

# Programme de colle 1

## Semaine du lundi 23/09/2024

---

- **Chapitre 1 MPI : Séries numériques et sommabilité**
- **Chapitre 2 MPI : Intégration sur un intervalle quelconque**

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

La première partie de la colle (**25 min maximum**) consiste en une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes. Certaines questions de cours sont réservées aux MPI\*.

### Liste des questions de cours du CH1 :

- (MPI\*) Enoncé et démonstration du th. 25 (sommations des relations de comparaison, cas CV)
- (MPI\*) Enoncé et démonstration du th. 26 (sommations des relations de comparaison, cas DV)

### Liste des questions de cours du CH2 :

- Enoncé et démonstration du th.17 (critère de majoration pour les fonctions positives)
- Enoncé et démonstration du th.18 (critère des équivalents pour les fonctions positives)
- (MPI\*) Enoncé et démonstration du th.29 (intégration des relations de comparaison, cas CV)
- (MPI\*) Enoncé et démonstration du th.30 (intégration des relations de comparaison, cas CV)

### Liste des exercices de la banque INP :

- Ex 5 (séries de Bertrand dans le cas  $\alpha = 1$ )
- Ex 6 (règle de d'Alembert)
- Ex 7 (critère des équivalents)
- Ex 46 (étude d'une série avec DL)
- Ex 28 (deux exemples d'étude d'intégrabilité)

La seconde partie de la colle consiste en la résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI\* seront plus difficiles.

### Notions importantes :

- Appliquer les critères classiques (comparaison, équivalents, d'Alembert) pour étudier la nature d'une série à termes positifs.
- Utiliser le télescopage pour calculer des sommes.
- Convergence absolue pour les séries numériques.
- Critère spécial des séries alternées (avec la majoration du reste).
- Comparaison série-intégrale (encadrer des sommes partielles / des restes).
- Sommation des relations de comparaison (cas convergent et divergent).
- Vérifier si une famille est sommable à l'aide du théorème de sommation par paquets "positif" (en l'appliquant à la famille  $|u_i|$ ).
- Calculer la somme d'une famille sommable à l'aide du théorème de sommation par paquets.
- Permutation de séries doubles à l'aide des théorèmes de Fubini (positif ou complexe).
- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.
- Etudier soigneusement la nature d'une intégrale impropre, ou l'intégrabilité d'une fonction (attention au vocabulaire!) en utilisant différents critères.
- Calculs d'intégrales impropres, notamment avec IPP ou changement de variable (généralisés ou non).

- Comparaison série-intégrale (encadrer des intégrales par des sommes et vice-versa).  
**Attention, le "théorème de comparaison série-intégrale" qui relie la nature d'une série et d'une intégrale impropre dans le cas décroissant et positif n'est plus au programme.**
- Intégration de relations de comparaison ( $O$ ,  $o$ ,  $\sim$ ), cas convergent et divergent : c'est l'analogue de la sommation des relations de comparaison (déjà vue pour les séries numériques).
- Remarque : les théorèmes de permutation limite/intégrale ou permutation série/intégrale seront étudiés dans des chapitres ultérieurs.

# Programme de colle 2

## Semaine du lundi 30/09/2024

---

- Révisions MP2I : arithmétique, polynômes, groupe symétrique
- Chapitre 3 MPI : Structures algébriques usuelles

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

La première partie de la colle (**25 min maximum**) consiste en une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes. Certaines questions de cours sont réservées aux MPI\*.

### Liste des questions de cours :

- Énoncé et démonstration des théorèmes 11 et 59 (sous-groupes et idéaux de  $\mathbb{Z}$ ).
- Énoncé et démonstration du théorème 78 (idéaux de  $\mathbb{K}[X]$ ).
- (MPI\*) Énoncé et démonstration du théorème 26 (classification des groupes monogènes).
- (MPI\*) Énoncé et démonstration du théorème 68 (théorème chinois).
- (MPI\*) Énoncé et démonstration de la propriété 70 + du théorème 71 (condition d'inversibilité dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un corps ssi  $n$  est premier).

