) \in A^2$ et pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in A$ tel que $f(c) = \lambda$.

VI Topologie en dimension finie

1) Equivalence des normes

Lemme 74 (Isomorphisme isométrique entre E et \mathbb{K}^n)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Alors :

(i) L'application $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \rightarrow E$ définie par

$$\varphi_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

est un isomorphisme linéaire, et l'isomorphisme réciproque $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ associe à un vecteur $x \in E$ ses coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B} .

(ii) L'application $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}} : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\|x\|_{\infty, \mathcal{B}} = \|\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(x)\|_{\infty} = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

est une norme sur E .

Ainsi, $\varphi_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme isométrique (qui conserve la norme) entre les deux espaces normés $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{\infty})$ et $(E, \|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}})$.

Théorème 75 (Equivalence des normes en dimension finie)

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

2) Conséquences

Corollaire 76 (Invariance des notions topologiques en dimension finie)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Alors :

- (i) Le fait qu'une partie $A \subset E$ soit bornée, ouverte, fermée, compacte, connexe par arcs ne dépend pas du choix de la norme sur E .
- (ii) Le fait qu'une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ soit bornée, convergente, ne dépend pas du choix de la norme sur E .
- (iii) Si F est aussi un \mathbb{K} -ev de dimension finie, le fait qu'une application $f : X \subset E \rightarrow F$ soit continue ne dépend pas du choix des normes sur E et F .

Corollaire 77 (Convergence des suites par coordonnées)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $(u_k) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons

$$u_k = u_{k,1}e_1 + \dots + u_{k,n}e_n$$

la décomposition de u_k dans la base \mathcal{B} .

Alors, la suite (u_k) converge dans E si et seulement si les suites coordonnées $(u_{k,i})$ ($1 \leq i \leq n$) convergent dans \mathbb{K} , et dans ce cas, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \sum_{i=1}^n \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{k,i} \right) e_i.$$

Corollaire 78 (Limite d'une fonction par coordonnées)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel normé, et F un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$.

On considère une fonction $f : X \subset E \rightarrow F$, et un point $a \in \overline{X}$. Pour tout $x \in X$, on note

$$f(x) = f_1(x)e_1 + \dots + f_p(x)e_p$$

la décomposition du vecteur $f(x)$ dans la base \mathcal{B}_F .

Alors f possède une limite lorsque $x \rightarrow a$ si et seulement si les fonctions coordonnées $f_i : X \subset E \rightarrow \mathbb{K}$ ($1 \leq i \leq p$) possèdent une limite lorsque $x \rightarrow a$, et dans ce cas, on a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sum_{i=1}^p \left(\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) \right) e_i.$$

3) Caractérisation des parties compactes et conséquences**Théorème 79 (Caractérisation des parties compactes en dimension finie)**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie et soit $A \subset E$.

A est compacte si et seulement si A est fermée et bornée.

Corollaire 80 (Suites bornées et valeurs d'adhérence en dimension finie)

Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie possède au moins une valeur d'adhérence, et elle converge si et seulement si cette valeur d'adhérence est unique.

Corollaire 81 (Topologie des sev de dimension finie)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé.

4) Continuité en dimension finie**Théorème 82 (Continuité des applications linéaires en dimension finie)**

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés.

Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $u : E \rightarrow F$ est continue.

Définition 83 (Application polynomiale sur \mathbb{K}^n)

On dit qu'une application $p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ est **polynomiale** si elle est combinaison linéaire de fonctions du type $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ (appelées **monômes**), avec les $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Vocabulaire

On dit aussi "fonction polynôme".

Théorème 84 (Continuité des applications polynomiales de \mathbb{K}^n)

Toute application polynomiale $p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ est continue.

Théorème 85 (Continuité des applications polynomiales en dimension finie)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors toute application $p : E \rightarrow \mathbb{K}$ polynomiale en les coordonnées dans la base \mathcal{B} est continue.

Théorème 86 (Continuité des applications bilinéaires en dimension finie)

Soient E, F, G des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés.

Si E et F sont de dimension finie, alors toute application bilinéaire $b : E \times F \rightarrow G$ est continue.

Théorème 87 (Continuité des applications multilinéaires en dimension finie)

Soient E_1, \dots, E_n, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés.

Si E_1, \dots, E_n sont de dimension finie, alors toute application multilinéaire $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ est continue.

Terminons par une liste (non exhaustive) d'exemples classiques.

CH08 : Réduction des endomorphismes - aspects géométriques

Dans tout ce cours, \mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} (un tel corps contient nécessairement \mathbb{Q} , et on aura très souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), et E un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul.

Etant donné un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on peut se demander (lorsque E est de dimension finie) s'il existe une base de E dans laquelle u se représente par une matrice "simple", par exemple diagonale, ou triangulaire, ou diagonale par blocs. La détermination d'une telle base est appelée la **réduction** de l'endomorphisme u .

I Sous-espaces stables par un endomorphisme

1) Définition

Définition 1 (Sous-espace stable par un endomorphisme)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit F un sous-espace vectoriel de E . On dit que F est stable par u lorsque $u(F) \subset F$, c'est-à-dire $(x \in F \implies u(x) \in F)$.

Définition 2 (Endomorphisme induit sur un sous-espace stable)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u .

Alors, l'application $u_F : \begin{cases} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{cases}$ est bien définie et c'est un endomorphisme de F .

On dit que u_F est l'endomorphisme induit par u sur F .

2) Matrice dans une base adaptée à un sous-espace stable

Propriété 3 (Traduction matricielle d'un sous-espace stable)

On suppose E de dimension finie, notée $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E . On considère $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_k)$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ de E .

Alors, F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans la base \mathcal{B} est de la forme suivante :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

avec $A_1 \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$. Dans ce cas, A_1 est la matrice de u_F dans la base \mathcal{B}_F .

II Eléments propres d'un endomorphisme

Dans la suite, on fixe un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) Vecteurs propres, valeurs propres

Définition 4 (Vecteurs propres, valeurs propres)

- (i) On dit que $x \in E$ est un **vecteur propre** de u lorsque $x \neq 0_E$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $u(x) = \lambda x$ (i.e. x est non nul et $u(x)$ est colinéaire à x).
- (ii) On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$.

Vocabulaire

Lorsque $u(x) = \lambda x$ avec x non nul, on dit que (λ, x) est un **couple valeur propre/vecteur propre**.

On dit aussi que x et λ sont **associés**.

L'équation $u(x) = \lambda x$, d'inconnue $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times (E \setminus \{0\})$, est appelée **équation aux éléments propres** de u .

Propriété 5 (Caractérisation des valeurs propres)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } u &\iff \text{Ker}(u - \lambda Id_E) \neq \{0_E\} \\ &\iff u - \lambda Id_E \text{ non injective.} \end{aligned}$$

Dans ce cas, les vecteurs propres associés à λ sont les éléments non nuls de $\text{Ker}(u - \lambda Id_E)$.

