

Exercices du CH16 : Equations différentielles linéaires

Exercices de la banque INP à étudier : ex 31, 32, 42, 74, 75

I Révisions MP2I

Exercice 1 (*Ordre 2 à coefficients constants)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

1. $y'' + 4y' + 4y = -4x$.
2. $y'' + y' - 2y = 9e^x + 6$.
3. $y'' + y = \sin(\omega x)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 1

1. $y'' + 4y' + 4y = -4x$.

L'équation caractéristique a pour racine double -2 et on cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré 1. On trouve :

$$S = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-2x} - x + 1, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

2. $y'' + y' - 2y = 9e^x + 6$.

L'E.C. a deux racines simples réelles -2 et 1 . On applique le principe de superposition pour obtenir une solution particulière. Pour l'équa diff $y'' + y' - 2y = 6$, on a la solution constante évidente $x \mapsto -3$ et pour $y'' + y' - 2y = 9e^x$, on note que 1 est racine simple de l'E.C. donc on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto axe^x$. On trouve :

$$S = \{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu e^x + 3xe^x - 3, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

3. $y'' + y = \sin(\omega x)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

L'E.C. a deux racines complexes conjuguées $i\omega$ et $-i\omega$.

On cherche une solution particulière complexe z_p de l'équa diff $z'' + z = e^{i\omega x}$ et $y_p = \text{Im}(z_p)$ donnera une solution particulière réelle de l'équa diff qui nous intéresse.

Attention, si $\omega = \pm 1$, alors $i\omega$ est racine simple de l'E.C....

- Si $\omega \neq \pm 1$, on cherche z_p sous la forme $z_p : x \mapsto \alpha e^{i\omega x}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

On trouve $z_p : x \mapsto \frac{e^{i\omega x}}{1 - \omega^2}$ puis $y_p : x \mapsto \frac{\sin(\omega x)}{1 - \omega^2}$.

$$S = \left\{ x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + \frac{\sin(\omega x)}{1 - \omega^2}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Si $\omega = \pm 1$, on cherche z_p sous la forme $z_p : x \mapsto \alpha x e^{i\omega x}$. On trouve après calculs $\alpha = -\frac{i}{2\omega}$ puis $y_p : x \mapsto \frac{-x \cos(\omega x)}{2\omega}$.

$$S = \left\{ x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) - \frac{x \cos(\omega x)}{2\omega}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 2 (*Recollement)

Résoudre l'équation différentielle $(E) : t^2 y' + (1 - t)y = 1$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}$. Préciser la dimension de l'espace vectoriel des solutions de (E) sur chaque intervalle.

Corrigé de l'exercice 2

Sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$, $(E) \iff y' + \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\right)y = \frac{1}{t^2}$.

On trouve comme solutions homogènes sur ces intervalles les $t \mapsto \lambda|t|e^{\frac{1}{t}}$. Notons que comme t est

de signe constant sur I_1 et I_2 , on peut, quitte à adapter le signe des constantes, écrire les solutions homogènes y_k sur chaque intervalle I_k , $1 \leq k \leq 2$, sous la forme $y_k : t \mapsto \lambda_k t e^{\frac{1}{t}}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière par variation de la constante (ou alors on a le pressentiment qu'il y a une solution polynomiale, on en détermine d'abord le degré avant de finir la résolution). On aura besoin d'une intégration par parties pour primitiver $\frac{1}{t^3} e^{\frac{1}{t}}$.

On obtient $y_p : t \mapsto t + 1$.

Ainsi, sur chaque I_k , les solutions de (E) sont les $t \mapsto \lambda_k t e^{\frac{1}{t}} + t + 1$.

Maintenant, une fonction y est solution sur $\mathbb{R}$ ssi elle vérifie les 3 points suivants :

- y est solution sur I_1 et I_2 .
- $y(0) = 1$ (obtenu en évaluant l'équation différentielle en $t = 0$).
- y est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La première condition nous dit qu'il existe λ_1 et λ_2 réels tels que : $\forall t < 0$, $y(t) = \lambda_1 t e^{\frac{1}{t}} + t + 1$ et $\forall t > 0$, $y(t) = \lambda_2 t e^{\frac{1}{t}} + t + 1$.

