

CH13 : Réduction des endomorphismes - Aspects euclidiens

Dans ce chapitre, E désigne un **espace euclidien**, c'est-à-dire un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. On supposera E non nul.

I Adjoint d'un endomorphisme

Théorème 1 (Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien)

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, f(x) = (a|x).$$

Théorème 2 (Existence et unicité de l'adjoint d'un endomorphisme)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u^*(y)).$$

On dit que u^* est l'**adjoint** de u .

Propriété 3 (Propriétés de l'adjoint)

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

- (i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda Id_E)^* = \lambda Id_E$.
- (ii) L'application $u \mapsto u^*$ est linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.
- (iii) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$;
- (iv) $(u^*)^* = u$;
- (v) On a $u \in GL(E) \iff u^* \in GL(E)$ et dans ce cas, $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

Théorème 4 (Matrice de l'adjoint en base orthonormée)

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E , et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = Mat_{\mathcal{B}}(u)^{\top}$.

Théorème 5 (Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Alors F^{\perp} est stable par u^* .

II Réduction des isométries vectorielles

1) Quelques propriétés supplémentaires des isométries

Propriété 6 (Caractérisation des isométries avec l'adjoint)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $(u \in \mathcal{O}(E) \iff u \in GL(E) \text{ et } u^* = u^{-1})$.

Propriété 7 (Valeurs propres d'une isométrie / d'une matrice orthogonale)

- (i) Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $Sp(u) \subset \{-1, 1\}$.
- (ii) Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$.

2) Isométries et sous-espaces stables

Propriété 8 (Orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie)

Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E . Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Si F est stable par u , alors F^\perp est également stable par u . De plus, les endomorphismes induits u_F et u_{F^\perp} sont aussi des isométries vectorielles ($u_F \in \mathcal{O}(F)$ et $u_{F^\perp} \in \mathcal{O}(F^\perp)$).

Lemme 9 (Existence d'une droite ou un plan stable)

Soit E un \mathbb{R} -ev non nul de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, il existe au moins une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable par u .

3) Réduction diagonale par blocs

Théorème 10 (Réduction des isométries en base orthonormée)

Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, avec blocs diagonaux de la forme

$$(1), \quad (-1), \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \theta \neq 0 [\pi].$$

Autrement dit, E est la somme directe orthogonale de $E_1(u)$, $E_{-1}(u)$, et de plans stables sur lesquels u opère comme une rotation différente de $\pm Id_E$.

4) Réduction des isométries positives en dimension 3

On rappelle que $\mathcal{SO}(E)$ désigne l'ensemble des isométries positives de E , c'est-à-dire les $u \in \mathcal{O}(E)$ telles que $\det(u) = 1$.

Théorème 11 (Forme réduite d'une isométrie positive en dim 3)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit $u \in \mathcal{SO}(E)$.

(i) Il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E et un réel θ tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(ii) Dans toute base orthonormée directe de E qui commence par \vec{i} , la matrice de u est la même (θ est unique à 2π près dès que \vec{i} est construit).

Définition 12 (Rotation dans l'espace)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, soit un vecteur unitaire \vec{i} , et soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Alors, on appelle **rotation d'axe orienté par \vec{i} et d'angle θ** l'unique endomorphisme $r_{\vec{i}, \theta}$ qui

a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ dans toute base orthonormée directe de E commençant par \vec{i} .

Parmi ces rotations, signalons un cas particulier intéressant :

Définition 13 (Demi-tour)

Soit \mathcal{D} une droite vectorielle de E . On appelle **demi-tour d'axe \mathcal{D}** (ou "retournement d'axe \mathcal{D} ") la rotation d'axe \mathcal{D} et d'angle π .

III Réduction des endomorphismes auto-adjoints

1) Définition et propriétés

Définition 14 (Endomorphisme auto-adjoint)

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **auto-adjoint** lorsque $u^* = u$, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (u(x)|y) = (x|u(y)).$$

Propriété 15 (Matrice d'un auto-adjoint en base orthonormée)

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E , et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors, u est auto-adjoint si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Vocabulaire

Conformément au résultat précédent, les endomorphismes auto-adjoints sont également appelés **endomorphismes symétriques**, mais on évitera cette appellation pour ne pas confondre avec les symétries ($u \circ u = \text{Id}_E$)!

Notation

On notera $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E .

Propriété 16 (Structure algébrique de $\mathcal{S}(E)$)

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, isomorphe à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (l'espace vectoriel des matrices réelles symétriques), où $n = \dim(E)$. En particulier, $\dim(\mathcal{S}(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Propriété 17 (Orthogonal d'un sous-espace stable par un auto-adjoint)

Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E . Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Si F est stable par u , alors F^\perp est également stable par u . De plus, les endomorphismes induits u_F et u_{F^\perp} sont également auto-adjoints ($u_F \in \mathcal{S}(F)$ et $u_{F^\perp} \in \mathcal{S}(F^\perp)$).

Propriété 18 (Projecteurs auto-adjoints)

Parmi les projecteurs de E , les projecteurs auto-adjoints sont exactement les projecteurs orthogonaux.

2) Réduction des auto-adjoints, théorème spectral

Nous allons montrer la propriété qui caractérise les auto-adjoints : le fait d'être diagonalisable en base orthonormée. La preuve repose sur deux lemmes, ainsi que sur l'existence d'une droite ou d'un plan stable pour un endomorphisme, déjà montrée auparavant.

Lemme 19 (Existence d'une valeur propre pour un auto-adjoint)

Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors u possède au moins une valeur propre (réelle).

Lemme 20 (Sous-espaces propres d'un auto-adjoint)

Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 21 (Théorème spectral)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors : u est auto-adjoint si et seulement si u est diagonalisable en base orthonormée. En d'autres termes : $u \in \mathcal{S}(E)$ ssi E est somme directe **orthogonale** des sous-espaces propres de u .

Vocabulaire

On parle dans ce cas d'endomorphisme "orthogonalement diagonalisable".

Corollaire 22 (Théorème spectral matriciel)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors : A est symétrique si et seulement si A est orthogonalement diagonalisable. En d'autres termes : $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \iff \exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Méthode (Pour diagonaliser une matrice symétrique dans une base orthonormée)

- Calculer une base de chaque sous-espace propre.
- Appliquer le procédé de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée de chaque sous-espace propre.
- Réunir toutes ces bases : on obtient une base orthonormée de \mathbb{R}^n qui diagonalise la matrice car les sous-espaces propres sont orthogonaux entre eux.

3) Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis positifs**Définition 23 (Endomorphisme auto-adjoint positif, défini positif)**

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

- (i) On dit que u est **positif** lorsque $\forall x \in E, (u(x)|x) \geq 0$.
- (ii) On dit que u est **défini positif** lorsque u est positif et $((u(x)|x) = 0 \implies x = 0_E)$.

Notation

On notera $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs (resp. définis positifs) de E .

On va maintenant étendre cette notion de positivité aux matrices symétriques (qui sont les représentations en base orthonormée des auto-adjoints). Comme d'habitude, on identifie les matrices colonnes aux vecteurs de \mathbb{R}^n .

Définition 24 (Matrice symétrique positive, définie positive)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

- (i) On dit que A est **positive** lorsque $\forall X \in \mathbb{R}^n, X^\top AX \geq 0$.
- (ii) On dit que A est **définie positive** lorsqu'elle est positive et $(X^\top AX = 0 \implies X = 0)$.