Propriété 6 (Vecteur propre et droite stable)

Soit $x \in E$ un vecteur non nul. On a l'équivalence :

$$x \text{ est vecteur propre de } u \iff \text{la droite } \mathcal{D} = \text{Vect}(x) \text{ est stable par } u.$$

2) Sous-espaces propres

Définition 7 (Sous-espace propre d'un endomorphisme)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle **sous-espace propre associé à λ** l'ensemble $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda Id_E)$.

C'est un sous-espace vectoriel non nul de E .

Théorème 8 (Indépendance linéaire des sous-espaces propres)

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ (avec $p \geq 2$) des valeurs propres **distinctes** de u . Alors :

- (i) les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe, i.e. :

$$\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u);$$

- (ii) si x_1, \dots, x_p sont des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, alors la famille (x_1, \dots, x_p) est libre.

Théorème 9 (Stabilité d'un sous-espace propre)

Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent : $u \circ v = v \circ u$.

Alors, tout sous-espace propre de u est stable par v .

En particulier, tout sous-espace propre de u est stable par u .

3) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

En dimension finie, on dispose d'une caractérisation simple des valeurs propres, grâce au déterminant. Dans toute la suite, **on suppose que E est de dimension finie**, et on note

$$n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*.$$

u désigne toujours un endomorphisme de E .

Propriété 10 (Caractérisation des valeurs propres à l'aide du det)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on a l'équivalence :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } u \iff \det(\lambda Id_E - u) = 0.$$

Propriété 11 (Structure polynomiale de $\det(\lambda Id_E - u)$)

La fonction $\lambda \mapsto \det(\lambda Id_E - u)$ est polynomiale de degré $n = \dim(E)$, avec

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \det(\lambda Id_E - u) = \lambda^n - \text{tr}(u)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u).$$

Définition 12 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique** de u le polynôme :

$$\chi_u(X) = \det(X Id_E - u) \in \mathbb{K}[X].$$

On dispose alors du théorème suivant :

Théorème 13 (Interprétation des valeurs propres comme racines)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

- (i) Les valeurs propres de u sont exactement les racines dans \mathbb{K} de son polynôme caractéristique :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda \text{ valeur propre de } u \iff \chi_u(\lambda) = 0).$$

- (ii) u possède au plus n valeurs propres.

Définition 14 (Spectre d'un endomorphisme)

On appellera **spectre de u** (noté $Sp(u)$) l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ qui sont valeurs propres de u .

4) Éléments propres d'une matrice carrée

n désigne toujours un entier naturel non nul.

Par simplicité, les vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ seront identifiés aux vecteurs de \mathbb{K}^n .

Définition 15 (Valeur/vecteur propre d'une matrice carrée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de A** lorsque λ est une valeur propre de l'endomorphisme canoniquement associé à A :

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ V & \longmapsto & AV \end{cases}.$$

Tout vecteur colonne V tel que $V \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ et $AV = \lambda V$ est alors appelé **vecteur propre** de la matrice A associé à la valeur propre λ .

Définition 16 (Sous-espaces propres d'une matrice carrée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A . On appelle **sous-espace propre de A associé à λ** le sous-espace vectoriel $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$.

Définition 17 (Polynôme caractéristique d'une matrice carrée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique de A** le polynôme :

$$\chi_A(X) = \det(X I_n - A) \in \mathbb{K}[X].$$

Définition 18 (Spectre d'une matrice carrée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **spectre de A** (noté $Sp(A)$) l'ensemble des valeurs propres de A . C'est une partie finie de \mathbb{K} (les racines de χ_A), de cardinal compris entre 0 et n .

Propriété 19 (Valeurs propres d'une matrice triangulaire)

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux.

Propriété 20 (Des matrices semblables ont même poly. caractéristique)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, alors $\chi_A(X) = \chi_B(X)$.

5) Multiplicité d'une valeur propre

Définition 21 (Multiplicité d'une valeur propre)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **multiplicité de la valeur propre λ** sa multiplicité en tant que racine de $\chi_u(X)$, c'est-à-dire le plus grand entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X - \lambda)^k$ divise $\chi_u(X)$.

Propriété 22 (Forme du polynôme caractéristique sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors χ_u est scindé, c'est-à-dire de la forme :

$$\chi_u(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

où $1 \leq p \leq n$, les $\lambda_k \in \mathbb{C}$ sont les valeurs propres distinctes de u , et les $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives.

Théorème 23 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit)

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev non nul de E stable par u .

Alors $\chi_{u_F}(X)$ divise $\chi_u(X)$.

On en déduit un lien entre la multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé :

Théorème 24 (Lien entre multiplicité de λ et dimension de $E_\lambda(u)$)

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ de multiplicité $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$. Alors, on a

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq \alpha_\lambda,$$

où $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ est le sous-espace propre de u associé à λ .

III Endomorphismes/matrices diagonalisables

E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On s'intéresse au problème suivant : existe-t-il une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?

1) Définition

Définition 25 (Endomorphisme diagonalisable)

On dit que u est **diagonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Propriété 26 (Définition équivalente d'un endomorphisme diagonalisable)

u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u .

Vocabulaire

Si u est diagonalisable, **diagonaliser** l'endomorphisme u signifie trouver une telle base de vecteurs propres, appelée aussi **base de diagonalisation** de u .

On définit naturellement une notion analogue sur les matrices carrées :

Définition 27 (Matrice diagonalisable)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Vocabulaire

Dans ce cas, **diagonaliser** la matrice A , c'est déterminer une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.

2) Théorème de diagonalisation

De manière générale, on dispose d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme (ou une matrice) soit diagonalisable.

Théorème 28 (Caractérisation des endomorphismes diagonalisables)

u est diagonalisable si et seulement si $\left(Sp(u) \neq \emptyset \text{ et } \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) = E \right)$.

Dans ce cas, on a

$$\chi_u(X) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)^{\dim(E_\lambda(u))}$$

(chaque valeur propre a une multiplicité égale à la dimension du sous-espace propre associé).

On déduit de la proposition précédente le théorème suivant :

Théorème 29 (Théorème de diagonalisation)

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On note $\chi_u(X) = \det(XId_E - u)$ son polynôme caractéristique.

(i) Si χ_u n'est pas scindé sur \mathbb{K} , alors u n'est pas diagonalisable.

(ii) Si χ_u est scindé sur \mathbb{K} , alors en notant $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ (avec les λ_k deux à deux distincts et les $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$), on a les équivalences :

$$\begin{aligned} u \text{ est diagonalisable} &\iff E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u) = E \\ &\iff \sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k}(u)) = n \\ &\iff \forall k \in [1; p], \dim(E_{\lambda_k}(u)) = \alpha_k \end{aligned} .$$

Dans ce cas, on obtient une base de diagonalisation de u en concaténant des bases des sous-espaces propres.