### Liste des exercices de la banque INP :

- Ex 84 (racines n-ièmes de l'unité)
- Ex 85 (multiplicité d'une racine et factorisation de polynômes)
- Ex 86 (démonstration du petit théorème de Fermat avec les outils de MP2I)
- Ex 89 (calcul d'une somme de sinus)
- Ex 94 (système de congruences)

La seconde partie de la colle consiste en la résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI\* seront plus difficiles.

### Notions importantes :

- Les différentes structures et leurs morphismes (groupes, anneaux, corps) ;
- Ordre d'un élément dans un groupe, sous-groupe engendré par un élément ;
- Idéaux d'un anneau commutatif, idéal engendré par un élément ;
- Traduction de problèmes d'arithmétique dans les anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , utilisation du théorème chinois ;
- Inversibilité dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , indicatrice d'Euler ;
- Arithmétique des polynômes, polynômes irréductibles.

# Programme de colle 3

## Semaine du lundi 07/10/2024

---

- Révisions MP2I : Algèbre linéaire (espaces vectoriels, applications linéaires, matrices, déterminants).
- Chapitre 4 MPI : Compléments d'algèbre linéaire

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

La première partie de la colle (**25 min maximum**) consiste en une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes. Certaines questions de cours sont réservées aux MPI\*.

### Liste des questions de cours :

- Démonstration de : "Une application linéaire  $u : E \rightarrow F$  est injective ssi  $\text{Ker}(u) = \{0\}$ , surjective ssi  $\text{Im}(u) = F$ " (cours MP2I, CH.18)
- Démonstration de : "Une application linéaire  $u : E \rightarrow F$  est injective ssi  $u$  transforme toutes les familles libres  $(e_i)_{i \in I}$  en familles libres  $(u(e_i))_{i \in I}$ " (cours MP2I, CH.18).
- Démonstration de : "Une application linéaire  $u : E \rightarrow F$  est surjective ssi  $u$  transforme toutes les familles génératrices  $(e_i)_{i \in I}$  de  $E$  en des familles  $(u(e_i))_{i \in I}$  génératrices de  $F$ " (cours MP2I, CH.18).
- (MPI\*) Enoncé et démonstration du théorème 5 du CH.4 (caractérisations d'une somme directe).
- (MPI\*) Enoncé et démonstration du théorème 6 du CH.4 (caractérisation d'une somme directe avec les dimensions).

### Liste des exercices de la banque INP :

- Ex 55 (suites récurrentes linéaires doubles)
- Ex 60 (étude d'un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ )
- Ex 64 (endomorphismes avec noyau et image supplémentaires)
- Ex 71 (étude d'un projecteur de  $\mathbb{R}^3$ )
- Ex 87, 90 (interpolation de Lagrange)

La seconde partie de la colle consiste en la résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI\* seront plus difficiles.

### Notions importantes :

- Résoudre un système linéaire ;
- Reconnaître un SEV, passer de la définition "implicite" d'un SEV (par équation cartésienne) à la définition "paramétrique" (en déterminant une base), et réciproquement ;
- Ecrire la matrice d'une application linéaire dans un couple de bases ;
- Déterminer noyau, image, rang d'une application linéaire (ou d'une matrice) ;
- Raisonnements avec les dimensions (par ex. inclusion + égalité des dimensions) ;
- Projecteurs et symétries ;
- Base adaptée à une somme directe ;
- Produit de matrices par blocs, calculs de déterminants par blocs ;
- **Pas d'espaces préhilbertiens et de produits scalaires pour le moment.**

# Programme de colle 4

## Semaine du lundi 04/11/2024

---

- **Chapitre 5 MPI : Généralités sur les espaces vectoriels normés**
- **Révisions MP2I : Espaces préhilbertiens.**
- **Chapitre 6 MPI : Espaces préhilbertiens (partie I sur les proj. orth. seulement)**

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

### 1) Première partie (25 min maximum)

Une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes. Certaines questions de cours sont réservées aux MPI\*.

#### Liste des questions de cours :

- CH5 : Enoncé et preuve prop 30 + 31 (limite d'une norme, d'un produit externe, d'un inverse scalaire).
- **(MPI\*)** CH6 : Enoncé et preuve théorème 1 (supplémentaire orthogonal) + corollaire 3 (double orthogonal)
- CH6 : Enoncé et preuve théorème 9 + corollaire 10 (distance atteinte par la projection orthogonale + autre formule).