Pour le deuxième point : posant $u = \frac{1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{+} +\infty$, on a $t e^{\frac{1}{t}} = \frac{e^u}{u} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{+} 0$ donc $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{+} 1$ ssi $\lambda_2 = 0$.

Comme $\frac{1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^-]{+} -\infty$ donc $e^{\frac{1}{t}} \xrightarrow[t \rightarrow 0^-]{+} 0$, on a par contre $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^-]{+} 1$ peu importe λ_1 . Ainsi y est continue en 0 ssi $\lambda_2 = 0$.

Et enfin, concernant le troisième point, on peut soit étudier le taux d'accroissement, soit utiliser le théorème de prolongement C^1 . Avec cette deuxième option, on note déjà qu'on a $y \in C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $t > 0$, $y(t) = t + 1$ donc $y'(t) = 1 \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{+} 1$ et, pour $t < 0$, $y(t) = \lambda_1 t e^{\frac{1}{t}} + t + 1$ donc $y'(t) = \lambda_1 (1 - \frac{1}{t}) e^{\frac{1}{t}} + 1 \xrightarrow[t \rightarrow 0^-]{+} 1$. Ainsi y' a une limite finie en 0 donc y est finalement C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $y'(0) = 1$.

Conclusion : les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les $y \mapsto \begin{cases} \lambda_1 t e^{\frac{1}{t}} + t + 1 & \text{si } t < 0 \\ t + 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

Et donc, que ce soit sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}$, l'espace (affine) des solutions est à chaque fois de dimension 1.

II Exponentielles de matrices

Exercice 3 (*Puissances et exponentielle d'une matrice)

1. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^k par $(X - 1)(X - 2)$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'on a $A^2 - 3A + 2I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Déterminer l'expression de $\exp(A)$ en fonction de A et I_n .

Corrigé de l'exercice 3

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par division euclidienne, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$X^k = (X - 1)(X - 2)Q(X) + aX + b.$$

En évaluant en $X = 1$ et $X = 2$, on obtient les équations $a + b = 1$ et $2a + b = 2^k$, qui donnent $(a, b) = (2^k - 1, 2 - 2^k)$. Donc finalement le reste cherché est $R(X) = (2^k - 1)X + (2 - 2^k)$.

2. Puisque $(X - 1)(X - 2) = X^2 - 3X + 2$ annule A , on obtient par la division euclidienne précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = aA + bI_n = (2^k - 1)A + (2 - 2^k)I_n,$$

donc

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2^k - 1)A + (2 - 2^k)I_n}{k!} = (e^2 - e^1)A + (2e^1 - e^2)I_n.$$

Exercice 4 (*Exponentielle d'une matrice antisymétrique)

Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices antisymétriques). Montrer que $\exp(A) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 4

La transposition est une application linéaire continue, donc

$$\exp(A)^T = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right)^T = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{A^k}{k!} \right)^T = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^T)^k}{k!} = \exp(A^T).$$

Mais par hypothèse, $A^T = -A$ donc $\exp(A)^T = \exp(-A)$, ce qui montre que $\exp(A)^T \exp(A) = \exp(0) = I_n$, donc $\exp(A) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Enfin, en trigonalisant A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (toujours possible), nous avons la formule

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A)).$$

En effet en notant $A = PTP^{-1}$, où $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sur la diagonale, nous avons (par bilinéarité et continuité du produit matriciel) :

$$\exp(A) = \exp(PTP^{-1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{PT^k P^{-1}}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T^k}{k!} \right) P^{-1} = P \exp(T) P^{-1}.$$

En outre, chaque T^k est triangulaire supérieure avec $(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ sur la diagonale, donc par somme (infinie), $\exp(T)$ est triangulaire supérieure avec $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ sur la diagonale. Il en résulte

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(T)) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) = \exp(\operatorname{tr}(T)) = \exp(\operatorname{tr}(A)).$$

Comme A est antisymétrique par hypothèse, on a $\operatorname{tr}(A) = 0$ (les éléments diagonaux de A étant nuls), donc $\det(\exp(A)) = \exp(0) = 1$, ce qui montre finalement que $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que e^A est un polynôme en A .

