Exercices du CH17 : Espaces probabilisés

Exercices de la banque INP à étudier : ex 101, 105, 107, 112

Sauf mention du contraire, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

I TD du mardi 03/03

Exercice 1 (*Intersection et réunion de tribus)

1. Démontrer qu'une intersection quelconque de tribus sur Ω est une tribu sur Ω.
2. Que dire de la réunion de deux tribus ?

Corrigé de l'exercice 1

1. Soit I un ensemble d'indices quelconque et $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur un univers Ω. Montrons que $\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est une tribu sur Ω.
   Tout d'abord Ω appartient à tous les $\mathcal{A}_i$ donc $\Omega \in \mathcal{A}$.
   Si $A \in \mathcal{A}$, alors pour tout $i \in I$, $A \in \mathcal{A}_i$, donc $\overline{A} \in \mathcal{A}_i$. Donc $\overline{A} \in \mathcal{A}$.
   Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, alors chaque A_n est dans chaque $\mathcal{A}_i$, donc pour tout $i \in I$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}_i$. Donc $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
2. La réunion de deux tribus n'est pas une tribu en général. Par exemple, si a et b sont deux éléments distincts de Ω, alors $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \Omega \setminus \{a\}, \Omega\}$ et $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \Omega \setminus \{b\}, \Omega\}$ sont deux tribus sur Ω, mais leur réunion
   $$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \Omega \setminus \{a\}, \Omega \setminus \{b\}\}, \Omega\}$$
   n'en est pas une car elle n'est pas stable par réunion finie, étant donné que $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ n'est pas dans $\mathcal{A}$ (si Ω contient au moins 3 éléments distincts).

Exercice 2 (Tribus engendrées)**

Etant donné un univers Ω et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle **tribu engendrée par $\mathcal{C}$** l'ensemble :
$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ tribu sur } \Omega,\ \mathcal{C}\subset\mathcal{A}} \mathcal{A}.$$
D'après l'exercice précédent, il s'agit bien d'une tribu sur Ω, et c'est la plus petite (au sens de l'inclusion) qui contient $\mathcal{C}$ (par construction).

1. Lorsque $\mathcal{C} = \{A\}$, avec $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, déterminer $\sigma(\mathcal{C})$.
2. Soit $\Omega = \{a, b, c\}$.
   (a) Déterminer la tribu engendrée par $\mathcal{C}_1 = \Big\{\{a, b\}\Big\}$.
   (b) Déterminer la tribu engendrée par $\mathcal{C}_2 = \Big\{\{a\}, \{a, b\}\Big\}$.
3. On revient au cas général : si Ω est quelconque et si $\mathcal{C} = \{\{\omega\},\ \omega \in \Omega\}$, quelle est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$?

Corrigé de l'exercice 2

1. La tribu $\sigma(\mathcal{C})$ contient nécessairement les parties $\emptyset, \Omega, A$ et $\overline{A}$.
   - Si $A = \emptyset$ ou $A = \Omega$, alors $\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \Omega\}$.
   - Sinon, $\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ (on vérifie facilement que cet ensemble est bien stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable).

2. (a) D'après la question précédente,
$$\sigma(\mathcal{C}_1) = \{\emptyset, \{a,b\}, \{c\}, \{a,b,c\}\}.$$
   (b) La tribu engendrée par $\mathcal{C}_2$ contient nécessairement (en plus de $\emptyset$ et de $\{a,b,c\}$), les parties $\{a\}, \{a,b\}$, leurs complémentaires $\{b,c\}$, $\{c\}$, la réunion $\{a\} \cup \{c\} = \{a,c\}$, et son complémentaire $\{b\}$, donc en définitive toutes les parties de Ω.
   D'où $\mathcal{P}(\Omega) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$, et vu que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω (contenant $\mathcal{C}_2$), on a $\sigma(\mathcal{C}_2) = \mathcal{P}(\Omega)$.
3. La tribu $\sigma(\mathcal{C})$ contient tous les singletons de Ω, donc toutes les réunions finies ou dénombrables de singletons, c'est-à-dire toutes les parties finies ou dénombrables de Ω, ainsi que leurs complémentaires. D'où l'inclusion
$$\sigma(\mathcal{C}) \supset \mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega),\ A \text{ ou } \overline{A} \text{ au plus dénombrable}\}.$$
Reste à voir si $\mathcal{A}$ est bien une tribu sur Ω, cela prouvera l'inclusion réciproque.
Tout d'abord, $\mathcal{A}$ contient Ω (puisque son complémentaire $\emptyset$ est fini, donc au plus dénombrable), $\mathcal{A}$ est clairement stable par passage au complémentaire. Enfin, si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, alors deux cas se présentent :
   - si tous les A_n sont au plus dénombrables, alors leur réunion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ l'est aussi, donc $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
   - sinon, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{A_{n_0}}$ est au plus dénombrable, donc
$$\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} \subset \overline{A_{n_0}}$$
   est également au plus dénombrable (car plus petit), ce qui montre aussi que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Finalement, on conclut que
$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega),\ A \text{ ou } \overline{A} \text{ au plus dénombrable}\}.$$

