Exercices du CH20 : Calcul différentiel - aspects appliqués

Exercices de la banque INP à étudier : ex 41, 56

I Vecteurs tangents

Exercice 1 (*Tangente à une hyperbole)
On appelle *hyperbole* une courbe du plan d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
Déterminer une équation cartésienne de la tangente en un point (x_0, y_0) d'une telle courbe.

Exercice 2 (*Un calcul de plan tangent)
Calculer l'équation du plan tangent au point $(x_0, y_0, z_0) = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ à la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$z = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y - 1).$$

Exercice 3 (Plans tangents à un ellipsoïde)**
Soit $(\mathcal{S})$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ et $(\mathcal{D})$ la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} y = 3x \\ z = -2x \end{array}\right.$.
Déterminer les plans tangents à $(\mathcal{S})$ qui sont orthogonaux à $(\mathcal{D})$.

Exercice 4 (*Le retour du groupe symplectique)**
Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, et $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}),\ M^\top JM = J\}$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un groupe.
2. Montrer que l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{S}$ en I_{2n} est

$$T_{I_{2n}}\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}),\ M^\top J + JM = 0\}.$$

3. Montrer que $T_{I_{2n}}\mathcal{S}$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

II Problème d'extrema, matrice hessienne

Exercice 5 (*Extrema sur ouvert)
Rechercher les extrema locaux des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y, \quad g(x,y) = y^2(y^2 - x^4), \quad h(x,y) = 2x^2 + xy - y^2 - 3x - 3y + 1.$$

Exercice 6 (*Extrema sur un triangle)
Soit $f : (x,y) \mapsto xy(1-x-y)$ définie sur $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\right\}$.

1. Justifier que f est continue et présente un maximum à l'intérieur de T.
2. Déterminer sa valeur.

Exercice 7 (*Extrema sur un carré)
Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} [-1,1]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xe^y + ye^x \end{array}\right.$.
Étudier les extrema de f, à commencer par la question de leur existence.

Exercice 8 (Une inégalité)**
Soient un entier $n \geq 2$ et $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs de somme égale à 1. Montrer l'inégalité :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i) \leq \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}.$$

Exercice 9 (Distance d'un point à un hyperplan)**

On munit l'espace $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On considère l'hyperplan affine :

$$\mathcal{H} : \; \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta.$$

1. Soit $M_0 \in E$. Montrer que la distance $d = d(M_0, \mathcal{H})$ est atteinte.
2. Déterminer d à l'aide d'une minimisation sous contrainte.
3. Retrouver ce résultat à l'aide d'un raisonnement géométrique.

Exercice 10 (Conditions sur la hessienne)**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

1. On suppose la hessienne de f nulle en tout point. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = (a|x) + b.$$
2. On suppose la hessienne de f constante sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = \frac{1}{2}(u(x)|x) + (a|x) + b.$$

Exercice 11 (*Minimisation et système linéaire)**

Soit E un espace euclidien, $a \in \mathcal{S}^{++}(E)$ et $b \in E$. On note $\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(x) = (a(x)|x) - 2(b|x).$$

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.
2. En déduire que φ admet un minimum global sur E.
3. Montrer que ce minimum est atteint en l'unique solution du système linéaire $a(x) = b$.

Exercice 12 (*Fonctions convexes à plusieurs variables)**

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* lorsque :

$$\forall (x, y) \in \Omega^2, \; \forall t \in [0, 1], \qquad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

(remarquer que par convexité de Ω, on a bien $(1-t)x + ty \in \Omega$ pour tout t).

1. Montrer que f est convexe sur Ω si et seulement si pour tout $(x, y) \in \Omega^2$, la fonction réelle $\Phi_{x,y} : t \mapsto f((1-t)x + ty)$ est convexe sur $[0, 1]$.
2. On suppose que f est différentiable sur Ω.
   (a) Soit $(x, y) \in \Omega^2$. Justifier que $\Phi_{x,y}$ est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer sa dérivée en fonction de ∇f.
   (b) En déduire que f est convexe si et seulement si
   $$\forall (x, y) \in \Omega^2, \qquad f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x)|y - x).$$
   (c) Montrer que cette dernière condition est équivalente à
   $$\forall (x, y) \in \Omega^2, \qquad (\nabla f(y) - \nabla f(x)|y - x) \geq 0.$$
3. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ convexe et différentiable, et soit $x^* \in \Omega$ tel que $\nabla f(x^*) = 0$.
   Montrer que f admet un minimum global en x^*.