Notation

On notera $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété 25 (Correspondance entre endomorphismes et matrices positifs)

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors :

- (i) $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$;
- (ii) $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 26 (Caractérisation spectrale des auto-adjoints positifs et définis positifs)

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. On a les équivalences :

- (i) $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$;
- (ii) $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Et de même pour les matrices symétriques :

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+, \quad A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}.$$

CH14 : Séries entières

I Généralités

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On rappelle que l'ensemble des suites (a_n) indexées par \mathbb{N} et à valeurs dans \mathbb{K} se note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1) Définition d'une série entière

Définition 1 (Série entière de la variable complexe)

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est appelée **série entière de la variable z** .

Définition 2 (Domaine de cv., fonction somme d'une série entière)

Etant donnée une série entière $\sum a_n z^n$:

(i) L'ensemble $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que la série } \sum a_n z^n \text{ converge}\}$ est appelé le **domaine de convergence de la série entière**.

(ii) La **fonction somme** est la fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

2) Etude d'exemples

3) Rayon de convergence

On étudie maintenant le cas général. On va mettre en évidence une propriété géométrique importante des séries entières : l'existence d'un "rayon de convergence" et d'un "disque ouvert de convergence".

Lemme 3 (Lemme d'Abel)

Soit $r > 0$ tel que la suite complexe $(a_n r^n)$ est bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|z| < r \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument.}$$

Lemme 4 (Intervalle de bornage)

L'ensemble $I = \{r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ est un intervalle de \mathbb{R} ayant pour plus petit élément 0.

Ces deux lemmes nous permettent alors de définir le "rayon de convergence" :

Définition 5 (Rayon de convergence d'une série entière)

On considère une série entière $\sum a_n z^n$. On pose :

$$R = \sup(I) = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, \text{ la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$$

(avec la convention $R = +\infty$ si l'intervalle de bornage I n'est pas majoré).

Cet élément $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est appelé le **rayon de convergence** de $\sum a_n z^n$.

Théorème 6 (Propriétés fondamentales du rayon de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

(i) Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} |z| < R \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \\ |z| > R \implies \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement} \end{cases} .$$

De plus, R est le seul élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant cette propriété.

(ii) Enfin, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{\mathcal{D}(O, r)}$ avec $0 \leq r < R$.

Définition 7 (Disque ouvert de convergence, cercle d'incertitude)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$ (non nul et fini). On appelle :

- **disque ouvert de convergence** le disque ouvert de centre O et de rayon R , c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{D}(O, R) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$.
- **cercle d'incertitude** le cercle de centre O et de rayon R , c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{C}(O, R) := \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$.

4) Détermination pratique du rayon de convergence

On donne ici plusieurs techniques pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière.

a) Tests de valeurs

Méthode (Détermination de R par des tests de valeurs)

Cette méthode est basée sur l'utilisation de la propriété fondamentale du rayon (prop. 6) : pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{cases} |z_0| < R \implies \sum |a_n||z_0|^n \text{ converge} \implies \sum a_n z_0^n \text{ converge} \\ |z_0| > R \implies \sum a_n z_0^n \text{ diverge grossièrement} \implies \sum a_n z_0^n \text{ diverge} \end{cases},$$

donc on en déduit facilement :

- $\sum a_n z_0^n \text{ diverge} \implies R \leq |z_0|$;
- $\sum |a_n||z_0|^n \text{ diverge} \implies R \leq |z_0|$;
- $\sum a_n z_0^n \text{ converge} \implies R \geq |z_0|$;
- $\sum |a_n||z_0|^n \text{ converge} \implies R \geq |z_0|$;
- $\sum a_n z_0^n \text{ diverge non grossièrement} \implies R = |z_0|$;
- $\sum a_n z_0^n \text{ est semi-convergente} \implies R = |z_0|$.

b) Par comparaison

Propriété 8 (Comparaison des rayons de convergence)

Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs $R_a, R_b \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, ou si $a_n = O(b_n)$, ou encore si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.

c) Par équivalence

Propriété 9 (Séries entières à coefficients de module équivalents)

Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs $R_a, R_b \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Si $|a_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

d) Utilisation du critère de d'Alembert

Méthode (Détermination de R avec le critère de d'Alembert)

Pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ à l'aide du critère de d'Alembert, on n'applique pas le critère de d'Alembert à la suite $a_n z^n$ (elle n'est pas strictement positive!), mais plutôt à la suite $u_n = |a_n z^n|$ (si $a_n \neq 0$).

Une rédaction très détaillée est attendue aux concours.

- On fixe $z \in \mathbb{C}^*$ et on pose $u_n =$ le module du terme général de la série.
On vérifie que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
- On calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ (si elle existe). Plusieurs cas possibles :
 - * si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente et donc $R = +\infty$;
 - * si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente et donc $R = 0$;
 - * si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ dépend de $|z|$, alors, en cherchant les valeurs de z pour lesquelles $\ell < 1$, on trouve des conditions sur z pour savoir si la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ou grossièrement divergente et on en déduit donc le rayon de convergence (toujours d'après la propriété fondamentale du rayon de convergence).

Si aucune de ces méthodes ne fonctionne, on peut toujours revenir à la définition du rayon de convergence : on cherche les $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée, on obtient un intervalle I , et on a $R = \sup(I)$.

5) Opérations algébriques sur les séries entières

Propriété 10 (Somme de deux séries entières)

Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs $R_a, R_b \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Alors :

- (i) La série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$, et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n;$$

- (ii) Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.

Propriété 11 (Multiplication par n^α)

Pour toute suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} n^\alpha a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Définition 12 (Produit de Cauchy de deux séries entières)

On appelle **produit de Cauchy** des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$, avec

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Propriété 13 (Convergence du produit de Cauchy)

Si R_a et R_b sont les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, alors le rayon de convergence de la série entière produit $\sum c_n z^n$ vérifie

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

II Propriétés de la somme d'une série entière

1) Continuité

Théorème 14 (Continuité de la somme d'une série entière)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Alors la fonction somme $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence $\mathcal{D}(O, R)$.

2) Restriction à l'axe réel

A partir de maintenant, on va se limiter à des séries entières de la variable réelle.

Définition 15 (Intervalle ouvert de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. L'intervalle $] -R, R[$ est appelé **intervalle ouvert de convergence**.

Définition 16 (Domaine réel de convergence)

Soit une série entière $\sum a_n z^n$. On appelle **domaine réel de convergence** de cette série entière l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sum a_n x^n$ converge. Ce domaine est un intervalle I vérifiant

$$]-R, R[\subset I \subset [-R, R],$$

où R est le rayon de convergence.

Théorème 17 (Continuité sur l'intervalle ouvert de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $] -R; R[$.

Lorsqu'on ne dispose pas de la convergence uniforme au voisinage de R (ou de $-R$), on dispose tout de même du théorème suivant :

Théorème 18 (Théorème d'Abel radial)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

En d'autres termes, la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue en R .

Corollaire 19 (Continuité sur le domaine réel de convergence)

Avec les notations précédentes, la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est donc continue sur tout son domaine réel de convergence.

3) Intégration terme à terme

Définition 20 (Série entière primitive)

On appelle **série entière primitive** de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$.

Propriété 21 (Rayon de convergence de la série entière primitive)

Les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ ont le même rayon de convergence.

Théorème 22 (Intégration terme à terme d'une série entière)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors :

$$\forall x \in]-R; R[, \quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

En d'autres termes, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est la primitive nulle en 0 de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $] -R, R[$.

4) Dérivation terme à terme**Définition 23 (Série entière dérivée)**

On appelle série entière dérivée de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$.

Propriété 24 (Rayon de convergence d'une série dérivée)

Les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

Théorème 25 (Dérivation terme à terme d'une série entière)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R \neq 0$.