Exercice 3 (Une probabilité sur $\mathbb{N}$)**

1. Montrer qu'on définit une probabilité sur $\mathbb{N}$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{en!}$.
2. On note a_n la probabilité qu'un entier soit supérieur ou égal à n. Montrer que $a_n \leq \dfrac{1}{n!}$.

Corrigé de l'exercice 3

1. Posons $p_n = \frac{1}{en!}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \geq 0$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{1}{e}\exp(1) = 1$, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ qui vérifie la condition voulue (d'après le théorème de détermination d'une probabilité sur un univers au plus dénombrable).
2. Par définition, $a_n = \mathbb{P}([\![n, +\infty[\![) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} \{k\}\right)$ (la réunion est disjointe). Par σ-additivité de $\mathbb{P}$:
$$a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(\{k\}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{ek!}.$$
On reconnaît alors le reste d'une série de Taylor. En notant $f : t \mapsto e^t$, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \frac{1}{e} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 1^k = \frac{1}{e}\left(f(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 1^k\right).$$
D'après la formule de Taylor avec reste intégral :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \frac{1}{e(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} e^t dt \leq \frac{e}{e(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} dt = \frac{1}{n!},$$
et cette inégalité reste vraie pour $n = 0$, puisque $a_0 = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$.

Remarque
On peut aussi majorer de manière directe :

$$a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{ek!} = \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n+k)!} = \frac{1}{en!} \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)}}_{\leq \frac{1}{k!}} \leq \frac{1}{en!} \exp(1) = \frac{1}{n!}.$$

Exercice 4 (La pluie contre le banquier)**
Un banquier se rend chaque matin de son domicile à sa banque, et chaque soir de sa banque à son domicile. Il possède un unique parapluie. À chaque fois qu'il part d'un endroit (domicile ou bureau), s'il pleut et si le parapluie est à sa disposition, alors il le prend. Sinon, il le laisse sur place.
On suppose que la probabilité qu'il pleuve vaut constamment $p \in]0\,;1[$ et on pose $q = 1 - p$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que le parapluie soit disponible là où se trouve le banquier (domicile ou bureau) au bout de n trajets et $q_n = 1 - p_n$. La probabilité que le parapluie soit disponible initialement est notée p_0 (quelconque dans $[0\,;1]$).

1. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.
2. En déduire que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Calculer $p_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Corrigé de l'exercice 4

1. Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les événements :

$$A_n : \text{ "il pleut au moment du } n\text{-ième trajet"}.$$

$$B_n : \text{ "le parapluie est disponible au moment du } n\text{-ième trajet"}.$$

Les évéments $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants, tous de probabilité p.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(B_n) = p_{n-1}$ (attention au décalage induit par l'énoncé !).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, utilisons la formule des probabilités totales avec le SCE $(B_n, \overline{B_n})$:

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{B_n})\mathbb{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1}).$$