3) Cas des projecteurs et symétries**Propriété 30 (Diagonalisabilité des projecteurs et symétries)**

(i) Tout projecteur $p : E \rightarrow E$ est diagonalisable.

De plus, si $p \notin \{0_{\mathcal{L}(E)}, Id_E\}$, alors p possède exactement deux sous-espaces propres : $E_0(p) = \text{Ker}(p)$ et $E_1(p) = \text{Ker}(p - Id_E) = \text{Im}(p)$.

(ii) Toute symétrie $s : E \rightarrow E$ est diagonalisable.

De plus, si $s \notin \{Id_E, -Id_E\}$, alors s possède exactement deux sous-espaces propres : $E_1(s) = \text{Ker}(s - Id_E)$ et $E_{-1}(s) = \text{Ker}(s + Id_E)$.

4) Cas où χ_u est scindé à racines simples**Propriété 31 (Cas où χ_u est scindé à racines simples)**

Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si χ_u est scindé à racines simples sur \mathbb{K} , alors u est diagonalisable.

IV Endomorphismes/matrices trigonalisables

E désigne encore un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Définition

Définition 32 (Endomorphisme trigonalisable)

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **trigonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Vocabulaire

Trigonaliser l'endomorphisme u signifie trouver une telle base de E , appelée **base de trigonalisation** de u .

Définition 33 (Matrice trigonalisable)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire, c'est-à-dire lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire.

Vocabulaire

Trigonaliser la matrice A , c'est déterminer explicitement une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire. Comme pour la diagonalisation, **les colonnes de P représentent une base de trigonalisation** de l'endomorphisme $u : V \mapsto AV$ canoniquement associé à A .

2) Théorème de trigonalisation et conséquences

Théorème 34 (Théorème de trigonalisation)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$u \text{ est trigonalisable} \iff \text{le polynôme caractéristique } \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K}.$$

Corollaire 35 (Cas complexe / cas réel)

- (i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.
- (ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant toutes ses valeurs propres dans \mathbb{R} est trigonalisable.

Corollaire 36 (Trigonalisation des matrices carrées)

- (i) Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
- (ii) Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, i.e. il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
- (iii) Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que χ_A est scindé sur \mathbb{R} est trigonalisable dans \mathbb{R} , c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

3) Expressions de la trace et du déterminant

Propriété 37 (Lien entre trace, déterminant et valeurs propres)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que χ_u est scindé sur \mathbb{K} . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de u (pas nécessairement distinctes, mais comptées avec multiplicité). Alors, on a

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k, \quad \det(u) = \prod_{k=1}^n \lambda_k.$$

Corollaire 38 (Lien entre trace, dét. et valeurs propres d'une matrice)

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

- (i) La trace de A est la somme de ses valeurs propres (**comptées avec multiplicité**).
- (ii) Le déterminant de A est le produit de ses valeurs propres (**comptées avec multiplicité**).

Ces résultats sont aussi valables pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant toutes ses valeurs propres réelles.

4) Trigonalisation en dimension 2**Méthode (Trigonalisation en dimension 2)**

Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose que A est **trigonalisable** dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ mais **non diagonalisable**.

En notant $u : V \mapsto AV$ l'endomorphisme de \mathbb{K}^2 canoniquement associé à A , on a donc

$$\chi_u(X) = (X - \lambda)^2, \quad \dim(E_\lambda(u)) = 1.$$

- On détermine une base (v_1) de $E_\lambda(u)$. On a donc $u(v_1) = \lambda v_1$.
- On complète en une base $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$ de \mathbb{K}^2 .

La matrice de u dans \mathcal{B} est alors de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Vu que cette matrice est semblable à A , on a $\text{tr}(T) = \text{tr}(A) = 2\lambda$, et donc

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On a donc trigonalisé A , puisque T est triangulaire et semblable à A : en effet, on a $T = P^{-1}AP$, où P est la matrice de passage dont les colonnes sont les coordonnées de v_1 et v_2 dans la base canonique.

Méthode (Choix optimal de v_2)

On peut "**optimiser**" le choix du vecteur v_2 , afin d'obtenir une base $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$ dans laquelle la matrice de u est

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Il suffit pour cela de prendre v_2 tel que

$$u(v_2) = v_1 + \lambda v_2$$

(et c'est toujours possible, c'est l'objet d'une théorie plus poussée appelée la "réduction de Jordan"). En pratique, le calcul d'un tel vecteur v_2 est simple (système linéaire avec second membre à résoudre) : en notant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de v_2 dans la base canonique de \mathbb{K}^2 , et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ celles de v_1 , on a

$$u(v_2) = v_1 + \lambda v_2 \iff (u - \lambda Id)(v_2) = v_1 \iff (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

5) Trigonalisation en dimension 3

Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. On suppose que A est **trigonalisable** dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ mais **non diagonalisable**.

En notant $u : V \mapsto AV$ l'endomorphisme de \mathbb{K}^3 canoniquement associé à A , on a donc deux cas possibles :

- a) $\chi_u(X) = (X - \alpha)(X - \beta)^2$ avec $\alpha \neq \beta$, et $\dim(E_\alpha(u)) = \dim(E_\beta(u)) = 1$.
- b) $\chi_u(X) = (X - \alpha)^3$ avec $\dim(E_\alpha(u)) = 1$ ou 2 .

a) Trigonalisation avec une valeur propre simple et une double

On suppose que $\chi_u(X) = (X - \alpha)(X - \beta)^2$ avec $\alpha \neq \beta$ et les sous-espaces propres vérifient :

$$\dim(E_\alpha(u)) = \dim(E_\beta(u)) = 1.$$

Méthode

- On détermine une base (v_1) de $E_\alpha(u)$ et une base (v_2) de $E_\beta(u)$.
Puisque les deux espaces propres sont en somme directe, (v_1, v_2) est une famille libre de \mathbb{K}^3 .
- On peut la compléter en une base $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$ de \mathbb{K}^3 .
Puisque $u(v_1) = \alpha v_1$ et $u(v_2) = \beta v_2$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

- Pour des raisons de trace ($\text{tr}(T) = \text{tr}(A) = \alpha + 2\beta$), on a nécessairement :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

On a bien trigonalisé A , puisque T est semblable à A et que T est triangulaire.

Méthode (Choix optimal de v_3)

On peut en fait trigonaliser "mieux que ça" et montrer que A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Pour cela, il suffit de choisir v_3 tel que

$$u(v_3) = v_2 + \beta v_3,$$

plutôt que de compléter (v_1, v_2) "au hasard", et la théorie assure que c'est toujours possible dans ce cas.

b) Trigonalisation avec une valeur propre triple

La situation est plus complexe.