#### Liste des exercices de la banque INP :

- Ex 76 (inégalité de Cauchy-Schwarz)
- Ex 77 (relations d'orthogonalité)
- Ex 79 (produit scalaire intégral)
- Ex 80 (calcul de projeté orthogonal avec fonctions trigo)
- Ex 81, 82 (calcul de distance avec des matrices  $2 \times 2$ )
- Ex 92 (matrices symétriques et antisymétriques)

### 2) Seconde partie (30 min minimum)

Résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI\* seront plus difficiles.

#### Notions importantes du CH5 :

- Vérifier qu'une application est une norme ;
- Manipuler des inégalités avec des normes, faire le lien entre majoration de norme et appartenance à une boule ;
- Reconnaître les normes issues d'un produit scalaire ;
- Convergence des suites vectorielles ;
- Comparer deux normes (domination, équivalence) ;
- **Les notions de topologie (ouverts, fermés, continuité, compacité, connexité par arcs, etc.) seront traitées dans le CH7.**

#### Notions importantes du CH6 :

- Montrer qu'une application est un produit scalaire, et connaître les produits scalaires classiques.
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et le cas d'égalité.
- Notion d'orthogonalité entre vecteurs / sous-espaces vectoriels.
- Bases orthonormées, orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- Projection orthogonale sur un sev de dimension finie, méthode de calcul. Problèmes de distance.
- **Le groupe orthogonal sera au programme de la prochaine colle.**

# Programme de colle 5

## Semaine du lundi 18/11/2024

---

- **Chapitre 6 MPI : Espaces préhilbertiens et groupe orthogonal**

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

### 1) Première partie (25 min maximum)

Une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes.

#### Liste des questions de cours :

- Enoncé et preuve prop. 17 + prop. 20 (correspondance entre isométries et matrices orthogonales).
- Enoncé et preuve prop. 35 (matrices de  $O_2(\mathbb{R})$ ) + prop. 38 (invariance par rapport aux bond en dim 2) + def. 39 (rotation plane).
- Enoncé et preuve prop. 25 (caractérisation des symétries orthogonales) + prop. 41 (en dim 2, les isom négatives sont les réflexions).

#### Liste des exercices de la banque INP :

- Ex 78 (propriétés des isométries vectorielles)

### 2) Seconde partie (30 min minimum)

Résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI\* seront plus difficiles.

#### Notions importantes :

- Produits scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, orthogonalité, Gram-Schmidt, projection orthogonale, distance.
- Isométries vectorielles : différentes caractérisations, représentation par les matrices orthogonales, classification en dimension 2.

**L'étude des isométries en dimension 3 n'a pas été faite, elle sera reprise ultérieurement dans le chapitre sur l'adjoint d'un endomorphisme (où l'on étudiera aussi les endomorphismes symétriques).**

# Programme de colle 6

## Semaine du lundi 25/11/2024

---

- **Chapitre 7 MPI : Topologie des espaces vectoriels normés (tout le chapitre)**

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

### 1) Première partie (25 min maximum)

Une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes. Certaines questions de cours sont réservées aux MPI\*.

#### Liste des questions de cours :

- Énoncé et démonstration de la proposition 6 : toute boule ouverte (resp. fermée) est un ouvert (resp. un fermé), les sphères et les singletons sont fermés.
- Énoncé et démonstration du th. 17 + cor. 19 (caractérisations séquentielles de l'adhérence et des fermés).
- **(MPI\*)** Énoncé et démonstration du th. 47 + cor. 48 (caractérisation ensembliste de la continuité).
- **(MPI\*)** Énoncé et démonstration du th. 54 (propriétés d'une norme subordonnée)
- **(MPI\*)** Énoncé et démonstration du th. 55 (continuité des applications bilinéaires)
- Énoncé et démonstration du th. 60 (compacité et valeurs d'adhérence)
- **(MPI\*)** Énoncé et démonstration du th. 64 (théorème de Heine)

#### Liste des exercices de la banque INP :

- Ex 1 (non équivalences des normes 1 et infinie sur les fonctions continues et calcul d'adhérence des fonctions nulles en 0)
- Ex 13 (compacité)
- Ex 34 (adhérence d'un convexe)
- Ex 35 (caractérisation séquentielle continuité)
- Ex 36 (caractérisation de la continuité des applications linéaires)
- Ex 37 (non équivalence de normes)
- Ex 38 (normes triples)
- Ex 39 (suites de carré sommable)
- Ex 44 (adhérence d'une réunion, d'une intersection)
- Ex 45 (convexité et distance)
- Ex 54 (application linéaire définie par une série)

### 2) Seconde partie (30 min minimum)

Résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI\* seront plus difficiles.