Supposons B_n réalisé (le parapluie était disponible au moment du n^e trajet). Dans ce cas, s'il a plu lors du n^e trajet, le banquier a emporté le parapluie avec lui, il sera donc disponible au moment du $(n+1)^e$ trajet. S'il n'a pas plu lors du n^e trajet, alors le banquier a laissé le parapluie sur place, il n'est donc plus disponible au moment du $(n+1)^e$ trajet. On a donc $B_n \cap B_{n+1} = B_n \cap A_n$ (lorsque B_n est réalisé, alors B_{n+1} est réalisé ssi A_n est réalisé), ce qui entraîne :

$$\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{B_n}(A_n) = \mathbb{P}(A_n) = p.$$

Si on suppose $\overline{B_n}$ réalisé, alors le parapluie n'était pas disponible lors du n^e trajet, il l'est donc nécessairement lors du $(n+1)^e$ trajet (qu'il ait plu ou non lors du n^e trajet). D'où

$$\mathbb{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = 1.$$

Finalement, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(B_{n+1}) = p\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(\overline{B_n}),$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_{n+1} = pp_n + q_n.$$

On en déduit également :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad q_{n+1} = 1 - p_{n+1} = p_n + q_n - pp_n - q_n = (1-p)p_n = qp_n.$$

Donc matriciellement, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

2. On note $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$. On a prouvé : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.
   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$, où $X_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$.
   On a $\chi_M = X^2 - pX - q = (X-1)(X+q)$, vu que $q - 1 = -p$. Comme $q \neq 1$, M possède deux valeurs propres distinctes donc est diagonalisable et il existe P inversible telle que $M = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix}$. D'où $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-q)^n \end{pmatrix}$ puis, par la convergence coordonnée par coordonnée en dimension finie, $D^n \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et enfin, par la continuité de l'application $X \mapsto PXP^{-1}$ (car linéaire sur l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie), $M^n \longrightarrow P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.
   On calcule P et P^{-1} pour finalement aboutir à $P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{1+q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q & q \end{pmatrix}$.
   Toujours par un argument de continuité, on a prouvé que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, vers un vecteur noté $X_\infty = \frac{1}{1+q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q & q \end{pmatrix} X_0 = \frac{1}{1+q} \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}$.
   Et, via la convergence coordonée par coordonnée, on a montré $p_n \longrightarrow \frac{1}{1+q}$ et $q_n \longrightarrow \frac{q}{1+q}$.

Remarque
On peut faire plus simple, sans introduire de matrices. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_{n+1} = pp_n + q_n = pp_n + 1 - p_n = 1 + (p-1)p_n.$$

On peut alors (classiquement) expliciter le terme général de cette suite arithmético-géométrique, en choisissant une constante α telle que la suite $(p_n - \alpha)$ soit géométrique de raison $p - 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_{n+1} - \alpha = 1 + (p-1)p_n - \alpha = (p-1)(p_n - \alpha) + (p-2)\alpha + 1,$$

donc $\alpha = \frac{1}{2-p}$ convient, et

$$\forall \in \mathbb{N}, \qquad p_n - \frac{1}{2-p} = \left(p_0 - \frac{1}{2-p}\right) \times (p-1)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2-p} = \frac{1}{1+q}$.

Exercice 5 (*Etude d'une marche aléatoire)**
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère uniquement les points à coordonnées entières et d'abscisses positives. On appelle *chemin* toute suite finie de segments joignant chaque point d'abscisse k à chaque point d'abscisse $k+1$ en montant ou en descendant de 1 selon l'ordonnée.
On emploiera les notations suivantes : pour tous couples $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ et $(a',b') \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ avec $a < a'$:

- $\mathcal{C}_{(a,b)\to(a',b')}$ désigne l'ensemble des chemins reliant (a,b) à (a',b') ;
- $\mathcal{C}^*_{(a,b)\to(a',b')}$ désigne l'ensemble des chemins reliant (a,b) à (a',b') en restant strictement au-dessus de l'axe (Ox) (en ne comptant pas la position initiale, qui peut être d'ordonnée nulle) ;
- $\mathcal{C}^0_{(a,b)\to(a',b')}$ désigne l'ensemble des chemins reliant (a,b) à (a',b') et intersectant au moins une fois l'axe (Ox) (en ne comptant pas la position initiale).

Soit $(n,s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$.

