Exercices du CH17 : Espaces probabilisés

Exercices de la banque INP à étudier : ex 101, 105, 107, 112

Sauf mention du contraire, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

I Tribus

Exercice 1 (*Intersection et réunion de tribus)

1. Démontrer qu'une intersection quelconque de tribus sur Ω est une tribu sur Ω.
2. Que dire de la réunion de deux tribus ?

Exercice 2 (Tribus engendrées)**
Etant donné un univers Ω et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle **tribu engendrée par $\mathcal{C}$** l'ensemble :

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ tribu sur } \Omega,\ \mathcal{C} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}.$$

D'après l'exercice précédent, il s'agit bien d'une tribu sur Ω, et c'est la plus petite (au sens de l'inclusion) qui contient $\mathcal{C}$ (par construction).

1. Lorsque $\mathcal{C} = \{A\}$, avec $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, déterminer $\sigma(\mathcal{C})$.
2. Soit $\Omega = \{a, b, c\}$.
   (a) Déterminer la tribu engendrée par $\mathcal{C}_1 = \Big\{\{a, b\}\Big\}$.
   (b) Déterminer la tribu engendrée par $\mathcal{C}_2 = \Big\{\{a\}, \{a, b\}\Big\}$.
3. Soient $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, et
$$\mathcal{A} = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\Big\}.$$
   $\mathcal{A}$ est-elle la tribu engendrée par $\{a\}$ et $\{c, d, e\}$?
4. On revient au cas général : si Ω est quelconque et si $\mathcal{C} = \{\{\omega\},\ \omega \in \Omega\}$, quelle est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$?

Exercice 3 (Une tribu sur $\mathbb{N}$)**
Sur l'univers $\Omega = \mathbb{N}$, on considère la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par les parties $S_n = \{n, n+1, n+2\}$, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\{n\} \in \mathcal{A}$.
2. En déduire que toute partie de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ est dans $\mathcal{A}$.
3. Décrire alors simplement $\mathcal{A}$.

Exercice 4 (*Une tribu au plus dénombrable est nécessairement finie)**
Soit $\mathcal{A}$ une tribu supposée au plus dénombrable sur un univers Ω. On veut montrer que $\mathcal{A}$ est finie.

1. Soit $\omega \in \Omega$. On définit $C(\omega) = \bigcap_{A \in \mathcal{A} \text{ tq } \omega \in A} A$. Montrer que $C(\omega) \in \mathcal{A}$.
2. On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur Ω par : $\omega \mathcal{R} \omega' \iff \omega' \in C(\omega)$.
   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et donner ses classes d'équivalence.
3. Montrer que $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{P} = \{C(\omega),\ \omega \in \Omega\}$.
4. En déduire que $\mathcal{A}$ est finie.

II Exercices concrets de probabilités

Exercice 5 (*Lancers successifs d'un dé)
On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 3.
Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient inférieurs ou égaux à 3 ?

Exercice 6 (*Transmission bruitée)
Un message doit être transmis d'un point à un autre à travers N canaux successifs (avec $N \geq 2$).
Ce message peut prendre deux valeurs, 0 ou 1. Lors du passage par un canal, le message a la probabilité $p \in]0, 1[$ d'être bruité, c'est-à-dire ici d'être transformé en son contraire.
On suppose que les canaux se comportent indépendamment les uns des autres.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'événement : « en sortie du n-ième canal, le message est le même que celui transmis initialement », et p_n sa probabilité.

1. Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite (p_n).
2. Exprimer p_n pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$.
3. Que vaut $\lim\limits_{N \to +\infty} p_N$? Commentaire ?

Exercice 7 (*Relecture)
Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. À chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $p = \frac{1}{3}$.
Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit toujours pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième relecture ?
3. Combien faut-il de relectures pour que cette dernière probabilité soit supérieure à $0,9$?

Exercice 8 (*Sommes successives de deux dés)
On répète indéfiniment l'expérience consistant à lancer deux dés équilibrés et à noter la somme des faces obtenues.
On veut la probabilité qu'une somme égale à 5 survienne avant une somme égale à 7.
On note E l'événement souhaité et, pour $n \geq 1$, E_n celui selon lequel 5 et 7 n'apparaissent pas au cours des $n - 1$ premiers lancers.
Calculer $\mathbb{P}(E)$ à l'aide de E_n.

