Programme de colle 1
Semaine du lundi 21/09/2026

- **Chapitre 1 MPI : Séries numériques et sommabilité**
- **Chapitre 2 MPI : Intégration sur un intervalle quelconque**

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

La première partie de la colle (**25 min maximum**) consiste en une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes.
Certaines questions de cours sont réservées aux MPI*.

Liste des questions de cours du CH1 :

- **(MPI*)** Enoncé et démonstration du th. 25 (sommation des relations de comparaison, cas CV)
- **(MPI*)** Enoncé et démonstration du th. 26 (sommation des relations de comparaison, cas DV)

Liste des questions de cours du CH2 :

- Enoncé et démonstration du th.17 (critère de majoration pour les fonctions positives)
- Enoncé et démonstration du th.18 (critère des équivalents pour les fonctions positives)
- **(MPI*)** Enoncé et démonstration du th.29 (intégration des relations de comparaison, cas CV)
- **(MPI*)** Enoncé et démonstration du th.30 (intégration des relations de comparaison, cas DV)

Liste des exercices de la banque INP :

- Ex 5 (séries de Bertrand dans le cas $\alpha = 1$)
- Ex 6 (règle de d'Alembert)
- Ex 7 (critère des équivalents)
- Ex 46 (étude d'une série avec DL)
- Ex 28 (deux exemples d'étude d'intégrabilité)

La seconde partie de la colle consiste en la résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI* seront plus difficiles.

Notions importantes :

- Appliquer les critères classiques (comparaison, équivalents, d'Alembert) pour étudier la nature d'une série à termes positifs.
- Utiliser le téléscopage pour calculer des sommes.
- Convergence absolue pour les séries numériques.
- Critère spécial des séries alternées (avec la majoration du reste).
- Comparaison série-intégrale (encadrer des sommes partielles / des restes).
- Sommation des relations de comparaison (cas convergent et divergent).
- Vérifier si une famille est sommable à l'aide du théorème de sommation par paquets "positif" (en l'appliquant à la famille $|u_i|$).
- Calculer la somme d'une famille sommable à l'aide du théorème de sommation par paquets.
- Permutation de séries doubles à l'aide des théorèmes de Fubini (positif ou complexe).
- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.
- Etudier soigneusement la nature d'une intégrale impropre, ou l'intégrabilité d'une fonction (attention au vocabulaire !) en utilisant différents critères.
- Calculs d'intégrales impropres, notamment avec IPP ou changement de variable (généralisés ou non).

- Comparaison série-intégrale (encadrer des intégrales par des sommes et vice-versa).
  Attention, le "théorème de comparaison série-intégrale" qui relie la nature d'une série et d'une intégrale impropre dans le cas décroissant et positif n'est plus au programe.
- Intégration de relations de comparaison (O, o, $\sim$), cas convergent et divergent : c'est l'analogue de la sommation des relations de comparaison (déjà vue pour les séries numériques).
- Remarque : les théorèmes de permutation limite/intégrale ou permutation série/intégrale seront étudiés dans des chapitres ultérieurs.

Programme de colle 2
Semaine du lundi 28/09/2026

- **Révisions MP2I : arithmétique, polynômes, groupe symétrique**
- **Chapitre 3 MPI : Structures algébriques usuelles (sauf indicatrice d'Euler et partie V sur les idéaux polynomiaux)**

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

La première partie de la colle (**25 min maximum**) consiste en une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes.
Certaines questions de cours sont réservées aux MPI*.

Liste des questions de cours :

- Enoncé et démonstration des théorèmes 11 et 59 (sous-groupes et idéaux de $\mathbb{Z}$).
- **(MPI*)** Enoncé et démonstration du théorème 26 (classification des groupes monogènes).
- **(MPI*)** Enoncé et démonstration du théorème 68 (théorème chinois).
- Enoncé et démonstration de la propriété 70 + du théorème 71 (condition d'inversibilité dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ + $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier).

Liste des exercices de la banque INP :

- Ex 84 (racines n-ièmes de l'unité)
- Ex 85 (multiplicité d'une racine et factorisation de polynômes)
- Ex 86 (démonstration du petit théorème de Fermat avec les outils de MP2I)
- Ex 89 (calcul d'une somme de sinus)
- Ex 94 (système de congruences)

La seconde partie de la colle consiste en la résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI* seront plus difficiles.

Notions importantes :

- Les différentes structures et leurs morphismes (groupes, anneaux, corps) ;
- Ordre d'un élément dans un groupe, sous-groupe engendré par un élément ;
- Idéaux d'un anneau commutatif, idéal engendré par un élément ;
- Traduction de problèmes d'arithmétique dans les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, utilisation du théorème chinois ;
- Inversibilité dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Arithmétique des polynômes, polynômes irréductibles (déjà vu en MP2I).

Programme de colle 3
Semaine du lundi 12/10/2026

- **Révisions MP2I : Algèbre linéaire (espaces vectoriels, applications linéaires, matrices, déterminants)**.
- **Chapitre 4 MPI : Compléments d'algèbre linéaire**

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

La première partie de la colle (**25 min maximum**) consiste en une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes.
Certaines questions de cours sont réservées aux MPI*.

Liste des questions de cours :

- Démonstration de : "Une application linéaire $u : E \to F$ est injective ssi $Ker(u) = \{0\}$, surjective ssi $Im(u) = F$" (cours MP2I, CH.18)
- Démonstration de : "Une application linéaire $u : E \to F$ est injective ssi u transforme toutes les familles libres $(e_i)_{i\in I}$ en familles libres $(u(e_i))_{i\in I}$" (cours MP2I, CH.18).
- Démonstration de : "Une application linéaire $u : E \to F$ est surjective ssi u transforme toutes les familles génératrices $(e_i)_{i\in I}$ de E en des familles $(u(e_i))_{i\in I}$ génératrices de F" (cours MP2I, CH.18).
- **(MPI*)** Enoncé et démonstration du théorème 5 du CH.4 (caractérisations d'une somme directe).
- **(MPI*)** Enoncé et démonstration du théorème 6 du CH.4 (caractérisation d'une somme directe avec les dimensions).

Liste des exercices de la banque INP :

- Ex 55 (suites récurrentes linéaires doubles)
- Ex 60 (étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)
- Ex 64 (endomorphismes avec noyau et image supplémentaires)
- Ex 71 (étude d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$)
- Ex 87, 90 (interpolation de Lagrange)

La seconde partie de la colle consiste en la résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI* seront plus difficiles.

Notions importantes :

- Résoudre un système linéaire ;
- Reconnaître un SEV, passer de la définition "implicite" d'un SEV (par équation cartésienne) à la définition "paramétrique" (en déterminant une base), et réciproquement ;
- Ecrire la matrice d'une application linéaire dans un couple de bases ;
- Déterminer noyau, image, rang d'une application linéaire (ou d'une matrice) ;
- Raisonnements avec les dimensions (par ex. inclusion + égalité des dimensions) ;
- Projecteurs et symétries ;
- Base adaptée à une somme directe ;
- Produit de matrices par blocs, calculs de déterminants par blocs ;
- **Pas d'espaces préhilbertiens et de produits scalaires pour le moment.**