1. À quelle condition nécessaire et suffisante $\mathcal{C}_{(0,0)\to(n,s)}$ est-il non vide ?
2. Cette condition étant remplie, calculer $Card\left(\mathcal{C}_{(0,0)\to(n,s)}\right)$.
3. On suppose maintenant que $\mathcal{C}_{(0,0)\to(n,s)}$ est non vide et on s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{C}^*_{(0,0)\to(n,s)}$, dans le cas où $s \geq 0$.
   (a) Montrer que tout chemin de $\mathcal{C}^*_{(0,0)\to(n,s)}$ passe nécessairement par $(1,1)$.
   (b) Si $n \geq 2$, montrer que l'ensemble $\mathcal{C}^0_{(1,1)\to(n,s)}$ est en bijection avec $\mathcal{C}_{(1,-1)\to(n,s)}$.
   (c) En déduire finalement $Card\left(\mathcal{C}^*_{(0,0)\to(n,s)}\right)$.
4. **Application : le théorème du scrutin**
   Dans un scrutin, il y a p bulletins favorables au candidat P et q favorables au candidat Q. On suppose $p > q$.
   Quelle est la probabilité pour que, durant le dépouillement, P soit toujours en tête ?

Corrigé de l'exercice 5

1. S'il existe un chemin reliant $(0,0)$ à $(n,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, alors en notant k le nombre de montées, on a $0 \leq k \leq n$ et $s = 1 * k + (-1) * (n-k) = 2k - n$, donc $-n \leq s \leq n$ et $n+s$ est pair.
   Réciproquement, si $n+s$ est un entier pair avec $-n \leq s \leq n$, alors en notant $k = \frac{n+s}{2}$, on a $0 \leq k \leq n$, et tout chemin qui monte k fois et descend $n-k$ fois relie $(0,0)$ à $(n, 2k-n) = (n,s)$.
   Finalement, il existe un chemin reliant $(0,0)$ à (n,s) si et seulement si $-n \leq s \leq n$ et $n+s$ est pair.
2. Soit (n,s) vérifiant les conditions précédentes ($n+s$ entier pair compris entre 0 et $2n$).
   Un chemin reliant $(0,0)$ à (n,s) est constitué de $k = \frac{n+s}{2}$ montées et $n-k = \frac{n-s}{2}$ descentes, réparties sur n positions successives.
   L'ensemble $\mathcal{C}_{(0,0)\to(n,s)}$ des chemins reliant $(0,0)$ à (n,s) est donc en bijection avec les suites de $\{-1,1\}^{[1,n]}$ qui comportent exactement k "1" et $n-k$ "-1", ce qui permet de conclure que
   $$Card(\mathcal{C}_{(0,0)\to(n,s)}) = \binom{n}{\frac{n+s}{2}}.$$
3. Considérons :
   $$\mathcal{C}^*_{(0,0)\to(n,s)} = \{\text{chemins reliant } (0,0) \text{ à } (n,s) \text{ et restant strictement au-dessus de } (Ox)\}.$$
   (a) Ces chemins débutent nécessairement par $(0,0),(1,1)$ (le point $(1,-1)$ ne peut pas être atteint car il est en-dessous de (Ox)).
   (b) Soit $n \geq 2$ et $s \geq 0$. L'ensemble $\mathcal{C}^0_{(1,1)\to(n,s)}$ est en bijection avec $\mathcal{C}_{(1,-1)\to(n,s)}$, car étant donné un chemin C reliant $(1,1)$ à (n,s) en intersectant (Ox), on note $1 < k \leq n$ la plus petite abscisse où l'ordonnée devient nulle, et on "symétrise" la première partie du chemin (les points d'abscisse $1,\cdots,k$) par rapport à (Ox) en conservant les autres points. Ce nouveau chemin C' est bien dans $\mathcal{C}_{(1,-1)\to(n,s)}$, et l'application $C \mapsto C'$ définit clairement une bijection entre les deux ensembles de chemins annoncés, puisque tout chemin $\tilde{C} \in$

$\mathcal{C}_{(1,-1)\to(n,s)}$ passe nécessairement par l'axe (Ox) (l'entier s étant positif), donc s'obtient comme symétrique d'un chemin $C \in \mathcal{C}^0_{(1,1)\to(n,s)}$.