Exercice 13 (Le retour du théorème spectral)**
Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$. On considère l'ouvert $\Omega = E \setminus \{0_E\}$, et on pose

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = \frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}.$$

1. Montrer que f est bornée sur Ω et atteint un maximum en un point x_0 de la sphère unité.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et calculer sa différentielle en tout point $x \in \Omega$.
3. En déduire que x_0 est un vecteur propre de u.
4. Démontrer le théorème spectral : il existe une base orthonormée de vecteurs propres de u.

III Équations aux dérivées partielles

Exercice 14 (*EDP d'ordre 1)

1. Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \nabla f(x,y) = (0, 2y).$$
2. Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y f(x,y).$$
3. A l'aide d'un changement de variable linéaire, déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 15 (EDP d'ordre 1)**
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telles que pour tout $(x,y) \in \Omega$:

1. $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x}$, avec $\Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,
en utilisant le changement de variable $(u,v) = (x, y/x)$.
2. $f(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + x^2 + y^2 = 0$, avec $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$,
en utilisant le changement de variable en coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Exercice 16 (Résolution en coordonnées polaires)**

1. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y > 0\}$. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. On considère l'application $\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Déterminer un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que φ réalise une bijection de $\mathcal{U}$ sur Ω.
On note toujours $\varphi : \mathcal{U} \to \Omega$ cette bijection.
3. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, puis calculer φ^{-1} et montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
4. Via le changement de variable $(x,y) = \varphi(r,\theta)$, résoudre l'EDP :
$$\forall (x,y) \in \Omega, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x+y},$$
d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Exercice 17 (EDP d'ordre 2)**

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy,$$

en passant aux coordonnées polaires.

Exercice 18 (*Equation des ondes)**

On note $A = [0\,;1] \times [0\,;+\infty[$. On s'intéresse dans cet exercice à l'équation des ondes :

$$\forall (x,t) \in A, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) = 0 \qquad (1)$$

(il n'y a pas le facteur $1/c^2$ car on a "adimensionné").

Toutes les fonctions intervenant dans cet exercice sont à valeurs réelles.

1. Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant (1).
   On considère la fonction E_F définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$E_F(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) \right)^2 \right] dx.$$

   (a) Montrer que E_F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$.

   (b) Montrer : $\forall t \geq 0$, $E_F'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(1,t)\frac{\partial F}{\partial t}(1,t) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,t)\frac{\partial F}{\partial t}(0,t)$.

2. On se donne deux fonctions g et h définies et continues sur $[0\,;1]$ ainsi que deux fonctions α et β définies et continues sur $[0\,;+\infty[$. On cherche à résoudre le système suivant, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$:

$$(S) : \quad \begin{cases} \forall (x,t) \in A, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0 & (2) \\ \forall x \in [0\,;1]\,, \ f(x,0) = g(x), \quad \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = h(x) & (3) \\ \forall t \geq 0, \ f(0,t) = \alpha(t), \quad f(1,t) = \beta(t). & (4) \end{cases}$$

   (a) Soient f_1 et f_2 deux solutions de (S). On pose $F = f_1 - f_2$. Vérifier que F satisfait (1).

   (b) Montrer que $E_F'(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

   (c) Montrer que $E_F(0) = 0$ et en déduire que (S) possède au plus une solution.

3. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de réels. On définit les fonctions h et f par :

$$h(x) = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^3} \sin(n\pi x), \quad f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4} \sin(n\pi x)\sin(n\pi t).$$

   (a) Montrer que h est définie et continue sur $[0\,;1]$.

   (b) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et possède des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sur $\mathbb{R}^2$.
   On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

   (c) Montrer que f est solution du système (S) dans le cas où les fonctions g, α et β sont nulles.