#### Notions importantes :

- Manipuler les notions de boules, voisinages, ouverts, fermés, intérieur, adhérence, dans différents contextes (espaces  $\mathbb{K}^n$ , espaces de polynômes, de suites, de fonctions, ...).
- Manipuler les différentes caractérisations séquentielles (pour les points adhérents, les parties fermées, les limites de fonctions, la continuité des fonctions).
- Montrer qu'un ensemble est ouvert / fermé en le faisant apparaître comme une image réciproque d'un ouvert / fermé par une application continue.

- Etudier la continuité d'une application linéaire ou multilinéaire vis à vis d'une certaine norme. Calcul de normes triples.
- Faire un raisonnement de compacité (avec des suites extraites).
- Chemins et connexité par arcs.
- Exploiter les différentes propriétés de la topologie en dimension finie (équivalence des normes, compacité des fermés/bornés, continuité des applications linéaires, etc.)

# Programme de colle 7

## Semaine du lundi 02/12/2024

---

- **Chapitre 8 MPI : Réduction des endomorphismes, aspects géométriques**

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

### 1) Première partie (25 min maximum)

Une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP**, choisi par le colleur parmi les listes suivantes. Certaines questions de cours sont réservées aux MPI\*.

#### Liste des questions de cours :

- Énoncé et preuve théorème 8 : indépendance linéaire des sous-espaces propres et famille de vecteurs propres libre.
- **(MPI\*)** Énoncé et preuve de la prop 11 : structure polynomiale de  $\lambda \mapsto \det(\lambda Id - u)$ .
- Énoncé et preuve des théorèmes 23 + 24 : polynôme caract. d'un endo. induit et majoration de la dimension d'un sous-espace propre.
- **(MPI\*)** Énoncé et preuve des théorèmes 28 + 29 : caractérisation des endomorphismes diagonalisables et théorème de diagonalisation.
- **(MPI\*)** Énoncé et preuve du théorème 34 : théorème de trigonalisation.
- **(MPI\*)** Énoncé et preuve du théorème 41 : caractérisation en dim finie des endomorphismes nilpotents.

#### Liste des exercices de la banque INP :

- Ex 59, 67, 69, 70 (exemples d'études de diagonalisabilité),
- Ex 72 (endomorphismes de rang 1),
- Ex 73 (calcul de commutant),
- Ex 83 (valeurs propres de  $u \circ v$  et  $v \circ u$ ).

### 2) Seconde partie (30 min minimum)

Résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI\* seront plus difficiles.

#### Notions importantes :

- Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres,
- Polynôme caractéristique et majoration de la dimension d'un sous-espace propre,
- CNS pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, méthode pratique de diagonalisation,
- CNS pour qu'un endomorphisme soit trigonalisable, trigonalisation explicite en petite dimension (2 ou 3),
- Expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres (comptées avec multiplicité),
- Caractérisation des endomorphismes nilpotents.

# Programme de colle 8 **modifié**

## Semaine du lundi 09/12/2024

---

- Chapitre 9 : Réduction des endomorphismes, aspects algébriques
- Chapitre 10 : Suites de fonctions (**sans la partie IV sur l'approximation uniforme**)

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

### 1) Première partie de la colle : (25 minutes max)

- **Pour tout le monde en début de colle** : énoncer sans démonstration un ou plusieurs théorèmes du CH.10 (continuité d'une limite de fonctions, double limite, dérivabilité, intégration, ...).
- **Ensuite**, comme d'habitude, une question de cours ou un exercice INP au choix parmi les listes suivantes. Certaines questions de cours sont réservées aux MPI\*.