(c) D'après 3.(a) :

$$Card(\mathcal{C}^*_{(0,0)\to(n,s)}) = Card(\mathcal{C}^*_{(1,1)\to(n,s)}),$$

D'autre part, par définition :

$$\mathcal{C}^*_{(1,1)\to(n,s)} = \mathcal{C}_{(1,1)\to(n,s)} \setminus \mathcal{C}^0_{(1,1)\to(n,s)},$$

donc

$$Card(\mathcal{C}^*_{(0,0)\to(n,s)}) = Card(\mathcal{C}_{(1,1)\to(n,s)}) - Card(\mathcal{C}^0_{(1,1)\to(n,s)}).$$

En reprenant le raisonnement de la question 2. :

$$Card(\mathcal{C}_{(1,1)\to(n,s)}) = Card(\mathcal{C}_{(0,0)\to(n-1,s-1)}) = \binom{n-1}{\frac{n-1+s-1}{2}} = \binom{n-1}{\frac{n+s}{2}-1}.$$

En outre, d'après la bijection exhibée en 3.(b) :

$$Card(\mathcal{C}^0_{(1,1)\to(n,s)}) = Card(\mathcal{C}_{(1,-1)\to(n,s)}) = Card(\mathcal{C}_{(0,0)\to(n-1,s+1)}) = \binom{n-1}{\frac{n+s}{2}}.$$

Finalement, le nombre de chemins reliant $(0,0)$ à (n,s) en restant strictement au-dessus de (Ox) est

$$Card(\mathcal{C}^*_{(0,0)\to(n,s)}) = \binom{n-1}{\frac{n+s}{2}-1} - \binom{n-1}{\frac{n+s}{2}}.$$

4. Un scénario de dépouillement de n bulletins est représentable par un chemin reliant $(0,0)$ à (n,s), où chaque montée représente une voix pour le candidat P et chaque descente une voix pour le candidat Q.
   Sachant qu'il y a p bulletins favorables à P et q bulletins favorables à Q avec $p > q$, ces chemins relient $(0,0)$ à $(p+q, p-q)$. Il y en donc en tout $\binom{p+q}{p}$ scénarios (équiprobables) de dépouillements possibles.
   Parmi eux, les dépouillements où le candidat P est toujours en tête sont exactement les chemins qui restent strictement au-dessus de (Ox). Il y en a donc $\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}$ d'après ce qui précède.
   Finalement, la probabilité cherchée est

$$\frac{\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}}{\binom{p+q}{p}} = (p+q-1)! \times \left(\frac{1}{(p-1)!q!} - \frac{1}{p!(q-1)!}\right) \times \frac{p!q!}{(p+q)!} = \frac{p-q}{p+q}.$$

Exercice 6 (*Une tribu au plus dénombrable est nécessairement finie (MPI*))**
Soit $\mathcal{A}$ une tribu supposée au plus dénombrable sur un univers Ω. On veut montrer que $\mathcal{A}$ est finie.

1. Soit $\omega \in \Omega$. On définit $C(\omega) = \bigcap_{A\in\mathcal{A} \text{ tq } \omega\in A} A$. Montrer que $C(\omega) \in \mathcal{A}$.
2. On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur Ω par : $\omega \mathcal{R} \omega' \iff \omega' \in C(\omega)$.
   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et donner ses classes d'équivalence.
3. Montrer que $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{P} = \{C(\omega),\ \omega \in \Omega\}$.
4. En déduire que $\mathcal{A}$ est finie.

Corrigé de l'exercice 6

1. L'intersection $C(\omega)$ est bien définie car l'ensemble $\{A \in \mathcal{A},\ \omega \in A\}$ est non vide (il contient au moins la partie Ω) De plus, en tant qu'intersection au plus dénombrable de parties de $\mathcal{A}$, $C(\omega) \in \mathcal{A}$.
   Remarquons également que $C(\omega) \neq \emptyset$ (car $\omega \in C(\omega)$), et que $C(\omega)$ est la plus petite partie de la tribu $\mathcal{A}$ qui contient Ω (ce n'est pas forcément le singleton $\{\omega\}$).