Exercice 9 (*Les maths par des journalistes)
Cet exercice est tiré d'un article paru le 3 juin 2011 dans *Libération*.
Au vu de données historiques, la probabilité d'un accident majeur chaque année pour un réacteur nucléaire est estimée à 3×10^{-4} (cette estimation est déjà en soi très discutable, mais passons).

1. Il y a 58 réacteurs en France et 143 en Europe. En supposant l'indépendance entre ceux-ci, calculer la probabilité d'avoir au moins un accident nucléaire en France/en Europe, durant les 30 prochaines années.
2. Donner un équivalent de $1 - (1 - p)^{nt}$ lorsque p tend vers 0 et nt est fixé.
3. En déduire comment les auteurs en arrivent à écrire la phrase : "Sur la base du constat des accidents majeurs survenus ces trente dernières années, la probabilité d'occurrence d'un accident majeur sur ces parcs serait donc de 50% pour la France et de plus de 100% pour l'Union européenne."

Exercice 10 (Une probabilité sur $\mathbb{N}$)**

1. Montrer qu'on définit une probabilité sur $\mathbb{N}$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{en!}$.
2. On note a_n la probabilité qu'un entier soit supérieur ou égal à n. Montrer que $a_n \leq \dfrac{1}{n!}$.

Exercice 11 (La pluie contre le banquier)**
Un banquier se rend chaque matin de son domicile à sa banque, et chaque soir de sa banque à son domicile. Il possède un unique parapluie. À chaque fois qu'il part d'un endroit (domicile ou bureau), s'il pleut et si le parapluie est à sa disposition, alors il le prend. Sinon, il le laisse sur place.
On suppose que la probabilité qu'il pleuve vaut constamment $p \in]0\,;1[$ et on pose $q = 1 - p$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que le parapluie soit disponible là où se trouve le banquier (domicile ou bureau) au bout de n trajets et $q_n = 1 - p_n$. La probabilité que le parapluie soit disponible initialement est notée p_0 (quelconque dans $[0\,;1]$).

1. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.
2. En déduire que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Calculer $p_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 12 (Un problème de démographie)**
Soit $a \in]0,1[$. On note p_k la probabilité qu'une famille ait k enfants. On suppose

$$p_0 = p_1 = a \quad p_k = (1-2a)2^{-(k-1)},\ \forall\ k \geq 2.$$

On suppose que les naissances des filles et des garçons sont équiprobables.
On note E_n : "la famille a n enfants", F_n : "la famille a n filles" et G_n : "la famille a n garçons".

1. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ayant deux filles ait deux enfants seulement ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ait deux garçons sachant qu'elle a deux filles ?

Exercice 13 (Urne qui se remplit)**
Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur. On suppose toutes les boules indiscernables au toucher. On répète cette opération indéfiniment et on admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ permettant de la modéliser.

1. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?
2. Le résultat précédent reste-t-il valable si on remet la boule accompagnée de r autres boules de la même couleur ? (avec $r \in \mathbb{N}^*$)

Exercice 14 (Duel à Pile ou Face)**
On considère une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est $p \in]0;1[$.
Deux joueurs A et B lancent alternativement la pièce, et A commence.
La partie s'arrête dès que A obtient pile (ce qui s'apparente à une victoire de A) ou dès que B obtient face (ce qui s'apparente à une victoire de B).
On pourra supposer que les lancers sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que le jeu se termine au n^e lancer ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?
3. Quelle est la probabilité que le jeu se termine ?
4. Pour quelles valeurs de p le joueur A a-t-il l'avantage ?