Alors, la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -R, R[$ et

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Corollaire 26 (Dérivation itérée terme à terme)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors

(i) la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$;

(ii) pour tout $x \in]-R, R[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^k}{dx^k} (a_n x^n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

5) Expression des coefficients**Théorème 27 (Expression des coefficients d'une série entière)**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R \neq 0$.

On note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{C}^\infty(]-R, R[, \mathbb{K})$ la fonction somme.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Corollaire 28 (Unicité des coefficients d'une série entière)

S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0, \alpha[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

III Fonctions développables en série entière

Dans cette section, I désigne un intervalle de \mathbb{R} qui est voisinage de 0.

1) Généralités

Définition 29 (Fonction développable en série entière sur un intervalle)

Une fonction f de la variable réelle est dite **développable en série entière sur** $] -r, r[$ s'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in] -r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

(avec convergence de la série).

De même, on dit qu'une fonction f de la variable complexe est **développable en série entière sur le disque ouvert $\mathcal{D}(0, r)$** s'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall z \in \mathcal{D}(0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

(avec convergence de la série).

Définition 30 (Fonction développable en série entière en 0)

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est **développable en série entière en 0** s'il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $] -r, r[$.

Notation

On abrège souvent « développable en série entière » (et aussi « développement en série entière ») par « DSE ».

Théorème 31 (Propriétés d'une fonction développable en série entière)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction DSE sur $] -r, r[$. Alors :

- (i) f est de classe C^∞ sur $] -r, r[$;
- (ii) Le développement en série entière de f est unique : il s'agit de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \forall x \in] -r, r[.$$

Définition 32 (Série de Taylor en 0)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe C^∞ . On appelle **série de Taylor** de f en 0 la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Propriété 33 (Cas d'une fonction paire ou impaire)

Soit f une fonction DSE sur $] -r, r[$:

$$\forall x \in] -r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- (i) Si f est paire, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$, donc $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$.

- (ii) Si f est impaire, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = 0$, donc $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$.

2) Développements en série entière usuels

On peut légitimement se demander si les fonctions « usuelles » (exp, cos, sin, ...) sont développables en série entière. En général, la réponse est « oui », mais le développement en série entière n'est pas nécessairement valable sur tout l'ensemble de définition de la fonction (par exemple, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est définie sur \mathbb{R} mais son développement en série entière n'est valable que sur $] -1; 1[$).

a) Famille de la série géométrique

Théorème 34 (DSE issus de la série géométrique)

Pour tout $x \in] -1; 1[$, on a :

$$(i) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

$$(ii) \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$(iii) \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

Et ceci reste valable en $x = 1$.

$$(iv) -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \dots$$

Et ceci reste valable en $x = -1$.

$$(v) \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$$

$$(vi) \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots$$

Et ceci reste valable en $x = 1$ et $x = -1$.

Toutes ces séries entières ont pour rayon de convergence $R = 1$.

Méthode

Cette démonstration illustre des méthodes classiques utilisées pour calculer le développement en série entière d'une fonction donnée :

- Intégrer ou dériver terme à terme un développement en série entière usuel.
- Changer de variable dans un développement en série entière usuel.

b) Famille de l'exponentielle

Théorème 35 (DSE issus de la fonction exponentielle)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(i) \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$(ii) \quad \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

$$(iii) \quad \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

$$(iv) \quad e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$(v) \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

$$(vi) \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

Toutes ces séries entières ont pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Méthode

Cette démonstration illustre encore une des méthodes existantes pour montrer qu'une fonction f de classe C^∞ au voisinage de 0 est développable en série entière. On peut procéder ainsi :

- Calculer sa série de Taylor $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ (en calculant les dérivées $k^{\text{ième}}$ de f par récurrence).

Rappelons que c'est le seul développement en série entière possible.

- Montrer que pour x fixé dans un certain intervalle, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$.

Pour cela, à x fixé, on majore l'écart $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right|$ par $\varepsilon_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On peut, par exemple, utiliser la **formule de Taylor avec reste intégral**.

c) Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ **Théorème 36 (DSE de $(1+x)^\alpha$)**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in]-1; 1[$, on a

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \end{aligned}$$

Le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ (dans ce cas, on a simplement la formule du binôme).

Méthode

Cette démonstration donne encore une nouvelle méthode pour montrer qu'une fonction donnée est développable en série entière : l'écrire comme solution d'une équation différentielle.

3) Exemples de calculs de DSE**4) Exemples de calculs de sommes à partir des DSE**

À partir de la liste des développements en série entière usuels, **qu'il faut connaître par cœur**, on peut souvent calculer explicitement des sommes de séries entières.

Méthode

Pour calculer une somme de série entière, on peut :

- *transformer la somme à calculer à l'aide d'un changement d'indice ou une factorisation, et se ramener à un développement en série entière connu ;*
- *dériver ou intégrer terme à terme la somme à calculer, et reconnaître ainsi un développement en série entière usuel.*

IV Fonction exponentielle complexe

Dans le cours de MP2I, on a défini **dans cet ordre** :

- **la fonction logarithme népérien** comme la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en $x = 1$ (via le théorème fondamental de l'analyse qui dit que toute fonction continue possède des primitives). On a alors facilement la propriété algébrique fondamentale du logarithme :

$$\forall (x, x') \in]0, +\infty[^2, \quad \ln(xx') = \ln(x) + \ln(x').$$

- **la fonction exponentielle réelle** $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, comme la réciproque de la bijection $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Cela permet de montrer que $\exp' = \exp$, que $\exp(0) = 1$ et que

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, \quad e^{x+x'} = e^x \times e^{x'}.$$

- **la fonction exponentielle imaginaire** $x \mapsto e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$, qui va de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Grâce aux formules de trigonométrie $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, on montre que

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i(x+x')} = e^{ix} \times e^{ix'}.$$

- **la fonction exponentielle complexe** $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ en **posant**, pour tout nombre complexe $z = x + iy$

$$e^z = e^x \times e^{iy} = e^x \times (\cos y + i \sin y).$$

Avec cette définition, la propriété algébrique fondamentale de l'exponentielle se prolonge directement à \mathbb{C} :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}.$$

Enfin, il se trouve que le développement en série entière de la fonction exponentielle réelle se prolonge également à \mathbb{C} .

Théorème 37 (DSE de l'exponentielle complexe)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

CH15 : Séries et fonctions vectorielles

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Dans ce chapitre, on va généraliser des notions déjà connues :

- la notion de série, déjà connue pour les suites numériques $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On va définir les "séries vectorielles" à partir des suites de vecteurs d'un EVN de dim finie.
- les notions de dérivée et d'intégrale, déjà connues pour les fonctions numériques (c'est-à-dire à valeurs dans \mathbb{K}). On va définir la dérivée et l'intégrale des "fonctions vectorielles" (c'est-à-dire les fonctions à valeurs dans un EVN de dim finie).

Tout ceci est possible grâce à la notion générale de limite dans un espace vectoriel normé (cf. cours de topologie).

I Séries vectorielles

E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul de dimension finie.

1) Convergence absolue

Définition 1 (Convergence absolue d'une série vectorielle)

On munit E d'une norme $\|\cdot\|$. Etant donné une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, on dit que la série vectorielle $\sum u_n$ est **absolument convergente** lorsque la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge.

Propriété 2 (Indépendance de la convergence absolue vis-à-vis de la norme)

Le fait qu'une série soit absolument convergente ne dépend pas de la norme $\|\cdot\|$ choisie sur E .