On suppose que $\chi_u(X) = (X - \alpha)^3$ avec $\dim(E_\alpha(u)) \in \{1; 2\}$.

Méthode

- Si $\dim(E_\alpha(u)) = 2$, alors la situation est similaire au cas a) : on ne dispose que de **deux** vecteurs propres libres (v_1, v_2) .

On montre que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, en construisant une base (v_1, v_2, v_3) telle

$$\text{que } \begin{cases} u(v_1) = \alpha v_1 \\ u(v_2) = \alpha v_2 \\ u(v_3) = v_2 + \alpha v_3 \end{cases}.$$

- Si $\dim(E_\alpha(u)) = 1$, alors c'est encore plus compliqué : on ne dispose que d'**un seul** vecteur propre v_1 libre (puisque E_α est une droite, tous les vecteurs propres sont colinéaires entre eux).

Cette fois-ci, on montre que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, en construisant une base

$$(v_1, v_2, v_3) \text{ telle que } \begin{cases} u(v_1) = \alpha v_1 \\ u(v_2) = v_1 + \alpha v_2 \\ u(v_3) = v_2 + \alpha v_3 \end{cases}.$$

V Endomorphismes/matrices nilpotents

E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel, avec \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} .

Notation

On rappelle que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre (non commutative dès que $\dim(E) \geq 2$).

Classiquement, on notera la composition des endomorphismes de la façon suivante :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}},$$

avec la convention $u^0 = Id_E$.

Définition 39 (Endomorphisme nilpotent, indice de nilpotence)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Dans ce cas, on appelle **indice de nilpotence de u** le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Définition 40 (Matrice nilpotente, indice de nilpotence)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est **nilpotente** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Dans ce cas, on appelle **indice de nilpotence de A** le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Théorème 41 (Caractérisation en dimension finie des endomorphismes nilpotents)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors, u est nilpotent si et seulement si (u est trigonalisable et $Sp(u) = \{0\}$).

Corollaire 42 (Indice de nilpotence en dimension finie)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est nilpotent, alors son indice de nilpotence est inférieur ou égal à $n = \dim(E)$.

CH09 : Réduction des endomorphismes - Aspects algébriques

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} , E un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul et n un entier naturel non nul.

I Polynômes d'endomorphismes / de matrices

1) Polynômes d'endomorphismes

Notation

Classiquement, on notera la composition des endomorphismes de la façon suivante :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$$

avec la convention $u^0 = Id_E$.

Définition 1 (Valeur d'un polynôme en un endomorphisme)

Soit $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **valeur de P en u** l'endomorphisme :

$$P(u) = \sum_{k=0}^N a_k u^k \in \mathcal{L}(E).$$

Propriété 2 (Morphisme d'algèbres d'évaluation)

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi_u(P) = P(u)$ est un morphisme de \mathbb{K} -algèbres.

Définition 3 (Polynôme en un endomorphisme)

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. On dit que v est un **polynôme en u** s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$.

Notation

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des polynômes en u :

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Propriété 4 (Structure algébrique des polynômes en u)

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre **commutative** de $\mathcal{L}(E)$.

De plus, $\mathbb{K}[u]$ est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u (au sens de l'inclusion).

On dit que $\mathbb{K}[u]$ est l'**algèbre engendrée par u** .

Propriété 5 (Sous-espaces stables)

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u .

On retrouve en particulier que les sous-espaces propres de u (définis par $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda Id_E)$, où $\lambda \in \text{Sp}(u)$) sont stables par u .

2) Polynômes de matrices

Toutes les notions précédentes se transposent comme d'habitude aux matrices carrées.

Définition 6 (Valeur d'un polynôme en une matrice carrée)

Soit $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **valeur de P en M** la matrice carrée :

$$P(M) = \sum_{k=0}^N a_k M^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Propriété 7 (Morphisme d'algèbres d'évaluation matricielle)

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $\varphi_M : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\varphi_M(P) = P(M)$ est un morphisme de \mathbb{K} -algèbres.

Définition 8 (Polynôme en une matrice)

Soit $(A, M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que A est un polynôme en M s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = P(M)$.

Notation

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathbb{K}[M]$ l'ensemble des polynômes en M :

$$\mathbb{K}[M] = \{P(M), P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Propriété 9 (Structure algébrique des polynômes en M)

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[M]$ est une sous-algèbre **commutative** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus, $\mathbb{K}[M]$ est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant M (au sens de l'inclusion).

On dit que $\mathbb{K}[M]$ est l'**algèbre engendrée par M** .

II Polynômes annulateurs, polynôme minimal

1) Définitions et premières propriétés

Définition 10 (Polynôme annulateur d'un endomorphisme, d'une matrice)

On appelle **polynôme annulateur** de $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (resp. $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$).

Propriété 11 (Polynômes annulateurs de deux matrices semblables)

Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possèdent les mêmes polynômes annulateurs.

Propriété 12 (Structure algébrique des polynômes annulateurs)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, l'ensemble des polynômes annulateurs de u est un sous-espace vectoriel et un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Propriété 13 (Polynôme annulateur et valeur propre)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(u(x) = \lambda x \implies P(u)(x) = P(\lambda)x)$.

En particulier, si λ est valeur propre de u , alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

Théorème 14 (Valeurs propres et racines des polynômes annulateurs)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, les valeurs propres de u figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur de u , i.e. $(P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \implies \forall \lambda \in Sp(u), P(\lambda) = 0_{\mathbb{K}})$.

2) Résultats en dimension finie

Dans cette section, on va examiner ce qui se passe lorsque E est de dimension finie.

Théorème 15 (Théorème de Cayley-Hamilton)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Théorème 16 (Existence et unicité du polynôme minimal)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique polynôme $\pi_u \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant :

- (i) π_u est annulateur de u ;
- (ii) π_u est unitaire ;
- (iii) $\forall P \in \mathbb{K}[X], (P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \implies \pi_u \text{ divise } P)$.

Ce polynôme π_u est appelé **polynôme minimal** de l'endomorphisme u .

Propriété 17 (Valeurs propres et polynôme minimal)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Les valeurs propres de u sont exactement les racines dans \mathbb{K} de son polynôme minimal π_u .

3) Puissances d'un endomorphisme

E désigne toujours un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode

On peut calculer les puissances d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (ou d'une matrice carrée A) directement à partir de son polynôme minimal, par division euclidienne.

Plus généralement, on dispose du résultat suivant :

Propriété 18 (Base des polynômes en u)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Si $d = \deg(\pi_u)$, alors la famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. En particulier $\dim(\mathbb{K}[u]) = d \leq n = \dim(E)$.