Corrigé de l'exercice 5

Rappelons que $\mathbb{K}[A] = \{Q(A), Q \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (et cette sous-algèbre est de dimension $\deg(\pi_A) \in [1, n]$). En tant qu'espace vectoriel de dimension finie, $\mathbb{K}[A]$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Vu que $e^A = \lim_{K \rightarrow +\infty} S_K(A)$, où $S_K(A) = \sum_{k=0}^K \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{K}[A]$ pour tout K , on en déduit que $e^A \in \mathbb{K}[A]$ (une partie fermée contient les limites de ses suites).
Donc e^A est bien un polynôme en A pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 6 (***) Limite d'une exponentielle de matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(tA) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.

Corrigé de l'exercice 6

$\Rightarrow$ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A , et $V \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. On a $AV = \lambda V$, donc par bilinéarité et continuité du produit matriciel :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{tA}V = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k V}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \lambda^k V}{k!} = e^{\lambda t} V.$$

Si on suppose $e^{tA} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, on a $e^{\lambda t} V \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc (V étant non nul), $e^{\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Mais $|e^{\lambda t}| = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t}$ donc nécessairement $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

$\Leftarrow$ D'après le théorème de réduction diagonale par blocs (valable car χ_A est scindé sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_p \end{pmatrix},$$

où $p = \text{Card}(Sp(A))$ et chaque bloc T_k (de taille α_k) vérifie

$$\forall k \in [1, p], \quad T_k = \lambda_k I_{\alpha_k} + N_k,$$

avec N_k triangulaire supérieure stricte (donc nilpotente d'indice $\leq \alpha_k$).

En reprenant les calculs fait à l'exercice 4, on a donc, pour tout réel t :

$$e^{tA} = P e^{tT} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{tT_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{tT_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{tT_p} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En outre, pour tout $k \in [1, p]$:

$$e^{tT_k} = e^{t\lambda_k I_{\alpha_k}} e^{tN_k} = e^{\lambda_k t} e^{tN_k}$$

(puisque $t\lambda_k I_{\alpha_k}$ et tN_k commutent), donc

$$e^{tT_k} = e^{\lambda_k t} \sum_{j=0}^{\alpha_k} \frac{t^j N_k^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\alpha_k} t^j e^{\lambda_k t} \frac{N_k^j}{j!}$$

et ces matrices tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$ si on suppose $\text{Re}(\lambda_k) < 0$, puisque

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad |t^j e^{\lambda_k t}| = |t|^j e^{\text{Re}(\lambda_k)t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Par produit de limites, on obtient donc que si $\text{Re}(\lambda_k) < 0$ pour tout k , alors $e^{tA} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exercice 7 (***)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_p + \frac{A}{n} \right)^n = \exp(A)$.

Corrigé de l'exercice 7

1. Première méthode : à la main en majorant l'écart

En développant $\left(I_p + \frac{A}{n} \right)^n$ avec le binôme de Newton (licite car I_p et $\frac{A}{n}$ commutent), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(I_p + \frac{A}{n} \right)^n - e^A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{A^k}{n^k} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} - 1 \right) \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

En utilisant une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ (qui est sous-multiplicative), nous obtenons alors :

$$\left\| \left(I_p + \frac{A}{n} \right)^n - e^A \right\| \leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} - 1 \right| \frac{\|A\|^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Mais pour tout $k \in [0, n]$, on a $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \leq \frac{n^k}{n^k} \leq 1$, donc

$$\begin{aligned} \left\| \left(I_p + \frac{A}{n} \right)^n - e^A \right\| &\leq \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \right) \frac{\|A\|^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\|A\|^k}{n^k} = e^{\|A\|} - \left(1 + \frac{\|A\|}{n} \right)^n. \end{aligned}$$

Or, pour tout réel $x > 0$ on a

$$\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^{n \ln(1+x/n)} = e^{n(x/n + o(1/n))} = e^{x+o(1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^x,$$

(et cela reste vrai pour $x = 0$), donc on en déduit $e^{\|A\|} - \left(1 + \frac{\|A\|}{n} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, d'où le résultat.