Théorème 3 (La convergence absolue entraîne la convergence en dimension finie)

Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur $S \in E$ tel que $\sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$.

Propriété 4 (Inégalité triangulaire infinie en dimension finie)

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors on a l'inégalité suivante, pour toute norme $\|\cdot\|$ sur E :

$$\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|.$$

2) Séries géométriques matricielles

On se place ici dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

La convergence absolue va nous permettre de définir des séries de matrices.

Lemme 5 (Normes matricielles)

Pour toute norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad N(AB) \leq CN(A)N(B).$$

Propriété 6 (Série géométrique matricielle)

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $C > 0$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq C\|A\|\|B\|$.

Alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < \frac{1}{C}$, la série $\sum_{k \geq 0} A^k$ converge absolument,

donc converge. De plus, $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

3) Exponentielle de matrice

Théorème 7 (Série exponentielle matricielle)

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge absolument, donc converge.

Sa somme est notée $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ et appelée **exponentielle de la matrice** A .

II Dérivabilité des fonctions vectorielles

I désigne un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide, et F un \mathbb{K} -espace vectoriel normé non nul de dimension finie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). On notera $p = \dim(F) \in \mathbb{N}^*$.

On considère des fonctions $f : I \rightarrow F$.

1) Dérivabilité en un point

Définition 8 (Dérivabilité en un point)

Soit $f : I \rightarrow F$ et $t_0 \in I$. On dit que f est **dérivable en t_0** si la fonction

$$\phi_{t_0} : \begin{cases} I \setminus \{t_0\} & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & \frac{1}{t - t_0}(f(t) - f(t_0)) \end{cases}$$

possède une limite finie $\ell \in F$ en t_0 .

Dans ce cas, cette limite est appelée **le vecteur dérivé de f en t_0** (ou plus simplement la **dérivée de f en t_0**), et on note

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \in F.$$

Propriété 9 (Expression en coordonnées)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F et soit $f : I \rightarrow F$. Notons (f_1, \dots, f_p) les fonctions coordonnées de f dans \mathcal{B} , c'est-à-dire que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \sum_{i=1}^p f_i(t)e_i,$$

avec $f_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ pour tout $i \in [1, p]$. Alors :

(i) La fonction f est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si toutes les f_i sont dérivables en t_0 .

(ii) Dans ce cas, $f'(t_0) = \sum_{i=1}^p f'_i(t_0)e_i$.

Définition 10 (Négligeabilité d'une fonction vectorielle devant une fonction scalaire)

On suppose que $t_0 \in \bar{I}$. Etant données une fonction vectorielle $f : I \rightarrow F$ et une fonction scalaire $g : I \rightarrow \mathbb{K}$, on dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de t_0 et on note $f(t) = o_{t \rightarrow t_0}(g(t))$ lorsque qu'il existe un voisinage V de t_0 relatif à I et une fonction vectorielle $\varepsilon : V \rightarrow F$ telle que $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0_F$ et pour tout $t \in V$, $f(t) = g(t)\varepsilon(t)$.

Propriété 11 (Equivalence entre dérivabilité et DL d'ordre 1)

Une fonction $f : I \rightarrow F$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si il existe $\alpha \in F$ tel que

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + h\alpha + o_{h \rightarrow 0}(h).$$

Dans ce cas, $f'(t_0) = \alpha$.

Corollaire 12 (La dérivabilité entraîne la continuité)

Si $f : I \rightarrow F$ est dérivable en $t_0 \in I$, alors f est continue en t_0 .

Définition 13 (Dérivabilité à droite et à gauche)

Avec les notations de la définition 8 :

- (i) Si t_0 n'est pas la borne inférieure de I , on dit que f est **dérivable à gauche en t_0** lorsque la fonction ϕ_{t_0} possède une limite $\ell \in F$ quand $t \rightarrow t_0^-$.
La dérivée à gauche est notée $f'_g(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \phi_{t_0}(t)$.
- (ii) Si t_0 n'est pas la borne supérieure de I , on dit que f est **dérivable à droite en t_0** lorsque la fonction ϕ_{t_0} possède une limite $\ell \in F$ quand $t \rightarrow t_0^+$.
La dérivée à droite est notée $f'_d(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \phi_{t_0}(t)$.

Définition 14 (Fonction dérivée, fonction de classe \mathcal{C}^1)

Soit $f : I \rightarrow F$.

- (i) On dit que f est **dérivable** si elle est dérivable en tout point $t_0 \in I$. On appelle alors **fonction dérivée de f** la fonction vectorielle $f' : \begin{cases} I & \rightarrow & F \\ t & \mapsto & f'(t) \end{cases}$.
- (ii) On dit que f est **de classe \mathcal{C}^1** lorsqu'elle est dérivable et que sa fonction dérivée f' est continue.

Propriété 15 (Fonction de dérivée nulle sur un intervalle)

Soit $f : I \rightarrow F$ une fonction dérivable. Alors, f' est nulle sur I si et seulement si f est constante sur I .

2) Opérations**Propriété 16 (Opérations linéaires)**

Pour toutes fonctions dérivables $f : I \rightarrow F$ et $g : I \rightarrow F$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\lambda f + g$ est dérivable, et on a

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'.$$

L'ensemble des fonctions dérivables $I \rightarrow F$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, F)$.

Propriété 17 (Composition avec une application linéaire)

Soit $f : I \rightarrow F$, et soit $L : F \rightarrow G$ une application linéaire, où G est un autre \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie.

- (i) Si f est dérivable en t_0 , alors $L \circ f$ est dérivable en t_0 et

$$(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0)).$$

- (ii) Si f est dérivable, alors $L \circ f$ est dérivable et

$$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

Notation

Parfois, la composée $L \circ f$ se notera abusivement $L(f)$.

Avec cette notation, on aura donc $\forall t \in I, L(f)(t) = L(f(t))$.

Propriété 18 (Composition avec une application bilinéaire)

Soient F_1, F_2, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $f : I \rightarrow F_1, g : I \rightarrow F_2$ et soit $B : F_1 \times F_2 \rightarrow G$ une application bilinéaire.

- (i) Si f et g sont dérivables en $t_0 \in I$, alors $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable en t_0 et :

$$(B(f, g))'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$

- (ii) Si f et g sont dérivables, alors $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable et :

$$(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g').$$

Propriété 19 (Composition avec une application multilinéaire)

Soient F_1, \dots, F_n, G des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés de dimension finie, soit $f_1 : I \rightarrow F_1, \dots, f_n : I \rightarrow F_n$ des fonctions vectorielles et soit $M : F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow G$ une application multilinéaire.

- (i) Si f_1, \dots, f_n sont dérivables en $t_0 \in I$, alors $M(f_1, \dots, f_n) : t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_n(t))$ est dérivable en t_0 et

$$(M(f_1, \dots, f_n))'(t_0) = \sum_{i=1}^n M(f_1(t_0), \dots, f_{i-1}(t_0), f'_i(t_0), f_{i+1}(t_0), \dots, f_n(t_0)).$$

- (ii) Si f_1, \dots, f_n sont dérivables, alors $M(f_1, \dots, f_n) : t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_n(t))$ est dérivable et

$$(M(f_1, \dots, f_n))' = \sum_{i=1}^n M(f_1, \dots, f_{i-1}, f'_i, f_{i+1}, \dots, f_n).$$

Théorème 20 (Dérivée d'une fonction composée)

Soit $f : I \rightarrow F$, et soit $\varphi : J \rightarrow I$, où J est un intervalle de \mathbb{R} .