III Réduction et polynômes annulateurs

1) Lemme des noyaux

Théorème 19 (Lemme de décomposition des noyaux)

Si $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux, alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$\text{Ker} \left(\left(\prod_{k=1}^m P_k \right) (u) \right) = \bigoplus_{k=1}^m \text{Ker}(P_k(u)).$$

Corollaire 20 (Version matricielle du lemme des noyaux)

Si $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux, alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\text{Ker} \left(\left(\prod_{k=1}^m P_k \right) (A) \right) = \bigoplus_{k=1}^m \text{Ker}(P_k(A)).$$

2) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Théorème 21 (CNS de diagonalisabilité)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.

Alors, il y a équivalence entre :

- (i) u est diagonalisable ;
- (ii) Il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples sur \mathbb{K} qui est annulateur de u ;
- (iii) Le polynôme minimal π_u est scindé à racines simples sur \mathbb{K}

Dans ce cas, le polynôme minimal de u est

$$\pi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda).$$

Lemme 22 (Endomorphisme induit par $P(u)$)

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, F est stable par $P(u)$ et $P(u)_F = P(u_F)$.

Propriété 23 (Polynôme minimal d'un endomorphisme induit)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie.

Si F est un sev non nul de E stable par u , alors le polynôme minimal de u_F (l'endomorphisme induit) divise le polynôme minimal de u .

Théorème 24 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie. Si u est diagonalisable et si F est un sev non nul de E stable par u , alors l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable.

Corollaire 25 (Propriétés des sev stables par un endomorphisme diagonalisable)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable (avec E de dimension finie), et soit F un sev de E non nul. Alors F est stable par u si et seulement si F possède une base formée de vecteurs propres de u .

3) Trigonalisabilité et polynômes annulateurs

Dans la suite, on fixe E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Théorème 26 (CNS de trigonalisabilité)

Il y a équivalence entre :

- (i) u est trigonalisable ;
- (ii) Il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur \mathbb{K} qui est annulateur de u ;
- (iii) Le polynôme minimal π_u est scindé sur \mathbb{K} .
- (iv) Le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur \mathbb{K} .

Corollaire 27 (Trigonalisabilité d'un endomorphisme induit)

Si u est trigonalisable et si F est un sev non nul de E stable par u , alors l'endomorphisme induit u_F est trigonalisable.

Le théorème précédent ne dit pas **comment** trigonaliser explicitement. On dispose d'outils plus précis.

Définition 28 (Sous-espaces caractéristiques)

On suppose χ_u scindé sur \mathbb{K} .

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u , de multiplicité $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$, alors on appelle **sous-espace caractéristique de u associé à λ** le sous-espace vectoriel

$$N_\lambda(u) = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{\alpha_\lambda}).$$

Ce sev est stable par u (car de la forme $\text{Ker}(P(u))$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$).

Théorème 29 (Propriétés des sous-espaces caractéristiques)

Avec les notations précédentes, on a

(i) Les sous-espaces caractéristiques sont supplémentaires dans E :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} N_\lambda(u).$$

(ii) Leur dimension est la multiplicité de la valeur propre correspondante :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad \dim(N_\lambda(u)) = \alpha_\lambda.$$

(iii) On peut les voir de deux manières :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad N_\lambda(u) = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{\alpha_\lambda}) = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{\beta_\lambda}),$$

où β_λ est la multiplicité de la racine λ dans le polynôme minimal π_u (alors que α_λ est celle dans le polynôme caractéristique χ_u).

Théorème 30 (Réduction diagonale par blocs)

Si χ_u est scindé sur \mathbb{K} , de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, alors il existe une base de E dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_m \end{pmatrix},$$

chaque bloc diagonal étant de la forme

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * & * \\ 0 & \lambda_i & * & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{K}),$$

où α_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i .

Corollaire 31 (Réduction matricielle diagonale par blocs)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Si χ_A est scindé sur \mathbb{K} alors A est semblable à une matrice diagonale par blocs, où chaque bloc diagonal est de la forme $\lambda I + N$ avec $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et N triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale (donc nilpotente).

CH10 : Suites de fonctions

On considère ici des fonctions $f : A \rightarrow \mathbb{K}$, où A est une partie d'un \mathbb{K} -espace vectoriel normé E de dimension finie, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On rappelle que $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions $A \rightarrow \mathbb{K}$.

On pourra généraliser les définitions et résultats à des fonctions $f : A \rightarrow F$, où F est aussi un \mathbb{K} -evn de dimension finie (voir le chapitre sur les fonctions vectorielles).

I Convergence simple et convergence uniforme

1) Définitions

Définition 1 (Convergence simple d'une suite de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.

On dit que (f_n) **converge simplement** vers f si pour tout $x \in A$, $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ dans \mathbb{K} , c'est-à-dire :

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

On dit alors que f est la **limite simple** de la suite (f_n) et on note $f_n \xrightarrow[CS]{} f$ (ou encore $f_n \xrightarrow[CVS]{} f$).

Définition 2 (Convergence uniforme d'une suite de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.

On dit que (f_n) **converge uniformément** vers f si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

On dit alors que f est la **limite uniforme** de la suite (f_n) et on note $f_n \xrightarrow[CU]{} f$ (ou encore $f_n \xrightarrow[CVU]{} f$).

Propriété 3 (La convergence uniforme entraîne la convergence simple)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.

- (i) Si (f_n) converge uniformément vers f , alors (f_n) converge simplement vers f .
- (ii) Si elle existe, la limite uniforme est unique, et il s'agit de la limite simple.

2) Lien avec la norme infinie

Propriété 4 (Reformulation de la CU avec la norme infinie)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$. Alors, on a équivalence entre :

- (i) $f_n \xrightarrow[CU]{} f$;
- (ii) les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur A à partir d'un certain rang et $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, où l'on note :

$$\|f_n - f\|_{\infty} = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|.$$

Corollaire 5 (Lien avec la convergence dans l'evn $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$)

Notons $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées $A \rightarrow \mathbb{K}$. Alors, pour toute suite $(f_n) \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, la convergence uniforme de (f_n) est exactement la convergence de la suite de vecteurs (f_n) dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\infty})$.

Vocabulaire

C'est pourquoi la norme infinie est souvent appelée **norme uniforme**, ou **norme de la convergence uniforme**.

3) Méthodes

Méthode (Pour montrer la convergence uniforme d'une suite $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K}^{\mathbb{N}})$)

- On identifie la limite simple $f : A \rightarrow \mathbb{K}$, en calculant, pour x fixé dans A , la limite de $f_n(x)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- On montre que $\|f_n - f\|_{\infty} = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, en calculant ce sup (étude de la fonction $|f_n - f|$), ou simplement en le majorant par une suite (u_n) qui tend vers 0.

