Exercice 19 du CH18 : Variables aléatoires discrètes

Exercice 19 (*Points fixes de permutations)**
On considère la variable X_n égale au nombre de cycles disjoints d'une permutation de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$.

1. Établir : $\forall i \in \{1, \cdots, n+1\}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \dfrac{\mathbb{P}(X_n = i-1)}{n+1} + \dfrac{n\mathbb{P}(X_n = i)}{n+1}$.
2. En déduire, si G_n désigne la fonction génératrice de la loi X_n, qu'on a : $G_{n+1}(t) = \dfrac{n+t}{n+1} G_n(t)$.
3. En déduire l'expression factorisée du polynôme G_n.
4. Que vaut $E(X_n)$?

Corrigé de l'exercice 19

1. On munit l'univers S_n (groupe symétrique de $\{1, \cdots, n\}$, qui est de cardinal $n!$) de l'équiprobabilité $\mathbb{P}$ (on tire une permutation au hasard).
   La variable aléatoire X_n compte le nombre de cycles disjoints qui composent la permutation tirée (y compris les cycles de longueur 1, qui correspondent aux points fixes de la permutation), on a donc $X_n(\Omega) = \{1, \cdots, n\}$.

   Remarque
   Les cas extrêmes sont les n-cycles (événement $[X_n = 1]$), et l'identité (événement $[X_n = n]$).

   Par équiprobabilité, on a

   $$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \mathbb{P}(X_n = i) = \frac{Card(A_{n,i})}{Card(S_n)} = \frac{Card(A_{n,i})}{n!},$$

   où $A_{n,i}$ désigne l'ensemble des permutations de S_n composées de i cycles disjoints.
   Fixons $i \in [\![1, n+1]\!]$ et étudions une permutation $\sigma \in A_{n+1,i}$, qu'on peut décomposer sous la forme :

   $$\sigma = \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_i,$$

   avec les γ_j des cycles de supports disjoints (en comptant les 1-cycles).
   Plusieurs cas se présentent, selon la valeur de $\sigma(n+1)$:

   - $\boxed{\text{Si } \sigma(n+1) = n+1}$, alors il suffit de connaître la restriction $\sigma' = \sigma_{|[1,n]}$ pour déterminer σ et on a dans ce cas :

     $$\sigma = \sigma' \circ (n+1),$$

     donc σ' est composée de $i-1$ cycles, c'est-à-dire $\sigma' \in A_{n,i-1}$. De plus, en notant

     $$A_{n+1,i}^{(n+1)} = \{\sigma \in A_{n+1,i},\ \sigma(n+1) = n+1\},$$

     l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} A_{n+1,i}^{(n+1)} & \longrightarrow & A_{n,i-1} \\ \sigma & \longmapsto & \sigma' = \sigma_{|[1,n]} \end{array} \right.$ est clairement bijective, donc

     $$\boxed{Card(A_{n+1,i}^{(n+1)}) = Card(A_{n,i-1})}.$$

     Remarque
     Même si cette formule n'a a priori de sens que pour $i \geq 2$, elle vaut également pour $i = 2$ puisque $A_{n+1,1}^{(n+1)} = A_{n,0} = \emptyset$.

- $\boxed{\text{Si } \sigma(n+1) = a_1 \in [\![1,n]\!]}$, alors on se ramène au cas précédent en posant :

$$\rho = (a_1 \quad n+1) \circ \sigma.$$

En effet, cette nouvelle permutation vérifie $\rho(n+1) = n+1$, donc la restriction $\sigma' = \rho|_{[1,n]}$ définit un élément de S_n. Comptons le nombre de cycles de cette restriction. En supposant que a_1 fait partie du cycle γ_1 dans σ (ça ne change rien puisque les γ_j commutent deux à deux) , on a

$$\sigma = (n+1 \quad a_1 \cdots a_q) \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_i,$$

où $q \in \mathbb{N}^*$ et les a_j sont des entiers distincts dans $[\![1,n]\!]$, donc

$$\rho = (a_1 \quad n+1) \circ (n+1 \quad a_1 \cdots a_q) \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_i = (a_1 \cdots a_q) \circ (n+1) \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_i.$$

Ainsi, la restriction σ' se décompose de la manière suivante :

$$\sigma' = \rho|_{[1,n]} = (a_1 \cdots a_q) \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_i,$$

ce qui montre que σ' possède exactement i cycles (comme σ), et donc $\sigma' \in A_{n,i}$.
De plus, en notant

$$A^{(a_1)}_{n+1,i} = \{\sigma \in A_{n+1,i},\ \sigma(n+1) = a_1\},$$

l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} A^{(a_1)}_{n+1,i} & \longrightarrow & A_{n,i} \\ \sigma & \longmapsto & \sigma' = \rho_{|[1,n]} \end{array} \right.$ est clairement bijective, d'inverse

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A_{n,i} & \longrightarrow & A^{(a_1)}_{n+1,i} \\ \varphi & \longmapsto & (a_1 \quad n+1) \circ \varphi \end{array} \right. ,$$

donc

$$\boxed{Card(A^{(a_1)}_{n+1,i}) = Card(A_{n,i})},$$

et ce pour toute valeur $a_1 \in [\![1,n]\!]$.

Remarque
Même si cette formule n'a a priori de sens que pour $i \leq n$, elle vaut également pour $i = n+1$ puisque $A^{(a_1)}_{n+1,n+1} = A_{n,n+1} = \emptyset$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la relation de récurrence proposée. En partitionnant $A_{n+1,i}$ suivant la valeur de l'image de $n+1$ (notée k), on a la réunion disjointe :

$$A_{n+1,i} = \bigcup_{k=1}^{n+1} A^{(k)}_{n+1,i},$$

donc

$$Card(A_{n+1,i}) = \sum_{k=1}^{n} Card(A^{(k)}_{n+1,i}) + Card(A^{(n+1)}_{n+1,i}) = nCard(A_{n,i}) + Card(A_{n,i-1}),$$

d'après ce qui précède. On en déduit par équiprobabilité sur les permutations :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \frac{Card(A_{n+1,i})}{Card(S_{n+1})} = \frac{nCard(A_{n,i}) + Card(A_{n,i-1})}{(n+1)!},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \frac{n}{n+1}\mathbb{P}(X_n = i) + \frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X_n = i-1)}.$$

2. Puisque $X_n(\Omega) = \{1, \cdots, n\}$ pour tout n, on a pour tout réel t :

$$G_{n+1}(t) = G_{X_{n+1}}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(X_{n+1} = i)t^i.$$

D'après la question précédente :

$$G_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\mathbb{P}(X_n = i-1)}{n+1} + \frac{n\mathbb{P}(X_n = i)}{n+1} \right) t^i = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = i)t^{i+1} + \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = i)t^i.$$

Puisque $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = n+1) = 0$, on en déduit

$$G_{n+1}(t) = \frac{n+t}{n+1} G_n(t).$$

3. On a $X_1 = 1$ (VAD constante) donc $G_1(t) = t$ pour tout réel t. On en déduit par récurrence :

$$G_n(t) = \frac{n-1+t}{n} G_{n-1}(t) = \frac{(n-1+t)(n-2+t)}{n(n-1)} G_{n-2}(t) = \cdots = \frac{(n-1+t)(n-2+t)\cdots(1+t)}{n(n-1)\times\cdots\times 2} G_1(t),$$

c'est-à-dire

$$G_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t+k).$$

4. X_n étant une VAD finie, elle admet une espérance, et

$$E(X_n) = G_n'(1) = \left[\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j \neq k} (t+j) \right]_{t=1} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j \neq k} (1+j) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$