- (i) Si φ est dérivable en $x_0 \in J$ et si f est dérivable en $\varphi(x_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en x_0 et :

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = \varphi'(x_0) f'(\varphi(x_0)).$$

- (ii) Si φ et f sont dérivables, alors $f \circ \varphi$ est dérivable et :

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi).$$

3) Dérivées successives**Définition 21 (Fonction de classe C^n)**

Soit $f : I \rightarrow F$. On définit le fait que f soit de classe C^n récursivement :

- (i) On dit que f est de classe C^0 lorsqu'elle est continue.
(ii) Pour tout entier $n \geq 1$, on dit que f est de classe C^n lorsque f est dérivable et que f' est de classe C^{n-1} .

On dira également que f est de classe C^∞ lorsqu'elle est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notation

On notera $C^n(I, F)$ l'ensemble des fonctions $I \rightarrow F$ de classe C^n , pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Pour $f \in C^n(I, F)$, on notera (comme pour les fonctions à valeurs scalaires) :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad \forall k \in [1, n], \quad f^{(k)} = (f^{(k-1)})'.$$

Propriété 22 (Classe C^n et coordonnées)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F et soit $f : I \rightarrow F$.

Notons (f_1, \dots, f_p) les fonctions coordonnées de f dans \mathcal{B} .

Alors, f est de classe C^n si et seulement si toutes les f_i sont de classe C^n , et on a

$$\forall k \in [1, n], \quad f^{(k)} = \sum_{i=1}^p f_i^{(k)} e_i.$$

Propriété 23 (Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^n)

Avec les notations du paragraphe précédent :

- (i) Si $(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + g \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$.
En particulier, $\mathcal{C}^n(I, F)$ et $\mathcal{C}^\infty(I, F)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, F)$.
- (ii) Si $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et $L : F \rightarrow G$ est linéaire, alors $L \circ f \in \mathcal{C}^n(I, G)$ et $(L \circ f)^{(n)} = L \circ f^{(n)}$.
- (iii) Si $f \in \mathcal{C}^n(I, F_1)$, $g \in \mathcal{C}^n(I, F_2)$ et si $B : F_1 \times F_2 \rightarrow G$ est bilinéaire, alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, G)$
et

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)}) \quad (\text{formule de Leibniz}).$$

- (iv) Si $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^n(J, I)$, alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^n(J, F)$.

III Intégration des fonctions vectorielles sur un segment

On va maintenant définir la notion d'intégrale sur un segment $I = [a, b]$ (avec $a < b$) pour une fonction à valeurs vectorielles.

1) Définitions**Définition 24 (Fonction vectorielle continue par morceaux)**

Une fonction vectorielle $f : [a, b] \rightarrow F$ est dite **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, la restriction $f|_{]t_k, t_{k+1}[}$ possède un prolongement continu sur $[t_k, t_{k+1}]$.

Notation

On notera $\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux $[a, b] \rightarrow F$.

Propriété 25 (Structure algébrique des fonctions continues par morceaux)

$\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], F)$.

Propriété 26 (Continuité par morceaux et coordonnées)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F et soit $f : [a, b] \rightarrow F$.

Notons (f_1, \dots, f_p) les fonctions coordonnées de f dans \mathcal{B} .

Alors, f est continue par morceaux si et seulement si toutes les f_i sont continues par morceaux.

Théorème 27 (Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction vectorielle)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F , et (f_1, \dots, f_p) les fonctions coordonnées

de f dans \mathcal{B} . Alors le vecteur $\sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i \in F$ ne dépend pas du choix de la base \mathcal{B} .

On l'appelle **intégrale de f sur $[a, b]$** .

Notation

Comme pour les fonctions à valeurs scalaires, on pourra noter l'intégrale $\int_a^b f$, ou $\int_{[a,b]} f$, ou encore

$\int_a^b f(t) dt$. On a donc, pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de F :

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i \right) e_i.$$

2) Propriétés de l'intégrale

Propriété 28 (Linéarité et relation de Chasles)

(i) L'intégrale $f \mapsto \int_a^b f$ est une application linéaire $\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F) \rightarrow F$.

(ii) Pour tout $c \in]a, b[$ et $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$, les restrictions de f aux segments $[a, c]$ et $[c, b]$ sont bien continues par morceaux, et on a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Propriété 29 (Intégrale d'une composition linéaire)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$ et soit $L : F \rightarrow G$ linéaire. Alors $L(f) \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], G)$ et $\int_a^b L(f) = L\left(\int_a^b f\right)$.

Définition 30 (Sommes de Riemann)

Soit $f : [a, b] \rightarrow F$ et $\sigma = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$. Etant donné des réels $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in [t_0, t_1] \times \dots \times [t_{n-1}, t_n]$, on appelle **somme de Riemann associée à f , σ et α** le vecteur :

$$R(f, \sigma, \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) f(\alpha_k) \in F.$$

Théorème 31 (Convergence des sommes de Riemann)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision σ de pas inférieur à δ et pour tous points $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in [t_0, t_1] \times \dots \times [t_{n-1}, t_n]$:

$$\left\| \int_a^b f - R(f, \sigma, \alpha) \right\| \leq \varepsilon.$$

En particulier, on a

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$$

(méthode des rectangles à gauche)

Propriété 32 (Inégalité triangulaire intégrale)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$. Alors $\|f\| \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{R})$ et

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|.$$

Corollaire 33 (Inégalité de la moyenne)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$. Alors, $\|f\| \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{R})$ et

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq (b-a) \sup_{t \in [a, b]} \|f(t)\|.$$

3) Théorème fondamental de l'analyse

Notation (Notation polarisée de l'intégrale)

Pour $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], F)$ on pose

$$\int_b^a f = - \int_a^b f \text{ si } a < b, \quad \text{et} \quad \int_b^a f = 0 \text{ si } a = b.$$

Cette notation permet d'étendre la relation de Chasles à tout triplet de points (a, b, c) , quelque soient leur positions relatives. Par exemple, on aura

$$\int_1^0 f = \int_1^2 f + \int_2^0 f.$$

Théorème 34 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} (non nécessairement un segment), soit $g : I \rightarrow F$ et $a \in I$.

Si g est continue, alors la fonction $G : x \mapsto \int_a^x g(t)dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $G' = g$.

Corollaire 35 (Formule fondamentale du calcul intégral)

Soit $g : I \rightarrow F$ une fonction continue et soit $G : I \rightarrow F$ une primitive quelconque de g . Alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad \int_a^b g(t)dt = G(b) - G(a).$$

Notation

On notera classiquement $[G]_a^b = G(b) - G(a)$.

4) Inégalité des accroissements finis

En revanche, le résultat suivant reste vrai pour les fonctions vectorielles :

Théorème 36 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$. Alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad \|f(b) - f(a)\| \leq |b - a| \sup_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|.$$

IV Formules de Taylor pour les fonctions vectorielles**Théorème 37 (Formule de Taylor avec reste intégral)**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, F)$. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n,$$

$$\text{où } R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Corollaire 38 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, F)$. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| = \|R_n\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a, b]} \|f^{(n+1)}(t)\|.$$

Théorème 39 (Formule de Taylor-Young)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$. Pour tout $a \in I$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{t \rightarrow a}((t-a)^n).$$

V Suites et séries de fonctions vectorielles

Nous allons maintenant généraliser les résultats des chapitres 7 et 9 (suites et séries de fonctions) à des fonctions $f : A \subset E \rightarrow F$, où E et F sont deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.

1) Généralités

Définition 40 (Types de convergence des suites de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$, et soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$.