2. Pour tout $\omega \in \Omega$, $\omega \in C(\omega)$ donc $\omega \mathcal{R} \omega$ (réflexivité).
   Si $\omega \mathcal{R} \omega'$, alors $\omega' \in C(\omega)$, donc pour toute partie $A \in \mathcal{A}$, on a ($\omega \in A \implies \omega' \in A$), mais puisque $\overline{A} \in \mathcal{A}$, on a aussi : ($\omega \in \overline{A} \implies \omega' \in \overline{A}$), c'est-à-dire ($\omega' \in A \implies \omega \in A$). Donc $\omega \in C(\omega')$, ce qui montre la symétrie ($\omega \mathcal{R} \omega' \implies \omega' \mathcal{R} \omega$).
   Enfin, la relation est transitive, car si $\omega \mathcal{R} \omega'$ et $\omega' \mathcal{R} \omega''$, alors étant donnée une partie $A \in \mathcal{A}$, on a
   $$\omega \in A \underset{\omega' \in C(\omega)}{\implies} \omega' \in A \underset{\omega'' \in C(\omega')}{\implies} \omega'' \in A,$$
   donc pour tout $A \in \mathcal{A}$, ($\omega \in A \implies \omega'' \in A$), ce qui montre que $\omega'' \in C(\omega)$ c'est-à-dire $\omega \mathcal{R} \omega''$.
   Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur Ω, et pour tout $\omega \in \Omega$,
   $$cl(\omega) = \{\omega' \in \Omega,\ \omega \mathcal{R} \omega'\} = \{\omega' \in \Omega,\ \omega' \in C(\omega)\} = C(\omega).$$
3. $\mathcal{A}$ est par hypothèse une tribu, et elle contient toutes les parties $C(\omega)$ avec $\omega \in \Omega$ d'après la question 1.
   Considérons maintenant une tribu quelconque $\mathcal{A}'$ contenant tous les $C(\omega)$, et montrons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Pour toute partie $A \in \mathcal{A}$ et pour tout élément $\omega \in A$, on a $C(\omega) \subset A$ (par définition de $C(\omega)$), donc
   $$A = \bigcup_{\omega \in A} C(\omega).$$
   Cette réunion peut se réécrire comme une réunion disjointe : en notant $(C(\omega_i))_{i \in I}$ les classes d'équivalences distinctes de la relation $\mathcal{R}$, on a les réunions disjointes
   $$\Omega = \bigcup_{i \in I} C(\omega_i),$$
   $$A = \bigcup_{i \in I,\ \omega_i \in A} C(\omega_i),$$
   (puisque tout $x \in A$ est dans une unique classe $C(\omega_i)$, et on a $\omega_i \in C(x) \subset A$, donc $\omega_i \in A$).
   En outre, I est au plus dénombrable, puisque l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ i & \longmapsto & C(\omega_i) \end{array} \right.$ est injective.
   Donc A est réunion au plus dénombrable de parties de la tribu $\mathcal{A}'$, ce qui montre que $A \in \mathcal{A}'$.
   Finalement, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. On a prouvé que $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu contenant tous les $C(\omega)$, avec $\omega \in \Omega$.
4. On sait que I est au plus dénombrable. On va montrer qu'il est fini.
   Par l'absurde, si I est dénombrable, alors on peut réindexer les classes d'équivalence distinctes de $\mathcal{R}$ de la manière suivante :
   $$C(\omega_n),\ n \in \mathbb{N},$$
   où les $C(\omega_n)$ forment une partition de Ω. Vu que $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu contenant toutes ces classes, on a $\bigcup_{n \in F} C(\omega_n) \in \mathcal{A}$ pour toute partie $F \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (puisque F est au plus dénombrable).
   Cela permet d'exhiber une injection $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ F & \longmapsto & \bigcup_{n \in F} C(\omega_n) \end{array} \right.$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable, puisque $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne l'est pas ($\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est facilement en bijection avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, notoirement infini non dénombrable).
   Donc I est fini, et il en résulte que la tribu $\mathcal{A}$ est finie. En effet, en notant $(C(\omega_1), \cdots, C(\omega_N))$ les classes d'équivalences distinctes de $\mathcal{R}$, on a
   $$\mathcal{A} = \Big\{ \bigcup_{n \in F} C(\omega_n),\ F \in \mathcal{P}([\![1, N]\!]) \Big\}.$$
   (l'inclusion $\supset$ est facile à vérifier, et l'inclusion $\subset$ vient du fait que l'ensemble de droite est bien une tribu contenant les $C(\omega_n)$).

