Exercices du CH19 : Calcul différentiel - aspects théoriques

Exercices de la banque INP à étudier : ex 33, 52, 57, 58

I Continuité, dérivées directionnelles

Exercice 1 (*Continuité en 0)
Les applications suivantes sont-elles continues en $(0,0)$? Sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

1. $f:(x,y)\mapsto f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3} & \text{si } x^3+y^3\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$
2. $g:(x,y)\mapsto g(x,y)=\begin{cases}x^2\sin(\frac{y}{x}) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$

Exercice 2 (**)
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^6}{x^6+(x^2-y)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$
Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ selon tout vecteur sans pour autant y être continue.

Exercice 3 (**)
Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que l'application $g:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si } x\neq y\\ f'(x) & \text{si } x=y\end{cases}$ est continue.

Exercice 4 (*Premiers calculs)

1. Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ différentiable, $g:\begin{cases}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x,-2x)\end{cases}$ et $h:\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & f(y,x)\end{cases}.$
   Calculer g', $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y}$.
2. Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
$$f:(x,y)\mapsto\varphi(x^2y),\quad g:(x,y)\mapsto\int_{x-y}^{x+y}\varphi(t)dt.$$

Exercice 5 (Passage aux coordonnées polaires)**
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

1. Justifier que g est différentiable.
2. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
3. Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

Exercice 6 (*Matrice jacobienne)
Déterminer la matrice jacobienne en un point quelconque de
$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (r,\theta,\varphi) & \longmapsto & \big(r\cos(\theta)\cos(\varphi),r\sin(\theta)\cos(\varphi),r\sin(\varphi)\big)\end{cases}.$$
(f est le changement de variable en coordonnées sphériques).
Calculer aussi le déterminant de cette matrice (qu'on appelle le **jacobien**).

Exercice 7 (**)
Montrer que l'application $f:\begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & M^\top M\end{cases}$ admet des dérivées partielles en tout point et les calculer. L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 8 (Une série de fonctions)**
Montrer que l'application $S : (x, y) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

II Différentielles

Exercice 9 (*)
Soient u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E et x_0 un vecteur de E.
On étudie la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}(u(x) \mid x) + (x_0 \mid x)$.

1. Montrer que f est différentiable et exprimer sa différentielle.
2. Calculer le gradient de f en tout point de E.

Exercice 10 (*)
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & tr(M^3) \end{array} \right.$.
Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11 (*Différentielle et produit vectoriel)
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On pose $F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longmapsto & x \wedge u(x) \end{array} \right.$.
Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle en tout élément de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12 (Différentielle de l'inversion)**
Déterminer la différentielle en I_n puis en $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de $M \mapsto M^{-1}$.
Indication : Si une matrice de la forme $(I_n + H)$ est inversible, son inverse peut s'écrire comme somme d'une série...

Exercice 13 (*Différentielle du déterminant)**

1. Justifier que l'application $\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array} \right.$ est différentiable.
2. Calculer la différentielle de Δ en I_n.
   Une manière de faire : calculer les dérivées partielles dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$...
3. En déduire la différentielle de Δ en toute matrice M inversible.
4. En introduisant la comatrice de M, exprimer la différentielle de Δ en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Déterminer le vecteur gradient de Δ en M.

III Compléments sur les fonctions de deux variables

Exercice 14 (*Laplacien en coordonnées polaires)
Soient $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer le laplacien $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de g.

Exercice 15 (Fonctions harmoniques)**
Pour $(x, y) \in U = \mathbb{R} \times \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on pose $u(x, y) = \mathrm{ch}(x)\sin(y)$ et $v(x, y) = \mathrm{sh}(x)\cos(y)$.
On définit aussi $f = (u, v)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
2. Calculer la jacobienne de f et vérifier qu'elle est inversible en tout point de U.
3. Montrer que les fonctions u et v sont harmoniques, c'est-à-dire $\Delta u = 0$ et $\Delta v = 0$ (cf. la définition du laplacien Δ dans l'exercice 14).
4. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose $h = g \circ f$. Montrer que g est harmonique ssi h l'est.

Exercice 16 (Fonctions homogènes)**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ *homogène de degré* $n \in \mathbb{N}$, i.e. vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(tx, ty) = t^n f(x,y).$$

1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = nf(x,y)$.
2. On suppose $n \geq 1$. Montrer que les dérivées partielles de f sont elles aussi homogènes et préciser leur degré.

Exercice 17 (*Fonctions holomorphes (ou $\mathbb{C}$-dérivables))**
Toute fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ peut être écrite, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, sous la forme :

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

où u et v désignent deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
On se propose de trouver, s'il en existe, des fonctions f satisfaisant aux conditions suivantes :
C1. Les fonctions u et v sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
C2. Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$.

1. Démontrez que, si u et v existent, alors, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$
2. On suppose que $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + 3x$.
   (a) Trouvez les fonctions v telles que les conditions **C1** et **C2** soient satisfaites.
   (b) Démontrez qu'il existe une fonction $f = u + iv$ unique telle que $f(0) = 0$ et explicitez $f(z)$ en fonction de z.
3. On revient au cas général.
   On dit d'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qu'elle est **holomorphe** lorsqu'elle est $\mathbb{C}$-dérivable, c'est-à-dire lorsqu'en tout $z_0 \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe.
   Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe ssi $\varphi = (u,v)$ est différentiable et vérifie les conditions **C2**, appelées **conditions de Cauchy-Riemann**.

Exercice 18 (Démonstration du théorème de Schwarz (cas $E = \mathbb{R}^2$))**
On se donne une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $a = (a_1, a_2) \in U$.

1. Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall h_1 \in [-\alpha, \alpha], \forall h_2 \in [-\alpha, \alpha],\ (a_1 + h_1, a_1 + h_2) \in U$.
   On fixe dans la suite un tel élément $h = (h_1, h_2)$.
2. On considère la quantité $\Delta(h) = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2+h_2) + f(a_1, a_2)$.
   (a) Montrer qu'il existe $c_1(h)$, strictement compris entre a_1 et $a_1 + h_1$, tel que :
   $\Delta(h) = h_1 \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(c_1(h), a_2 + h_2) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(c_1(h), a_2) \right)$.
   (b) Montrer qu'il existe $c_2(h)$ strictement compris entre a_2 et $a_2 + h_2$ tel que :
   $\Delta(h) = h_1 h_2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c_1(h), c_2(h))$.
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{h \to (0,0)} \frac{\Delta(h)}{h_1 h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2)$.
3. Adaptez ce qui précède pour montrer qu'on a aussi $\displaystyle\lim_{h \to (0,0)} \frac{\Delta(h)}{h_1 h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2)$. Conclure.