Liste des questions de cours :

- (MPI\*) Énoncé et preuve du théorème 15 (de Cayley-Hamilton).
- (MPI\*) Énoncé et preuve du théorème 19 (lemme de décomposition des noyaux).

Liste des exercices de la banque INP sur le CH.9 :

- Ex. 62 (Etude d'un endomorphisme avec polynôme annulateur de degré 2)
- Ex. 65 (Composition sur  $\mathbb{K}[u]$  et applications aux polynômes annulateurs)
- Ex. 88 (Polynôme annulateur d'un endo de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et diagonalisabilité)
- Ex. 91 (Calcul du polynôme minimal d'une matrice  $3 \times 3$  et calcul de puissance)
- Ex. 93 (Utilisation du lemme des noyaux sur un exemple)

Liste des exercices de la banque INP sur le CH.10 :

- Ex 9, 10, 11 (exemples d'études de CVU)
- ~~Ex 12 (limite uniforme de fonctions continues)~~
- ~~Ex 48 (fonctions de moments nuls)~~

### 2) Seconde partie de la colle (30 minutes min)

Résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI\* seront plus difficiles.

Notions importantes du CH.9 :

- Lien entre valeurs propres et racines d'un polynôme annulateur de  $u \in \mathcal{L}(E)$ .
- Montrer qu'un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable en exhibant un polynôme annulateur scindé à racines simples.
- Déterminer le polynôme minimal à partir des diviseurs du polynôme caractéristique.
- Calculer les puissances d'une matrice ou d'un endo à l'aide d'un polynôme annulateur.
- A l'aide d'un polynôme annulateur et du lemme des noyaux, décomposer l'espace  $E$  en somme directe de sous-espaces stables par  $u$ , et en déduire une matrice représentative simple de  $u$ .

Notions importantes du CH.10 :

- Etudes de CVS / CVU sur des exemples.
- Arguments pour montrer qu'une convergence simple n'est pas uniforme : discontinuité de la limite simple, choix d'une suite adéquate, fonctions  $f_n - f$  non bornées, ...
- Intervertir une limite et une intégrale sur un segment par convergence uniforme (**pas de th. de convergence dominée pour l'instant, il sera au programme de la prochaine colle**).
- **Ne pas parler de séries de fonctions, elles seront au programme de la prochaine colle.**

# Programme de colle 9

## Semaine du lundi 06/01/2025

---

- **Chapitre 10 : Suites de fonctions**
- **Chapitre 11 : Séries de fonctions**
- **Chapitre 12 : Interversioin limite-intégrale**

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

### 1) Première partie de la colle : (25 minutes max)

- **Pour tout le monde en début de colle** : énoncer sans démonstration un ou plusieurs théorèmes des trois chapitres.
- **Ensuite**, un exercice INP au choix parmi les listes suivantes (pas de questions de cours cette semaine).

#### Liste des exercices de la banque INP sur le CH10 :

- Ex 12 (limite uniforme de fonctions continues)
- Ex 48 (fonctions de moments nuls)

#### Liste des exercices de la banque INP sur le CH11 :

- Ex 8 (utilisation du CSSA pour montrer la CVU),
- Ex 14 (CVU et série d'intégrales) : *attention, dans le corrigé officiel, on parle de "série entière" (notion pas encore étudiée) dans la question 3, mais il n'y en a pas besoin, car la convergence normale de la série  $\sum x^n$  sur le segment  $[0, 1/2]$  est évidente.*
- Ex 16 (dérivabilité d'une série de fonctions),
- Ex 17 (lien entre CVU série et CVU suite),
- Ex 53 (continuité et limite en  $+\infty$  d'une série de fonctions).

#### Liste des exercices de la banque INP sur le CH12 :

- Ex. 25,26 : Utilisation du th de convergence dominée
- Ex. 27 : Etude d'une suite d'intégrales (avec CV uniforme et CV dominée)
- Ex. 29 : Fonction Gamma (def, formule factorielle, dérivabilité)
- Ex. 30 : Dérivation intégrale à paramètre avec éq diff ordre 1
- Ex. 49 : Exemple long d'utilisation du th. d'intégration terme à terme
- Ex. 50 : Continuité et équivalent d'une intégrale à paramètre

### 2) Seconde partie de la colle (30 minutes min)

Résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI\* seront plus difficiles.