Exercice 15 (***)

1. **Une marche aléatoire**
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère uniquement les points à coordonnées entières et d'abscisses positives. On appelle *chemin* toute suite finie de segments joignant chaque point d'abscisse k à chaque point d'abscisse $k+1$ en montant ou en descendant de 1 selon l'ordonnée.
   (a) Soit $(n,s) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$. À quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il un chemin reliant $(0,0)$ à (n,s) ?
   (b) Cette condition étant remplie, calculer le nombre de ces chemins.
   (c) Parmi ces chemins, combien y en a-t-il restant toujours strictement au-dessus de l'axe des abscisses (sauf à l'origine évidemment) ? *Indication : on commencera par constater que ces chemins passent nécessairement par* $(1,1)$. *On montrera alors que l'ensemble des chemins passant par* $(1,1)$ *et qui touchent (voire coupent) l'axe est en bijection avec l'ensemble des chemins reliant* $(1,-1)$ *à* (n,s) *- on peut parler de principe de réflexion. Il est alors plus simple de les compter.*
2. **Application : le théorème du scrutin**
Dans un scrutin, il y a p bulletins favorables au candidat P et q favorables au candidat Q. On suppose $p > q$.
Quelle est la probabilité pour que, durant le dépouillement, P soit toujours en tête ?

III Exercices théoriques de probabilités

Exercice 16 (*)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

Exercice 17 (**)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

1. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_k})$.
2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) \neq 1$.
Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1$ ssi $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
3. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{(n+2)^2}$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
   (b) Calculer la probabilité qu'un seul des événements A_n se réalise.

Exercice 18 (*Limites supérieure et inférieure d'événements)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{A})$.
On note B l'ensemble des éléments de Ω appartenant à une infinité des événements A_n et C l'ensemble des éléments de Ω appartenant à tous les événements A_n sauf éventuellement à un nombre fini. Montrer que B et C sont des événements de la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 19 (*Inégalités de Fatou)**
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.
On introduit $A_\star = \bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{n\geqslant p} A_n$ et $A^\star = \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{n\geqslant p} A_n$.

1. Vérifier que $A_\star$ et $A^\star$ sont des événements et que $A_\star \subset A^\star$.
2. Montrer les inégalités de Fatou : $\mathbb{P}(A_\star) \leq \lim\limits_{p\to+\infty} \inf\limits_{n\geqslant p} \mathbb{P}(A_n)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \sup\limits_{n\geqslant p} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(A^\star)$.
3. Construire un exemple où les inégalités précédentes s'avèrent strictes.

Exercice 20 (Lemmes de Borel-Cantelli)**

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de cet espace.
On note A l'ensemble des $\omega \in \Omega$ appartenant à une infinité de A_n.

1. Écrire l'ensemble A en fonction des A_n et montrer que $A \in \mathcal{A}$.
2. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$.

On suppose dans la suite les A_n indépendants et que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'on a $1 + x \leq e^x$.
   En déduire, pour tous m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leq n$, $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=m}^{n} \overline{A_k}\right) \leq \exp\left(-\sum\limits_{k=m}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right)$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.
5. *Application* : On considère un jeu de Pile ou Face infini avec $\mathbb{P}(Pile) = p \in]0, 1[$.
   À chaque tirage, on associe une lettre : 1 pour *Pile* et 0 pour *Face*.
   Fixons un mot $A \in \{0, 1\}^\ell$ de longueur ℓ. On considère les événements :
   — A_1 : "le mot se réalise dans les ℓ premières parties",
   — A_2 : "le mot se réalise dans les ℓ parties suivantes", etc.
   Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, le mot A se réalise une infinité de fois au cours du jeu.

   Remarque
   Cela montre par exemple que si un singe (immortel!) tape au hasard sur un clavier alors, presque sûrement, il écrira "Les misérables" de Victor Hugo une infinité de fois...

Exercice 21 (*Développement eulérien de zeta, le retour)**

Soit un réel $\alpha > 1$ et $\mathbb{P}_\alpha$ la probabilité sur $\big(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)\big)$ définie par : $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}_\alpha(\{n\}) = \dfrac{1}{\zeta(\alpha) n^\alpha}$,
où on rappelle qu'on a $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} > 0$.
On note $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers.

1. Montrer que les événements $A_{p_k} = p_k\mathbb{N}^*$ $(k \geq 1)$ sont indépendants.
2. Déterminer $\bigcap\limits_{k\geq 1} \{n \in \mathbb{N}^*,\ p_k \text{ ne divise pas } n\}$ et en déduire la formule d'Euler :
$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)^{-1} = \zeta(\alpha).$$
3. En déduire que la série $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$ diverge.