II TD du mercredi 04/03

Exercice 7 (*Lancers successifs d'un dé)
On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 3.
Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient inférieurs ou égaux à 3 ?

Corrigé de l'exercice 7
On suppose la situation modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons les événements :

$$A_n \ : \ \text{"on obtient un 3 au } n^e \text{ lancer du dé"},$$

$$B_n \ : \ \text{"on obtient 1 ou 2 au } n^e \text{ lancer"},$$

$$E \ : \ \text{"tous les nombres obtenus sont inférieurs ou égaux à 3"}.$$

On peut décomposer E en réunion disjointe :

$$E = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \right) \cup E_0,$$

où $E_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} B_k \right) \cap A_n$ et $E_0 = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k$.
Par σ-additivité de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) + \mathbb{P}(E_0).$$

Vu que les lancers du même dé sont indépendants, les événements $(B_1, \cdots, B_{n-1}, A_n)$ sont indépendants pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi que les événements $(B_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(E_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(B_k) \right) \mathbb{P}(A_n) = (2/6)^{n-1} * (1/6).$$

En outre, par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}(E_0) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \lim_{n \to +\infty} (2/6)^n = 0.$$

Donc

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2/6)^{n-1} * (1/6) = \frac{1/6}{1 - 2/6} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 8 (*Relecture)
Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. À chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $p = \frac{1}{3}$.
Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit toujours pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième relecture ?
3. Combien faut-il de relectures pour que cette dernière probabilité soit supérieure à $0,9$?

Corrigé de l'exercice 8
On suppose la situation modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement :

$$E_n : \ \text{"l'erreur numéro 1 est détectée par le } n\text{-ième relecteur"}.$$

Notons $A_{1,n} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \cdots \cap \overline{E_n}$. Cet événement se traduit par "l'erreur numéro 1 n'est toujours pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture". Par l'indépendance des relectures, les événements $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants, donc leurs complémentaires aussi, et on obtient :

$$\mathbb{P}(A_{1,n}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{E_k}) = (1-p)^n = (2/3)^n.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons l'événement C_n : "le livre est entièrement corrigé à l'issue de la n-ième relecture". On a
$$C_n = \bigcap_{i=1}^{4} \overline{A_{i,n}}.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, les événements $(A_{i,n})_{1\leq i\leq 4}$ sont indépendants par hypothèse (puisque chaque erreur se corrige indépendamment des autres), donc :
$$\mathbb{P}(C_n) = \prod_{i=1}^{4} \mathbb{P}(\overline{A_{i,n}}) = \mathbb{P}(\overline{A_{1,n}})^4 = (1-(1-p)^n)^4 = (1-(2/3)^n)^4,$$
(chaque erreur a la même probabilité d'être corrigée).
3. En résolvant l'inéquation :
$$\mathbb{P}(C_n) \geq 0,9 \iff (2/3)^n \leq 1-(0,9)^{1/4} \iff n \geq \frac{\ln\left(1-(0,9)^{1/4}\right)}{\ln(2/3)}.$$
Cette condition est satisfaite à partir de $n = 10$.

Exercice 9 (Un problème de démographie)**
Soit $a \in]0,1[$. On note p_k la probabilité qu'une famille ait k enfants. On suppose

$$p_0 = p_1 = a \quad p_k = (1-2a)2^{-(k-1)},\ \forall\ k \geq 2.$$

On suppose que les naissances des filles et des garçons sont équiprobables.
On note E_n : "la famille a n enfants", F_n : "la famille a n filles" et G_n : "la famille a n garçons".
1. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ayant deux filles ait deux enfants seulement ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ait deux garçons sachant qu'elle a deux filles ?