- (i) On dit que la suite (f_n) **converge simplement** vers f et on note $f_n \xrightarrow{CS} f$ lorsque pour tout $t \in A$, la suite $(f_n(t))$ converge vers $f(t)$ dans F .
- (ii) On dit que la suite (f_n) **converge uniformément** vers f et on note $f_n \xrightarrow{CU} f$ lorsque les fonctions $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang et $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, où l'on note $\|f_n - f\|_{\infty} = \sup_{t \in A} \|f_n(t) - f(t)\|_F$.

Définition 41 (Types de convergence des séries de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$.

- (i) On dit que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ **converge simplement** vers $S : A \rightarrow F$ lorsque la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ converge simplement vers S .
- (ii) On dit que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ **converge uniformément** vers $S : A \rightarrow F$ lorsque la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ converge uniformément vers S .
- (iii) On dit que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ **converge normalement** lorsque les f_k sont bornées sur A et la série $\sum_{k \geq 0} \|f_k\|_{\infty}$ converge.

Propriété 42 (Lien entre CVU et reste)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$. La série $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite des restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ converge uniformément vers 0.

Propriété 43 (La convergence normale entraîne la convergence uniforme)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge normalement, alors elle converge uniformément.

2) Continuité et double limite

Théorème 44 (Continuité de la limite d'une suite de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{F}(A, F)$.

- (i) Soit $t_0 \in A$. Si les f_n sont continues en t_0 et si (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de t_0 relatif à A , alors f est continue en t_0 .
- (ii) Si les f_n sont continues sur A et si pour tout $t_0 \in A$, (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de t_0 relatif à A , alors f est continue sur A .

Théorème 45 (Continuité de la somme d'une série de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$.

- (i) Soit $t_0 \in A$. Si les f_n sont continues en t_0 et si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur un voisinage de t_0 relatif à A , alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en t_0 .
- (ii) Si les f_n sont continues sur A et si pour tout $t_0 \in A$, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur un voisinage de t_0 relatif à A , alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A .

Théorème 46 (Théorème de la double limite pour les suites de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$, soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$ et $t_0 \in \bar{A}$. On suppose que :

- (i) La suite (f_n) converge uniformément vers f sur un voisinage de t_0 relatif à A .
- (ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \ell_n \in F$.

Alors, la suite (ℓ_n) converge vers $\ell \in F$ et $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \ell$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right) = \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right).$$

Théorème 47 (Théorème de la double limite pour les séries de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$ et $t_0 \in \bar{A}$. On suppose que :

- (i) La série $\sum f_n$ converge uniformément sur un voisinage de t_0 relatif à A .
- (ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \ell_n \in F$.

Alors, la série $\sum \ell_n$ converge vers $\ell \in F$ et la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ vérifie $S(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \ell$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right) = \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right).$$

3) Intégration et dérivation**Propriété 48 (Convergence uniforme des primitives)**

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit $(g_n) \in \mathcal{C}^0(I, F)^{\mathbb{N}}$.

Si (g_n) converge uniformément vers $g : I \rightarrow F$ sur tout segment de I , alors pour tout $a \in I$, la suite de fonctions (G_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, G_n(x) = \int_a^x g_n(t) dt$$

converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction $G : I \rightarrow F$ définie par

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

Théorème 49 (Interversion limite/intégrale sur un segment)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues $[a, b] \rightarrow F$ qui converge uniformément vers $f : [a, b] \rightarrow F$. Alors

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b f(t) dt.$$

Propriété 50 (Convergence uniforme d'une série de primitives)

Soit $(g_n) \in \mathcal{F}(I, F)^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} . On suppose que :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur I .
- (ii) La série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $S : I \rightarrow F$.

Pour tout $a \in I$, on note $G_n : x \mapsto \int_a^x g_n(t) dt$. Alors, la série de fonctions $\sum G_n$ converge uniformément vers $G : x \mapsto \int_a^x S(t) dt$ sur tout segment de I .

Théorème 51 (Théorème d'intégration terme à terme sur un segment)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues $[a, b] \rightarrow F$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt.$$

Théorème 52 (Théorème de dérivation d'une limite de fonctions)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, F)^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
- (ii) La suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \rightarrow F$.
- (iii) La suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g : I \rightarrow F$;

Alors, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I , f est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $f' = g$. Autrement dit, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n = f' = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)'.$$

Théorème 53 (Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions)

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, F)^{\mathbb{N}}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} . On suppose que :

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^1(I, F)$.
- (ii) La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $S : I \rightarrow F$ sur I .
- (iii) La série des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $T : I \rightarrow F$.

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I , la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $S' = T$. Autrement dit, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n.$$

CH16 : Equations différentielles linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I désigne un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide et E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie. On rappelle que l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ (formé des endomorphismes de E) est également un espace normé de dimension finie, mais également une algèbre normée pour les lois $(+, \cdot, \circ)$: en effet, étant donnée une norme $\| \cdot \|$ sur E , la norme "triple" $||| \cdot |||$ définie par

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad |||u||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$|||Id_E||| = 1, \quad \forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||u \circ v||| \leq |||u||| |||v|||.$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une algèbre normée, pour la norme $||| \cdot |||$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad |||A||| = \sup_{V \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AV\|}{\|V\|},$$

où $\| \cdot \|$ est n'importe quelle norme sur \mathbb{K}^n . On a

$$|||I_n||| = 1, \quad \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad |||AB||| \leq |||A||| |||B|||.$$

I Généralités

On abrègera "equation différentielle linéaire" par "EDL".

1) EDL vectorielles d'ordre 1

Définition 1 (Equation différentielle d'ordre 1)

(i) On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1** une équation de la forme :

$$\alpha(t)(x'(t)) = \beta(t)(x(t)) + \gamma(t),$$

où $\alpha : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $\beta : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $\gamma : I \rightarrow E$ sont des applications continues données, et l'inconnue $x : I \rightarrow E$ est une fonction dérivable.

(ii) L'équation est dite **résoluble en x'** lorsque $\forall t \in I$, $\alpha(t) \in GL(E)$. Dans ce cas, l'équation est équivalente à l'**équation résolue en x'** :

$$x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t),$$

où $\forall t \in I$, $a(t) = \alpha(t)^{-1} \circ \beta(t)$ et $b(t) = \alpha(t)^{-1}(\gamma(t))$.

Notation

Dans la suite, on considèrera essentiellement des EDL **sous forme résolue en x'** :

$$(E) : \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t),$$

avec $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \rightarrow E$ **continues**. On emploiera fréquemment la notation abrégée suivante :

$$(E) : \quad x' = a(t)(x) + b(t),$$

où l'on ne rappelle pas que l'inconnue x dépend de la variable réelle t , ou, de manière encore plus abrégée :

$$(E) : \quad x' = a(x) + b.$$

Définition 2 (Solution d'une équation différentielle)

Soit une EDL sous forme résolue $(E) : x' = a(t)x + b(t)$, avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. Une **solution** de (E) sur I est une fonction $x : I \rightarrow E$ dérivable telle que

$$\forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t).$$

Propriété 3 (Régularité d'une solution)

Toute solution de (E) sur I est automatiquement de classe \mathcal{C}^1 .

Vocabulaire

La fonction $t \mapsto b(t)$ est appelée **second membre** de l'équation $(E) : x' = a(t)x + b(t)$.

L'équation (E) est dite à **coefficients constants** lorsque $t \mapsto a(t)$ est une fonction constante.

L'équation $(H) : x' = a(t)x$ est appelée **équation homogène associée** à (E) .