2. Seconde méthode : avec le théorème de la double limite

Toujours avec le binôme de Newton, on réécrit :

$$\left(I_p + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{A^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n),$$

avec $f_k : \begin{cases} \mathbb{N}^* & \longrightarrow \\ n & \longmapsto \end{cases} f_k(n) = \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{A^k}{n^k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Utilisons alors le théorème de la double limite pour une série de fonctions $\mathbb{N}^* \rightarrow E$, où E est un evn de dimension finie :

- Chaque fonction $f_k : n \mapsto f_k(n)$ tend vers $\frac{A^k}{k!}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, puisque pour $k \in \mathbb{N}$ fixé :

$$n \geq k \implies f_k(n) = \binom{n}{k} \frac{A^k}{n^k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k! n^k} A^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k! n^k} A^k.$$

- La série $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{N}^*$ (qui est un voisinage de $+\infty$ relatif à $\mathbb{N}^*$) puisque

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad \|f_k(n)\| \leq \binom{n}{k} \frac{\|A\|^k}{n^k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \times \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$$

et la suite majorante est indépendante de n et sommable.

Donc on peut faire une interversion limite-série :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = e^A,$$

ce qu'il fallait montrer.

III Résolution de systèmes différentiels

Exercice 8 (**Systèmes différentiels)

Résoudre les systèmes différentiels :

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}, \quad (\Sigma_2) : \begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}, \quad (\Sigma_3) : \begin{cases} x'_1 = (1+t)x_1 + tx_2 - e^t \\ x'_2 = -tx_1 + (1-t)x_2 + e^t \end{cases}$$

$$(\Sigma_4) : \begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases}, \quad (\Sigma_5) : \begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}.$$

Corrigé de l'exercice 8

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

La matrice des coefficients est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve $\chi_A = X(X+1)(X-2)$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc la matrice est diagonalisable.

On a donc $A = PDP^{-1}$, en prenant par exemple (après calcul des SEP) : $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Via l'habituel changement de variable $Y = P^{-1}X$, on se ramène à l'équation équivalente $Y' = DY$ dont on trouve que les solutions sont les $Y : t \mapsto \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{2t} \\ c \end{pmatrix}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Puis on calcule $X(t) = PY(t)$ et on obtient :

$$\begin{cases} x : t \mapsto -ae^{-t} + 2be^{2t} \\ y : t \mapsto ae^{-t} + be^{2t} + c, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3. \\ z : t \mapsto 3be^{2t} - c \end{cases}$$

$$(\Sigma_2) : \begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$$

Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve $\chi_A = (X - 5)(X + 3)$ puis $A = PDP^{-1}$ avec par exemple $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

On a alors deux techniques pour finir la résolution :

- Soit on applique le changement de variable $Y = P^{-1}X$ à l'équation avec second membre et une fois le système diagonalisé, on aura deux EDL scalaires d'ordre 1 avec second membre à résoudre (ce sont des seconds membres qui sont sommes de deux exponentielles, on applique le principe de superposition et le principe habituel aux seconds membres exponentiels).
- Soit on détermine les solutions de l'équation homogène puis on applique la méthode de variation des constantes.

On retient ici la deuxième technique, peut-être un peu moins coûteuse en calculs. Le système homogène $X' = AX$ est équivalent à $Y' = DY$. On trouve les solutions $Y_h : t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^{5t} \\ \mu e^{-3t} \end{pmatrix}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Puis on calcule $X(t) = PY(t)$ et on obtient :

$$X_h : t \mapsto \lambda e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu e^{-3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda X_1(t) + \mu X_2(t) = \begin{pmatrix} 2\lambda e^{5t} - 2\mu e^{-3t} \\ \lambda e^{5t} + \mu e^{-3t} \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

où les fonctions $X_1 : t \mapsto e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto e^{-3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment un système fondamental.

On peut chercher une solution particulière sous la forme $X_p : t \mapsto \lambda(t)X_1(t) + \mu(t)X_2(t)$, où λ et μ sont maintenant deux fonctions scalaires et dérivables. On a ainsi X_p dérivable avec :

$$X_p'(t) = \lambda'(t)X_1(t) + \mu'(t)X_2(t) + \lambda(t)X_1'(t) + \mu(t)X_2'(t),$$

et, comme X_1 et X_2 sont solutions de l'équation homogène, on a :

$$\begin{aligned} X_p'(t) &= \lambda'(t)X_1(t) + \mu'(t)X_2(t) + \lambda(t)AX_1(t) + \mu(t)AX_2(t) = \lambda'(t)X_1(t) + \mu'(t)X_2(t) + A(\lambda(t)X_1(t) + \mu(t)X_2(t)) \\ &= \lambda'(t)X_1(t) + \mu'(t)X_2(t) + AX_p(t), \end{aligned}$$

et donc X_p est solution de notre équation ssi $\lambda'(t)X_1(t) + \mu'(t)X_2(t) = B(t)$, où on note $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$ le second membre de l'équation.