#### Notions importantes :

- Les notions de la colle précédente (sur les suites de fonctions)
- Les différentes notions de convergence pour les séries de fonctions (CVS, CVA, CVU, CVN), et les liens entre elles.
- Plan d'étude de la convergence d'une série de fonctions (après avoir établi la CVS, tester la CVN, et si elle échoue, tester la CVU en étudiant la suite des restes).
- Savoir appliquer les théorèmes principaux (continuité, dérivabilité d'une série de fonctions, double limite, convergence dominée, intégration terme à terme d'une série de fonctions (avec CVU sur un segment ou à la Fubini sur un intervalle quelconque), continuité d'une intégrale à paramètre, dérivation d'une intégrale à paramètre, classe  $\mathcal{C}^k$  d'une intégrale à paramètre), **en vérifiant soigneusement les hypothèses**.
- Savoir majorer  $|f(x, t)|$  indépendamment de  $x$  par une fonction intégrable  $t \mapsto \varphi(t)$ , en limitant éventuellement  $x$  à un segment  $[a, b]$ .

# Programme de colle 10

## Semaine du lundi 13/01/2025

---

- **Chapitre 13 : Réduction des endomorphismes, aspects euclidiens**

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

### 1) Première partie de la colle : (25 minutes max)

Une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP** au choix parmi les listes suivantes. Certaines questions de cours sont réservées aux MPI\*.

#### Liste des questions de cours :

- Énoncé et preuve des théorèmes 1 (représentation des formes linéaires d'un espace euclidien) et 2 (existence et unicité de l'adjoint).
- Énoncé et preuve des théorèmes 4 (matrice de l'adjoint en BON) et 5 (stabilité de l'orthogonal d'un sev stable).
- (MPI\*) Énoncé et preuve de la prop 8 (orthogonal d'un SEV stable par une isométrie) + lemme 9 (existence d'une droite ou plan stable) + théorème 10 (réduction diagonale par blocs des isométries).
- (MPI\*) Énoncé et preuve du lemme 19 (existence d'une vp réelle pour un auto-adjoint) + lemme 20 (les SEP d'un auto-adjoint sont orthogonaux) + théorème 21 (théorème spectral).

#### Liste des exercices de la banque INP :

- Ex. 63 : Endomorphismes qui commutent avec leur adjoint
- Ex. 66 : Propriétés des matrices symétriques positives
- Ex. 68 : Diagonalisation d'une matrice  $3 \times 3$  en base orthonormée
- Ex. 78 : Propriétés des isométries vectorielles

### 2) Seconde partie de la colle (30 minutes min)

Résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI\* seront plus difficiles.

#### Notions importantes :

- Propriétés de l'adjoint d'un endomorphisme, notamment : si  $u(F) \subset F$ , alors  $u^*(F^\perp) \subset F^\perp$ .
- Lien entre adjoint et transposition matricielle.
- Isométries vectorielles : différentes caractérisations, représentation par les matrices orthogonales, classification en dimension 2 (voir CH.6), rotations en dimension 3, réduction diagonale par blocs en dimension quelconque.
- Endomorphismes auto-adjoints : représentation par les matrices symétriques, diagonalisation en base orthonormée (théorème spectral), application aux matrices réelles symétriques.
- Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis positifs, matrices symétriques positives, définies positives, lien avec le signe des valeurs propres.

# Programme de colle 11

## Semaine du lundi 27/01/2025

---

### • Chapitre 14 : Séries entières

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

#### 1) Première partie de la colle : (25 minutes max)

Une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP** au choix parmi les listes suivantes. Certaines questions de cours sont réservées aux MPI\*.

##### Liste des questions de cours :

- (MPI\*) Énoncé et preuve lemme 3 (lemme d'Abel) + lemme 4 (intervalle de bornage) + théorème 6 (propriété fondamentale du rayon de cv).
- (MPI\*) Énoncé et preuve propriété 11 ( $\sum a_n z^n$  et  $\sum n^\alpha a_n z^n$  ont le même rayon de convergence).
- Énoncé et preuve du théorème 36 (DSE de  $(1+x)^\alpha$ ).