2) Structure de l'ensemble des solutions**Notation**

On notera $\mathcal{S}_I(E)$ l'ensemble des solutions de $(E) : x' = a(t)x + b(t)$ sur l'intervalle I .

De même, on notera $\mathcal{S}_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $(H) : x' = a(t)x$ sur l'intervalle I .

Propriété 4 (Structure des ensembles de solutions)

(i) L'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$.

(ii) Si on connaît une solution $f_0 \in \mathcal{S}_I(E)$, alors on a

$$\mathcal{S}_I(E) = \{h + f_0, h \in \mathcal{S}_I(H)\}$$

("sol. générale de (E) " = "sol. générale de (H) " + "sol. particulière de (E) ").

Propriété 5 (Principe de superposition)

Si f_1 est solution de $x' = a(t)x + b_1(t)$ sur I et si f_2 est solution de $x' = a(t)x + b_2(t)$ sur I , alors $f_1 + f_2$ est solution de $x' = a(t)x + b_1(t) + b_2(t)$ sur I (où b_1 et b_2 sont dans $\mathcal{C}^0(I, E)$).

3) EDL scalaires d'ordre n **Définition 6 (EDL scalaire d'ordre n)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n résolue** sur I une équation de la forme :

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t),$$

où les fonctions $a_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues.

Une **solution sur I** d'une telle équation est une fonction $x : I \rightarrow \mathbb{K}$ n -fois dérivable telle que

$$\forall t \in I, \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t).$$

Propriété 7 (Régularité d'une solution)

Toute solution d'une EDL scalaire d'ordre n résolue est de classe \mathcal{C}^n sur I .

Vocabulaire

Là aussi, on parle de **second membre** pour la fonction b , et on appelle **équation homogène associée** à

$$(E) : \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

l'équation sans second membre

$$(H) : \quad x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t).$$

On emploiera également les notations $\mathcal{S}_I(E)$ et $\mathcal{S}_I(H)$ pour les ensembles de solutions.

Théorème 8 (Equivalence entre système et équation scalaire)

Soit

$$(E) : x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n \geq 1$, avec $a_0, \dots, a_{n-1}, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Soit $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. On pose $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Alors, x est solution de (E) sur I si et seulement si la fonction vectorielle X est solution du système différentiel :

$$(\Sigma) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

$$\text{où } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & \dots & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

II Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire et conséquences

E désigne toujours un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie, et I un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide.

1) Le théorème

Théorème 9 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour les EDL d'ordre 1)

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$, soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. Alors le problème de Cauchy

$$(PC) : \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$.

Corollaire 10 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDL scalaires d'ordre n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit a_0, a_1, \dots, a_{n-1} et b des fonctions continues $I \rightarrow \mathbb{K}$. Soit $t_0 \in I$ et $(x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$. Alors le problème de Cauchy linéaire scalaire d'ordre n

$$(PC) : \begin{cases} x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x'_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases},$$

possède une unique solution $x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

2) Dimension des espaces de solutions

Théorème 11 (Dimension des espaces de solutions)

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. On considère les équations différentielles :

$$(E) : x' = a(t)x + b(t), \quad (H) : x' = a(t)x.$$

- (i) Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\varphi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}_I(H) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x(t_0) \end{cases}$ est un isomorphisme linéaire, donc $\dim(\mathcal{S}_I(H)) = \dim(E)$.
- (ii) $\mathcal{S}_I(E)$ est non vide, c'est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de dimension $\dim(E)$, parallèle à $\mathcal{S}_I(H)$ (c'est-à-dire que $\mathcal{S}_I(E)$ s'obtient en translatant $\mathcal{S}_I(H)$ par n'importe quelle solution particulière de E).

Corollaire 12 (Dimension des espaces de solutions pour les équations d'ordre n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit a_0, a_1, \dots, a_{n-1} et b des fonctions continues $I \rightarrow \mathbb{K}$.

On note :

$$(E) : x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t),$$

$$(H) : x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t).$$

- (i) Pour tout $t_0 \in I$, l'application

$$\varphi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}_I(H) & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) \end{cases}$$

est un isomorphisme, et donc $\mathcal{S}_I(H)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

- (ii) $\mathcal{S}_I(E)$ est non vide, c'est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de dimension n , parallèle à $\mathcal{S}_I(H)$.

3) Exemples d'équations différentielles non résolubles

Il s'agit d'équations scalaires d'ordre n sous la forme :

$$\alpha_n(t)x^{(n)}(t) = \alpha_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1(t)x'(t) + \alpha_0(t)x(t) + \beta(t),$$

où les α_i et β sont continues $I \rightarrow \mathbb{K}$ et la fonction $t \mapsto \alpha_n(t)$ s'annule sur I .

Méthode

Pour résoudre de telles équations sur I , on les résout d'abord sur les sous-intervalles $J \subset I$ sur lesquels α_n ne s'annule pas (en se ramenant à une forme résolue en $x^{(n)}$, sur laquelle on peut appliquer les résultats précédents). Puis on essaye de "recoller" les solutions obtenues pour former des solutions valables sur tout I , c'est-à-dire des fonctions n -fois dérivables sur tout I .

III Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Il s'agit des équations de la forme

$$x'(t) = a(x(t)) + b(t),$$

où $a \in \mathcal{L}(E)$ ne dépend pas de t , et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$.

Si $E = \mathbb{K}^n$, cela revient à considérer des systèmes différentiels de la forme :

$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$.

En exploitant l'équivalence entre systèmes différentiels et équations scalaires, les résultats de cette partie vont aussi permettre la résolution des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n à coefficients constants :

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) + b(t),$$

où $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

1) Propriétés de l'exponentielle de matrice / d'endomorphisme

Théorème 13 (Propriétés de l'exponentielle de matrice)

- (i) $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est bien définie et continue.
- (ii) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $S : t \mapsto \exp(tA)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S'(t) = A \exp(tA) = \exp(tA)A.$$

- (iii) Si $AB = BA$, alors $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$.
- (iv) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

2) Résultat général

Théorème 14 (Solution d'un système différentiel à coefficients constants)

On considère le système différentiel à coefficients constants

$$(H) : X'(t) = AX(t),$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et le problème de Cauchy

$$(PC) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases},$$

avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$.

- (i) Les solutions de (H) sont les $X : t \mapsto e^{tA}V$ avec $V \in \mathbb{K}^n$.
- (ii) L'unique solution de (PC) est $X : t \mapsto e^{(t-t_0)A}X_0$.

3) Exemples de résolutions explicites

a) EDL scalaires d'ordre 2 à coefficients constants

On va montrer comment retrouver l'expression des solutions (vue en MP2I) des EDL d'ordre 2 à coefficients constants, grâce à l'équivalence entre les EDL scalaires d'ordre n et les EDL vectorielles d'ordre 1.

b) Systèmes différentiels avec A diagonalisable

c) Systèmes différentiels avec A trigonalisable

IV Systèmes différentiels linéaires : cas général

1) Système fondamental de solutions, wronskien

Définition 15 (Système fondamental de solutions)

Soit le système différentiel linéaire homogène

$$(H) : X'(t) = A(t)X(t),$$

avec $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, d'inconnue $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

On appelle **système fondamental de solutions de (H)** toute base (X_1, \dots, X_n) du \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$ (qui rappelons-le est de dimension n).

Définition 16 (Wronskien d'une famille de solutions)

Soit (X_1, \dots, X_n) une famille (non nécessairement libre) de n solutions du système différentiel linéaire homogène

$$(H) : X'(t) = A(t)X(t).$$

On appelle **wronskien** de la famille (X_1, \dots, X_n) l'application

$$w : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & w(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t)) \end{cases}$$

(où le déterminant est calculé par rapport à la base canonique de \mathbb{K}^n).