Corrigé de l'exercice 9
1. On cherche la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{F_2}(E_2)$, qu'on calcule à l'aide des formules de Bayes. On a
$$\mathbb{P}_{F_2}(E_2) = \frac{\mathbb{P}_{E_2}(F_2)\mathbb{P}(E_2)}{\mathbb{P}(F_2)},$$
et puisque $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un SCE de probabilités non nulles, on a
$$\mathbb{P}_{F_2}(E_2) = \frac{\mathbb{P}(E_2)\mathbb{P}_{E_2}(F_2)}{\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)\mathbb{P}_{E_n}(F_2)}.$$
En outre, $\mathbb{P}_{E_n}(F_2) = 0$ si $n \in \{0,1\}$ et pour tout $n \geq 2$:
$$\mathbb{P}_{E_n}(F_2) = \binom{n}{2}(1/2)^2(1/2)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2^{n+1}}$$
(une fois le nombre d'enfants n connu, la probabilité d'avoir deux filles est la même que la probabilité d'obtenir exactement deux fois *Pile* lors de n lancers d'une même pièce équilibrée. En termes de variables aléatoires, le nombre de filles nées parmi la fratrie de n enfants suit une loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(n,1/2)$, ainsi que le nombre de garçons).
Terminons le calcul :
$$\mathbb{P}(F_2) = \sum_{n=2}^{+\infty} p_n \frac{n(n-1)}{2^{n+1}} = (1-2a)\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{2^{2n}} = (1-2a)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1/4)^n.$$

Or, en dérivant deux fois terme à terme le DSE $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

En multipliant par x^2 et en évaluant en $x = 1/4$, on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1/4)^n = \frac{2/16}{(3/4)^3} = \frac{8}{27},$$

donc $\mathbb{P}(F_2) = (1-2a)\frac{8}{27}$ et finalement

$$\mathbb{P}_{F_2}(E_2) = \frac{p_2(1/4)}{\mathbb{P}(F_2)} = \frac{27}{64}.$$

2. Cette fois, on cherche

$$\mathbb{P}_{F_2}(G_2) = \frac{\mathbb{P}(F_2 \cap G_2)}{\mathbb{P}(F_2)} = \frac{\mathbb{P}(F_2 \cap E_4)}{\mathbb{P}(F_2)} = \frac{\mathbb{P}(E_4)\mathbb{P}_{E_4}(F_2)}{\mathbb{P}(F_2)},$$

donc

$$\mathbb{P}_{F_2}(G_2) = \frac{(1-2a)(1/2)^3 \times \frac{12}{32}}{(1-2a)\frac{8}{27}} = \frac{3}{8} \times \frac{27}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{81}{512}.$$

Exercice 10 (Urne qui se remplit)**
Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur. On suppose toutes les boules indiscernables au toucher. On répète cette opération indéfiniment et on admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ permettant de la modéliser.

1. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?
2. Le résultat précédent reste-t-il valable si on remet la boule accompagnée de r autres boules de la même couleur ? (avec $r \in \mathbb{N}^*$)

Corrigé de l'exercice 10

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note R_k l'événement "obtenir une boule rouge au k^e tirage", et on cherche la probabilité de l'événement $R = \bigcap_{k=1}^{+\infty} R_k$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \mathbb{P}(R_1) * \mathbb{P}_{R_1}(R_2) * \cdots * \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{n-1}}(R_n) = \frac{1}{2} * \frac{3}{4} * \cdots * \frac{2n-1}{2n},$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2k}\right).$$

La propriété de continuité décroissante d'une probabilité (appliquée à la suite d'événements $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} R_k$, qui est décroissante) donne alors

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2k}\right).$$

Pour calculer cette limite, on peut passer au logarithme :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right).$$

Puisque $\ln\left(1-\frac{1}{2k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2k}$, la série $\sum \ln\left(1-\frac{1}{2k}\right)$ (qui est à termes négatifs) est divergente, donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1-\dfrac{1}{2k}\right) = -\infty$, et par continuité de l'exponentielle on récupère $\mathbb{P}(R) = 0$.

2. Ca ne change rien, on a

$$\mathbb{P}(R) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{rk+1}{rk+2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1-\frac{1}{rk+2}\right),$$

donc la divergence de la série $\sum \ln\left(1-\frac{1}{rk+2}\right)$ assure que $\mathbb{P}(R)=0$ quelle que soit la valeur de r.