##### Liste des exercices de la banque INP :

- Ex. 2 : Calcul DSE fraction rationnelle.
- Ex. 15 : CVN implique CVU + exemples.
- Ex. 18 : Étude de la continuité d'une série entière au bord avec majoration du reste
- Ex. 19 : Nouvel exercice sur la dérivation terme à terme et le produit de Cauchy.
- Ex. 20 : Trois calculs de rayons de convergence
- Ex. 21 : Séries entières avec  $(a_n)$  bornée. Ex de calcul de rayon
- Ex. 22 : Rayon de cv d'une somme + étude d'un exemple
- Ex. 23 : Dérivation terme à terme d'une série entière dans un cas simple
- Ex. 24 : DSE ch et exemple de recollement  $C^\infty$
- Ex. 47 : Deux calculs de rayon et sommes de séries entières
- Ex. 51 : Calcul série avec DSE arcsin

#### 2) Seconde partie de la colle (30 minutes min)

Résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI\* seront plus difficiles.

##### Notions importantes :

- Déterminer le rayon de convergence d'une série entière avec les différentes techniques.
- Les DSE usuels (et leurs rayon de convergence et domaine de validité) doivent être connus par coeur.
- Montrer qu'une fonction est DSE et calculer son DSE à partir des DSE connus, ou avec la formule de Taylor avec reste intégral, ou encore en utilisant une équation différentielle simple vérifiée par la fonction (par identification des coefficients).
- Calculer une somme donnée en se ramenant à des DSE connus (en utilisant éventuellement des dérivations ou intégrations terme à terme).
- Dans un prochain chapitre (équations différentielles linéaires), les séries entières permettront de rechercher des solutions explicites d'équations différentielles données (on posera ce type d'exercice à ce moment-là).

# Programme de colle 12

## Semaine du lundi 03/02/2025

---

- **Chapitre 15 : Séries et fonctions vectorielles**
- **Chapitre 16 : Equations différentielles linéaires (parties I,II,III)**

La colle dure **1h** et se décompose en deux parties.

### 1) Première partie de la colle : (25 minutes max)

Une **question de cours** ou un **exercice de la banque INP** au choix parmi les listes suivantes. Certaines questions de cours sont réservées aux MPI\*.

**Liste des questions de cours :**

- **(MPI\*)** Démonstration du théorème 16 (propriétés de l'exponentielle de matrice)
  - (i) Continuité de  $A \mapsto \exp(A)$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
  - (ii) Dérivabilité et dérivée de  $t \mapsto \exp(tA)$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - (iii) Si  $AB = BA$ , alors  $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ .
  - (iv) Inversibilité et inverse de  $\exp(A)$ .

**Liste des exercices de la banque INP :**

- Ex. 32 : Résolution d'une eq diff d'ordre 2 avec séries entières
- Ex. 40 : Inverse de  $1 - u$  dans une algèbre normée
- Ex. 42 : Pb de recollement sur une équation diff d'ordre 1
- Ex. 61 : Définition de l'exponentielle de matrice
- Ex. 74 : Résolution d'un système différentiel 3\*3 diagonalisable
- Ex. 75 : Résolution d'un système différentiel 2\*2 trigonalisable

### 2) Seconde partie de la colle (30 minutes min)

Résolution d'un ou plusieurs exercices, proposés par le colleur. Les exercices posés en MPI\* seront plus difficiles.

**Notions importantes :**

- Equivalence entre système différentiel d'ordre 1 à valeurs dans  $\mathbb{K}^n$  et équation scalaire d'ordre  $n$ .
- Théorème de Cauchy-Lipschitz.
- Dimension de l'espace vectoriel des solutions d'une EDL homogène **sous forme résolue**, isomorphisme explicite avec  $E$ .
- Recherche de solutions développables en série entière.
- Problèmes de recollement.
- **Les notions suivantes n'ont pas encore été traitées (elles seront au programme de la prochaine colle) :** système fondamental de solutions, wronskien d'une famille de solutions, méthode de variation de la (ou des) constante(s) sur les systèmes ou les équations scalaires. Mais la méthode de variation de la constante sur les équations scalaires d'ordre 1 est déjà connue (MP2I).