Théorème 17 (Caractérisation des systèmes fondamentaux de solutions)

Avec les notations précédentes, il y a équivalence entre :

- (i) (X_1, \dots, X_n) est un système fondamental de solutions de (H) ;
- (ii) $\exists t_0 \in I, w(t_0) \neq 0$;
- (iii) $\forall t \in I, w(t) \neq 0$.

Dans ce cas, on dit que la matrice $Q(t) = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ X_1(t) & X_2(t) & \dots & X_n(t) \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$ est une **matrice**

fondamentale de (H). On a alors les propriétés :

1. $Q(t)$ est inversible pour tout $t \in I$.
2. $Q'(t) = A(t)Q(t)$ pour tout $t \in I$.
3. Les solutions de (H) s'écrivent $X(t) = Q(t)V$, avec $V \in \mathbb{K}^n$.

2) Rappel : MVC pour les équations scalaires d'ordre 1

On considère l'équation différentielle (E) : $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$, où $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, et son équation homogène associée (H) : $x'(t) = a(t)x(t)$.

Les solutions de (H) sur I sont les fonctions

$$x : t \mapsto \alpha e^{A(t)}, \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

avec A une primitive de a sur I .

En effet, on vérifie facilement que la fonction $t \mapsto e^{A(t)}$ est une solution non nulle de (H). Par ailleurs $\mathcal{S}_I(H)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 1, donc $\mathcal{S}_I(H) = Vect(t \mapsto e^{A(t)})$

Méthode (Méthode de variation de la constante)

Une fois que l'on connaît les solutions de (H), on peut chercher toutes les solutions de (E) sous la forme

$$x(t) = \lambda(t)e^{A(t)},$$

où $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

En effet, toute fonction $x : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe \mathcal{C}^1 peut s'écrire sous cette forme, en posant $\lambda : t \mapsto$

$x(t)e^{-A(t)}$ (ce qui est possible car $t \mapsto e^{A(t)}$ ne s'annule jamais sur I). Avec ces notations, x est solution de (E) si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad \lambda'(t)e^{A(t)} + \lambda(t)A'(t)e^{A(t)} = a(t)\lambda(t)e^{A(t)} + b(t),$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

(les " $\lambda(t)$ " se sont simplifiés car $A'(t) = a(t)$).

Si on parvient à calculer une primitive de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$, on obtient alors toutes les solutions de (E) :

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds + \alpha \right) e^{A(t)}, \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

(où $t_0 \in I$ quelconque).

3) MVC pour les systèmes différentiels linéaires

Théorème 18 (MVC pour les systèmes différentiels linéaires)

Soit le système différentiel linéaire avec second membre

$$(E) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

avec $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$, d'inconnue $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

On suppose qu'on connaît un système fondamental de (H) : $X'(t) = A(t)X(t)$, noté (X_1, \dots, X_n) , et on note

$$\forall t \in I, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ X_1(t) & X_2(t) & \cdots & X_n(t) \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K})$$

la matrice fondamentale.

Alors, les solutions de (E) sur I sont les fonctions

$$X : t \mapsto Q(t)V(t),$$

où $V \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ est telle que

$$V'(t) = Q(t)^{-1}B(t).$$

Méthode (Mise en oeuvre de la MVC sur un système différentiel)

Supposons que l'on connaisse un système fondamental de solutions du système différentiel homogène :

$$(H) : X'(t) = A(t)X(t),$$

noté (X_1, \dots, X_n) .

D'après le th. précédent, on peut chercher toutes les solutions du système avec second membre

$$(E) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

sous la forme

$$X(t) = Q(t)V(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)X_i(t),$$

où $Q(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ est la matrice fondamentale et les $\lambda_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe \mathcal{C}^1 sont les composantes de la fonction vectorielle $t \mapsto V(t)$. Avec ces notations, X est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \vdots \\ \lambda_n'(t) \end{pmatrix} = Q(t)^{-1} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

$$\text{où } B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on intègre pour obtenir les coefficients $\lambda_i(t)$, puis la solution générale de (E) :

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) X_i(t).$$

V EDL scalaires d'ordre 2

On considère des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 résolues en x'' :

$$(E) : x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t),$$

où $a, b, c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

L'équation homogène associée est notée

$$(H) : x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t).$$

1) Système fondamental de solutions, wronskien

Définition 19 (Système fondamental de solutions)

On appelle **système fondamental de solutions de (H)** toute base (x_1, x_2) du plan vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$.

Propriété 20 (Lien avec les systèmes différentiels)

(x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de (H) si et seulement si

$$(X_1, X_2) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} \right)$$

est un système fondamental de solutions du système différentiel

$$(\Sigma_H) : X'(t) = A(t)X(t)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$.

Définition 21 (Wronskien de deux solutions de (H))

Si x_1, x_2 sont deux solutions de (H) (non nécessairement libres), on appelle **wronskien** de la famille (x_1, x_2) l'application

$$w : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \end{cases} .$$

Il s'agit du wronskien associé à la famille $(X_1, X_2) = ((x_1, x_1'), (x_2, x_2'))$ de solutions du système différentiel associé.

Théorème 22 (Caractérisation des systèmes fondamentaux)

Si x_1, x_2 sont deux solutions de (H) (non nécessairement libres), alors il y a équivalence entre :

- (i) (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de (H) ;
- (ii) $\exists t_0 \in I, w(t_0) \neq 0$;
- (iii) $\forall t \in I, w(t) \neq 0$.

Dans ce cas, on dit que $Q(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale de (H).

Propriété 23 (Equation différentielle du wronskien)

Pour toute famille (x_1, x_2) de solutions de (H), le wronskien w vérifie l'équation différentielle :

$$w'(t) = a(t)w(t).$$

2) MVC pour les EDL scalaires d'ordre 2

En exploitant encore l'équivalence entre équations scalaires d'ordre 2 et système différentiels à valeurs dans \mathbb{K}^2 , on peut adapter la méthode de variation des constantes des systèmes différentiels pour résoudre (E) à partir d'une base des solutions de (H).

Théorème 24 (MVC pour les EDL scalaires d'ordre 2)

On suppose connu un système fondamental (x_1, x_2) de solutions de

$$(H) : x'' = a(t)x' + b(t)x.$$

Alors les solutions de

$$(E) : x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$$

sont les fonctions de la forme

$$x(t) = \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2(t)x_2(t),$$

où λ_1, λ_2 sont dans $C^1(I, \mathbb{K})$ et vérifient le système inversible :

$$\begin{cases} x_1(t)\lambda_1'(t) + x_2(t)\lambda_2'(t) = 0 \\ x_1'(t)\lambda_1'(t) + x_2'(t)\lambda_2'(t) = c(t). \end{cases}$$

3) MVC partielle (abaissement d'ordre)

On rappelle les notations :

$$(H) : x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t)$$

$$(E) : x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t).$$

Si on connaît une solution de (H), notée $x_0(t)$, qui ne s'annule pas sur I , alors on peut chercher les solutions de (E) sous la forme :

$$x(t) = \lambda(t)x_0(t), \text{ avec } \lambda \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } I$$

(cela revient à poser $\lambda = x/x_0$).

On obtient alors, en injectant cette forme dans (E), une équation d'ordre 1 en $z = \lambda'$ (les termes en λ se sont simplifiés), qu'on peut résoudre, et ensuite, on détermine $\lambda(t)$ en intégrant, puis les solutions $x(t)$ en remultipliant par $x_0(t)$.