Méthode (Pour montrer que (f_n) ne converge pas uniformément)

- On identifie la limite simple $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ (si elle n'existe pas, le problème est réglé et il n'y pas CVU).
- On montre que $\|f_n - f\|_{\infty}$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$:
 - soit en le calculant explicitement (étude de la fonction $|f_n - f|$);
 - soit en déterminant une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Puisque $\|f_n - f\|_{\infty} = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|$, cela montre que $\|f_n - f\|_{\infty}$ ne tend pas vers 0.

Notation

Pour toute fonction g , on adoptera la notation plus précise :

$$\|g\|_{\infty, A} = \sup_{x \in A} |g(x)|$$

lorsqu'il y a ambiguïté sur le domaine A étudié.

Vocabulaire

Etant donné $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ et $B \subset A$, on dira que **(f_n) converge uniformément sur B** pour signifier que la suite des restrictions $(f_n|_B) \in \mathcal{F}(B, \mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ converge uniformément.

Bien entendu, si (f_n) converge uniformément vers f sur A , alors par restriction, (f_n) converge uniformément sur toute partie $B \subset A$, puisque

$$\|f_n - f\|_{\infty, B} = \sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_{\infty, A}.$$

II Continuité et double limite

1) Continuité d'une limite uniforme

Théorème 6 (Continuité d'une limite uniforme)

Soit $A \subset E$ (où E est un evn de dimension finie), $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$, et $a \in A$.
Si les f_n sont continues en a , et si (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage V de a relatif à A , alors f est continue en a .

Corollaire 7 (Continuité globale d'une limite uniforme)

Soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Si (f_n) converge uniformément vers f sur A , alors $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$.

Corollaire 8 (Continuité par convergence uniforme locale)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Si (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset I$, alors $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Méthode (Condition suffisante de non convergence uniforme)

Si une suite (f_n) de fonctions continues sur A converge simplement vers une fonction f discontinue, alors il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur A .

C'est le cas par exemple pour la suite $f_n : x \mapsto x^n$, qui converge simplement vers une fonction f discontinue en 1. Cette suite ne converge donc pas uniformément sur $[0, 1]$.

2) Double limite

Dans le paragraphe précédent, on a montré que si $f_n \xrightarrow{CU} f$ au voisinage de a et que les (f_n) sont continues en a , alors f est continue en a , c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a),$$

ou encore :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

On a donc résolu un **problème d'interversion de limites**.

On va ici généraliser ce résultat aux cas suivants :

- a n'est plus nécessairement dans A , mais seulement dans l'adhérence \bar{A} ;
- $a = \pm\infty$ lorsque $A \subset \mathbb{R}$.

Théorème 9 (Théorème de la double limite)

Soit $A \subset E$, où E est un evn de dimension finie. Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ et $a \in \bar{A}$.
On suppose que :

- (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage V de a relatif à A ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_n \in \mathbb{K}$.

Alors, la suite (ℓ_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. En d'autres termes :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Théorème 10 (Théorème de la double limite en $+\infty$)

Soit I un intervalle non majoré de \mathbb{R} . Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
On suppose que :

- (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire sur un intervalle du type $[R, +\infty[$);
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell_n \in \mathbb{K}$.

Alors, la suite (ℓ_n) converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. En d'autres termes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right).$$

III Intégration et dérivation d'une limite de fonctions

1) Intégration d'une limite

Propriété 11 (Convergence uniforme des primitives)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

Si (f_n) converge uniformément vers $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ sur tout segment de I , alors pour tout $a \in I$, la suite de fonctions (F_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$$

converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

On déduit de ce résultat le théorème suivant :

Théorème 12 (Interversion limite/intégrale sur un segment)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{K} qui converge uniformément vers $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. Alors f est continue et

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

2) Dérivation d'une limite

Etant donnée une suite de fonctions dérivables (f_n) , on veut savoir si sa limite f (simple et/ou uniforme) est toujours dérivable, et si on a $f' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$.

La réponse est **non, même si (f_n) converge uniformément**, comme le montre l'exemple suivant :
On dispose quand même du théorème suivant :

Théorème 13 (Dérivation d'une limite de fonctions)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
- (ii) La suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$.
- (iii) La suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{K}$;

Alors, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I , f est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $f' = g$. Autrement dit, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n = f' = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)'$$

Corollaire 14 (Dérivation d'une limite, version \mathcal{C}^k)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^k sur I .
- (ii) Pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, la suite $(f_n^{(i)})$ converge simplement vers une fonction $g_i : I \rightarrow \mathbb{K}$.
- (iii) La suite des dérivées k -ièmes $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g_k : I \rightarrow \mathbb{K}$;

Alors, la fonction $f = g_0$ est de classe \mathcal{C}^k sur I , et pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, $f^{(i)} = g_i$. De plus, les suites $(f_n^{(i)})$ convergent uniformément sur tout segment de I .

IV Approximation uniforme sur un segment

1) Approximation par des fonctions en escalier

On rappelle les définitions suivantes (vues dans le cours de MP2I) :

Définition 15 (Fonction en escalier, fonctions continue par morceaux)

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} , avec $a < b$.

- (i) On dit qu'une fonction $e : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est **en escalier** lorsqu'il existe une subdivision de $[a, b]$ notée $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ telle que pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, la restriction $e|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est constante.
- (ii) On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est **continue par morceaux** lorsqu'il existe une subdivision de $[a, b]$ notée $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ telle que pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, la restriction $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ possède un prolongement continu sur $[x_i, x_{i+1}]$ (ce qui revient à dire que f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et possède une limite finie à droite en x_i et à gauche en x_{i+1}).

Notation

On notera $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans \mathbb{K} .

On notera $\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans \mathbb{K} .

On notera $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées de $[a, b]$ dans \mathbb{K} .

Rappelons sans démonstration le résultat suivant, vu en MP2I :

Propriété 16 (Espaces vectoriels des fonctions en escalier, continues par morceaux)

L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$, qui est lui-même un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$:

$$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{B}([a, b], \mathbb{K}).$$

On a aussi $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$.

Théorème 17 (Approximation par des fonctions en escalier)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Alors il existe une suite de fonctions en escalier (e_n) qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Corollaire 18 (Densité des fcts. en escalier dans les fcts. continues par morceaux)

Le sev $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

2) Approximation par des polynômes

Théorème 19 (Théorème d'approximation de Weierstrass)

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Alors il existe une suite de fonctions polynomiales (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Corollaire 20 (Densité des fonctions polynomiales dans les fonctions continues)

Le sev $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$ formé des fonctions polynomiales est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

CH11 : Séries de fonctions

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

On considère des fonctions f définies sur une partie A d'un \mathbb{K} -espace vectoriel normé E de dimension finie, et à valeurs dans \mathbb{K} .

On rappelle que $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ désigne le \mathbb{K} -espace vectoriel des fonctions $A \rightarrow \mathbb{K}$.