On obtient ainsi le système :

$$\begin{cases} 2\lambda'(t)e^{5t} - 2\mu'(t)e^{-3t} = e^t \\ \lambda'(t)e^{5t} + \mu'(t)e^{-3t} = e^{-3t} \end{cases}.$$

C'est un simple système linéaire 2×2 . Par combinaison linéaire et/ou substitution, on trouve :

$$\begin{cases} \lambda'(t) = \frac{e^{-8t}}{2} + \frac{e^{-4t}}{4} \\ \mu'(t) = \frac{1}{2} - \frac{e^{4t}}{4} \end{cases}.$$

Donc un couple de fonctions (λ, μ) convenable est formé par : $\lambda : t \mapsto -\frac{e^{-8t}}{16} - \frac{e^{-4t}}{16}$ et $\mu : t \mapsto \frac{t}{2} - \frac{e^{4t}}{16}$.

Dont on tire finalement, après calculs : $X_p : t \mapsto \begin{pmatrix} -te^{-3t} - \frac{e^{-3t}}{8} \\ -\frac{e^t}{8} - \frac{e^{-3t}}{16} + \frac{t}{2}e^{-3t} \end{pmatrix}$.

D'où les solutions :

$$\begin{cases} x : t \mapsto 2\lambda e^{5t} - 2\mu e^{-3t} - te^{-3t} - \frac{e^{-3t}}{8} \\ y : t \mapsto \lambda e^{5t} + \mu e^{-3t} - \frac{e^t}{8} - \frac{e^{-3t}}{16} + \frac{t}{2}e^{-3t} \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

$$(\Sigma_3) : \begin{cases} x'_1 = (1+t)x_1 + tx_2 - e^t \\ x'_2 = -tx_1 + (1-t)x_2 + e^t \end{cases}$$

Attention ce système n'est pas à coefficients constants vu que la matrice des coefficients est $A(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$. La technique habituelle n'est du coup pas censée fonctionner ici mais il se produit un petit miracle : les valeurs propres de $A(t)$ ne dépendent pas de t . On trouve ici $\chi_{A(t)} = (X-1)^2$ et comme $X-1$ n'est clairement pas annulateur de $A(t)$, la matrice $A(t)$ n'est pas diagonalisable (sauf dans le cas particulier où $t=0$). Il est néanmoins très facile de la trigonaliser (car c'est une matrice 2×2)...

Après trigonalisation on résout le système obtenu via $Y = P^{-1}X$ puis on utilise la variation des constantes pour trouver une solution particulière (cf. exemple précédent).

Pour ceux qui sont arrivés au bout, voici les solutions :

$$\begin{cases} x_1 : t \mapsto \lambda \left(1 + \frac{t^2}{2}\right) e^t + \mu e^t - te^t \\ x_2 : t \mapsto -\lambda \frac{t^2}{2} e^t - \mu e^t + te^t \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

$$(\Sigma_4) : \begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases}$$

Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on trouve $\chi_A = (X-2)^2(X-1)$ - on aura pu attaquer le calcul de χ_A par

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ par exemple...

Ainsi χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

On trouve aussi $E_1(A) = Vect \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_2(A) = Vect \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi la somme des dimensions des

SEP n'est pas égale à 3 et donc A n'est pas diagonalisable. Cependant A est trigonalisable.

Posant $C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on cherche un vecteur inconnu $C_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vérifiant

$AC_3 = C_2 + 2C_3$. La résolution d'un système linéaire nous mène aux conditions $b = c$ et $a = 2c - 1$, donc $C_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

Notant alors $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ la base $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3)$ que l'on vient de former, on a $A = PTP^{-1}$, où $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le changement habituel d'inconnue $Y = PX$ permet d'écrire les équivalentes :

$$\Sigma_4 \iff X' = AX \iff Y' = TY,$$

donc, notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

$$\Sigma_4 \iff \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 + y_3 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases} \iff \exists(a, c) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} y_1 : t \mapsto ae^t \\ y_2' = 2y_2 + ce^{2t} \\ y_3 : t \mapsto ce^{2t} \end{cases}.$$

On résout à part l'équa diff $y_2' = 2y_2 + ce^{2t}$ pour laquelle on a toutes les techniques dans le cours de sup. On trouve : $\exists b \in \mathbb{R}, y_3 : t \mapsto be^{2t} + cte^{2t}$.