Vu qu'une série est un cas particulier de suite, tous les résultats de ce chapitre découlent directement du chapitre "Suites de fonctions". Et tout comme dans ce chapitre, on pourra généraliser les définitions et résultats à des fonctions $f : A \rightarrow F$, où F est aussi un \mathbb{K} -evn de dimension finie.

Pour une fonction bornée $f : A \rightarrow \mathbb{K}$, on rappelle la notation :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

("norme infinie" de f , appelée aussi "norme de la convergence uniforme").

I Différents types de convergence

Définition 1 (Série de fonctions)

Etant donnée une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, on appelle **série de fonctions de terme général f_n** la suite de fonctions $(S_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n f_k.$$

Cette série de fonctions est notée $\sum f_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelée la **somme partielle de rang n** .

Notation

Tout comme pour les séries numériques, les séries de fonctions pourront se noter $\sum_{n \geq 0} f_n$, ou plus simplement $\sum f_n$ (de toute façon, le rang à partir duquel une série est définie n'a pas d'importance pour définir la notion de convergence).

Définition 2 (Convergence simple, convergence uniforme)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Avec les notations précédentes :

- (i) On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement** lorsque la suite de fonctions (S_n) converge simplement, c'est-à-dire lorsqu'il existe une fonction $S : A \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in A$, $S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S(x)$.

Cela revient à dire que pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

- (ii) On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** lorsque la suite de fonctions (S_n) converge uniformément, c'est-à-dire lorsqu'il existe une fonction $S : A \rightarrow \mathbb{K}$ telle que les $S_n - S$ sont bornées sur A à partir d'un certain rang et que $\|S_n - S\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Notation

En cas de convergence simple, la **somme** de la série de fonctions $\sum f_k$ est la fonction $S : A \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in A, \quad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x),$$

et on peut définir la **suite des restes** comme la suite de fonctions (R_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \quad R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

Propriété 3 (La convergence uniforme entraîne la convergence simple)

Si $\sum f_n$ converge uniformément vers S , alors $\sum f_n$ converge simplement vers S .

Propriété 4 (Lien entre CVU et reste)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Alors, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite des restes (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

Définition 5 (Convergence normale)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** lorsque les f_n sont bornées sur A et la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty}$ converge.

Méthode (Pour étudier la convergence normale d'une série de fonctions)

Etablir la convergence normale d'une série de fonctions revient donc à trouver une suite (u_n) **indépendante de x** telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, |f_n(x)| \leq u_n$ et la série numérique $\sum u_n$ converge.

Théorème 6 (Lien entre les différentes convergences)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

- (i) Si $\sum f_n$ converge normalement, alors pour tout $x \in A$, $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc $\sum f_n$ converge simplement.
- (ii) Si $\sum f_n$ converge normalement, alors $\sum f_n$ converge uniformément.

Méthode (Pour étudier la convergence d'une série de fonctions)

1. On étudie la convergence simple.
2. On étudie la convergence normale (afin d'obtenir la convergence uniforme).
3. Si la série ne converge pas normalement, on essaye de montrer "à la main" la convergence uniforme, en majorant le reste uniformément, c'est-à-dire en trouvant une suite $a_n \rightarrow 0$ **indépendante de x** telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, |R_n(x)| \leq a_n$.

II Continuité et double limite

Théorème 7 (Continuité d'une série de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et soit $a \in A$. On suppose que :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a .
- (ii) La série $\sum f_n$ converge uniformément sur un voisinage V de a (relatif à A).

Alors, la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue en a .

On en déduit directement, comme dans le CH.10, des résultats sur la continuité globale (sur tout A) d'une série de fonctions :

Corollaire 8 (Continuité globale d'une série de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

Si les f_n sont continues sur A et si $\sum f_n$ converge uniformément sur A , alors la fonction somme

$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur A .

Corollaire 9 (Continuité par convergence uniforme locale)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} .

Si les f_n sont continues sur I et si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $J \subset I$, alors la

fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur I .

Théorème 10 (Théorème de la double limite pour les séries de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $a \in \bar{A}$. On suppose que :

- (i) La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur un voisinage V de a (relatif à A).
- (ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_n \in \mathbb{K}$.

Alors, la série numérique $\sum \ell_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, et on a $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. En d'autres termes :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

III Intégration et dérivation

Propriété 11 (Convergence uniforme d'une série de primitives)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} . On suppose que :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I .
- (ii) La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $S : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Pour tout $a \in I$, on note $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$. Alors, la série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément vers $T : x \mapsto \int_a^x S(t) dt$ sur tout segment de I .

Théorème 12 (Théorème d'intégration terme à terme sur un segment)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues $[a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors sa somme est continue, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt.$$

Théorème 13 (Dérivation terme à terme d'une série de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} . On suppose que :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.
- (ii) La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $S : I \rightarrow \mathbb{K}$ sur I .
- (iii) La série des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $T : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I , la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $S' = T$. Autrement dit, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n.$$

Grâce au théorème de dérivation terme à terme, nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant, déjà rencontré :

Théorème 14 (Série exponentielle réelle)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Terminons avec la "version \mathcal{C}^k " du théorème de dérivation terme à terme, qui en découle directement :

Corollaire 15 (Dérivation terme à terme version \mathcal{C}^k)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , et soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$.
- (ii) Pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, la série $\sum_{n \geq 0} f_n^{(i)}$ converge simplement vers une fonction $S_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ sur I .
- (iii) La série $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $S_k : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Alors, la fonction somme $S = S_0$ est de classe \mathcal{C}^k sur I , et pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, $S^{(i)} = S_i$, c'est-à-dire

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}.$$

De plus, les séries $\sum_{n \geq 0} f_n^{(i)}$ convergent uniformément sur tout segment de I pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$.

IV Exemple d'étude de fonction définie par une série

On veut étudier la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Montrer que S est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Etudier la dérivabilité de S .
3. Etudier les variations de S .
4. Déterminer les limites de S aux bornes de son ensemble de définition.
5. En étudiant $S(x) + S(x+1)$, déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Solution : notons $S = \sum_{n \geq 1} f_n$, avec $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Pour tout réel $x > 0$, la suite $n \mapsto a_n(x) = \frac{1}{x+n}$ décroît et converge vers 0, donc la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n(x)$ converge (par le CSSA).
Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, donc $S :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie.
2. Les f_n sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, de dérivée $f_n' : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. De plus, la série $\sum_{n \geq 0} f_n'$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ puisqu'elle converge simplement (par le CSSA), et ses restes vérifient

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]0, +\infty[, \quad |R_n^{(1)}(x)| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2},$$

donc $(R_n^{(1)})$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, le théorème de dérivation terme à terme s'applique, et on obtient que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, donc dérivable.

3. L'application du théorème de dérivation terme à terme a également montré que

$$\forall x > 0, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} + \dots,$$

et (toujours par le CSSA), cette série est du signe de son premier terme, donc $S'(x) < 0$ pour tout $x > 0$, ce qui montre que S est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

4. La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ car ses restes vérifient (toujours par le CSSA) :

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$

donc (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.

On peut donc appliquer le théorème de la double limite en 0^+ et en $+\infty$.

En $+\infty$, on a $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$.

En 0^+ , il y a un problème avec la fonction $f_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$, qui n'a pas de limite finie en 0^+ . On la sépare du reste : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1)^n}{n}$, donc par le théorème de la double limite :

$$S(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{R},$$

ce qui montre que $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

5. Par télescopage :

$$\forall x > 0, \quad S(x) + S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+n} = \frac{1}{x}.$$

Par décroissance de S , on a donc

$$2S(x+1) \leq \frac{1}{x} = S(x) + S(x+1) \leq 2S(x),$$

et donc

$$\forall x > 1, \quad \frac{1}{2x} \leq S(x) \leq \frac{1}{2(x-1)},$$

ce qui prouve finalement que $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

CH12 : Interversion limite-intégrale

Comme d'habitude, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Nous allons ici donner des théorèmes généraux (admis), qui permettent de traiter les problèmes d'interversion limite/intégrale et série/intégrale, dans le cadre plus général des intégrales de fonctions continues par morceaux **sur un intervalle quelconque**.

Dans la suite, I désigne un intervalle quelconque de \mathbb{R} .

I Convergence dominée

Théorème 1 (Théorème de convergence dominée)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux $I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que

- (i) la suite (f_n) converge simplement sur I vers $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.
- (ii) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ positive et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$ (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$).

Alors, les f_n et f sont intégrables sur I , et

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

Vocabulaire

On dit que la fonction φ est une **majorante intégrable** des f_n .

Elle ne dépend que de la variable d'intégration t , et pas du paramètre n .

II Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

Etant donné une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$, on cherche à savoir dans quels cas on a :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right).$$

(on parle alors **d'intégration terme à terme** de la série de fonctions $\sum f_n$).

Les deux théorèmes suivants donnent des conditions suffisantes d'intégration terme à terme sur un intervalle I quelconque.

Mais à la différence du théorème d'intégration terme à terme sur un segment (cf. CH.11), qui se déduisait du théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment (cf. CH.10), ces deux théorèmes ne se déduisent pas directement du théorème de convergence dominée, ils utilisent d'autres résultats issus de la *théorie de la mesure*, non étudiée en CPGE.

Théorème 2 (Théorème d'intégration terme à terme, cas positif)

Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables de I dans \mathbb{R} , à valeurs positives.

On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux sur I . Alors on a **dans** $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right).$$

En particulier :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in L^1(I, \mathbb{R}) \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right) < +\infty.$$

Théorème 3 (Théorème d'intégration terme à terme, cas général)

Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables de I dans \mathbb{K} . On suppose que

- (i) la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux sur I ;
- (ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I |f_n| \right) < +\infty$.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et on a dans \mathbb{K} :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right)$$

III Intégrales à paramètres

Dans ce dernier paragraphe, on se propose d'étudier des expressions de la forme :

$$g(x) = \int_I f(x, t) dt,$$

avec $x \in A$ (A étant un intervalle de \mathbb{R} ou une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie) appelées **intégrales à paramètre**.

La fonction $x \mapsto g(x)$ est bien définie sur A dès que pour tout $x \in A$, l'intégrale $\int_I f(x, t) dt$ converge, mais en pratique (pour étudier les limites, la continuité ou la dérivabilité d'une telle fonction g), nous allons avoir besoin que pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ soit **intégrable** sur I (c'est-à-dire $\int_I |f(x, t)| dt < +\infty$.)

Les théorèmes présentés dans cette section se déduisent tous du théorème de convergence dominée.

1) Passage à la limite dans une intégrale à paramètre

Théorème 4 (Version continue du théorème de convergence dominée)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie, soit $A \subset E$, soit $a \in \bar{A}$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- (i) $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (ii) $\forall t \in I, f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$, avec $\ell : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux ;
- (iii) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ positive et intégrable sur I telle que $\forall (x, t) \in A \times I$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est bien définie sur A , ℓ est intégrable sur I et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt$.

2) Continuité

Théorème 5 (Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie, soit $A \subset E$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- (i) $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (ii) $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ;
- (iii) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et positive telle que $\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

Corollaire 6 (Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, version locale)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie, soit $A \subset E$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- (i) $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (ii) $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ;
- (iii) pour tout $a \in A$, il existe un voisinage V de a (relatif à A) et une fonction $\varphi_V : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et positive telle que $\forall (x, t) \in V \times I, |f(x, t)| \leq \varphi_V(t)$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

3) Dérivation

Dans ce dernier paragraphe, I et A désignent des intervalles de \mathbb{R} , avec A d'intérieur non vide.

On souhaite calculer $g'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_I f(x,t) dt \right)$.

Notation

Soit une fonction $f : \begin{cases} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{cases}$. On fixe $t \in I$.

Si $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur A , alors on note $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{d}{dx}(f(x,t))$.

Cela définit une fonction de deux variables :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{cases} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{cases},$$

appelée **dérivée partielle de f par rapport à x** .

Théorème 7 (Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre)

Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- (i) $\forall x \in A, t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- (ii) $\forall t \in I, x \mapsto f(x,t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A .
- (iii) $\forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (iv) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et positive telle que $\forall (x,t) \in A \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varphi(t)$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x,t) dt$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur A , avec

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt.$$

Lorsqu'on ne parvient pas à majorer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur tout $A \times I$ par une fonction intégrable, on peut se contenter d'une domination **sur tout segment de A** :

Corollaire 8 (Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, version locale)

Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- (i) $\forall x \in A, t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- (ii) $\forall t \in I, x \mapsto f(x,t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A ;
- (iii) $\forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (iv) pour tout segment $[a,b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et positive telle que $\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t)$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x,t) dt$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur A , avec

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt.$$

Terminons en donnant une version itérée du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

Notation

Soit une fonction $f : \begin{cases} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{cases}$. On fixe $t \in I$ et $j \in \mathbb{N}$.

Si $x \mapsto f(x,t)$ est j -fois dérivable sur A , alors on note $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) = \frac{d^j}{dx^j}(f(x,t))$.

Cela définit une fonction de deux variables :

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^j} : \begin{cases} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \end{cases},$$

appelée **dérivée partielle j^e de f par rapport à x** .

Corollaire 9 (Théorème de dérivation C^k d'une intégrale à paramètre)

Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- (i) $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^k sur A ;
- (ii) $\forall j \in \{0, \dots, k-1\}, \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- (iii) $\forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (iv) pour tout segment $[a, b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et positive telle que $\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t)$.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et de classe C^k sur A , avec

$$\forall j \in \{0, \dots, k\}, \quad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt.$$