Et ainsi $X = PY$ donne :

$$\exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = ae^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (be^{2t} + cte^{2t}) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + ce^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$\exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x : t \mapsto 2ae^t + (2b - c + 2ct)e^{2t} \\ y : t \mapsto (b + ct)e^{2t} \\ z : t \mapsto ae^t + (b + ct)e^{2t} \end{cases}.$$

$$(\Sigma_5) : \begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$$

Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient $\chi_A = (X - 2)(X^2 - X + 1)$ - on aura pu attaquer le calcul de χ_A par $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ par exemple...

On trouve ainsi que χ_A est non scindé sur $\mathbb{R}$ mais est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, les racines étant $2, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = -j$ et $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = -j^2$. Ainsi A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

On trouve $E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_{-j^2}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \\ -\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-j}(A) = \overline{E_{-j^2}(A)} = \text{Vect} \begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \\ \sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les techniques habituelles de résolution des systèmes différentiels linéaires dans le cas diagonalisable nous mène à l'ensemble des solutions complexes de Σ_5 :

$$\left\{ t \mapsto \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \\ -\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \\ \sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

c'est-à-dire que $(\varphi_1, \varphi, \overline{\varphi})$ forme une base de cet espace, où $\varphi_1 : t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\varphi : t \mapsto e^{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)t} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ -\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix}$. On sait alors que $(\varphi_1, \operatorname{Re}(\varphi), \operatorname{Im}(\varphi))$ forme une base de l'espace des solutions

réelles de Σ_5 . Or $\varphi(t) = e^{\frac{t}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right] \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, donc

$$\operatorname{Re}(\varphi(t)) = e^{\frac{t}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

$$\operatorname{Im}(\varphi(t)) = e^{\frac{t}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

et les solutions réelles de Σ_5 sont les $X : t \mapsto a\varphi_1(t) + b\operatorname{Re}(\varphi(t)) + c\operatorname{Im}(\varphi(t))$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, ce qui donne :

$$\begin{cases} x : t \mapsto ae^{2t} + e^{\frac{t}{2}} \left[\frac{b+\sqrt{3}c}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \frac{c-\sqrt{3}b}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right] \\ y : t \mapsto e^{\frac{t}{2}} \left[-c\sqrt{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + b\sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right] \\ z : t \mapsto -ae^{2t} + e^{\frac{t}{2}} \left[b \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right] \end{cases}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 9 (**Résolution à l'aide d'une exponentielle de matrice)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A .
2. En déduire l'expression de $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre le système différentiel $(\Sigma) : \begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases}$.

Corrigé de l'exercice 9

1. On obtient facilement

$$\chi_A = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = (X - 1)^3.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $(A - I)^3 = 0$, donc on calcule facilement $e^{t(A-I)}$:

$$e^{t(A-I)} = I + t(A - I) + \frac{t^2}{2}(A - I)^2.$$

Puisque $t(A - I)$ et tI commutent, on en déduit

$$e^{tA} = e^{tI} e^{t(A-I)} = e^t e^{t(A-I)} = e^t \left(I + t(A - I) + \frac{t^2}{2}(A - I)^2 \right),$$

c'est-à-dire

$$e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1+t & t^2 & t+t^2 \\ t & 1-2t+t^2 & -t+t^2 \\ -t & 2t-t^2 & 1+t-t^2 \end{pmatrix}.$$

3. D'après le cours, les solutions de ce système différentiel $X'(t) = AX(t)$ sont les $X(t) = e^{tA}V$ avec $V \in \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x(t) &= (\alpha(1+t) + \beta t^2 + \gamma(t+t^2))e^t \\ y(t) &= (\alpha t + \beta(1-2t+t^2) + \gamma(-t+t^2))e^t \\ z(t) &= (-\alpha t + \beta(2t-t^2) + \gamma(1+t-t^2))e^t \end{cases}, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

IV Résolution d'équations scalaires

Exercice 10 (*Résolution par série entière)

En utilisant les séries entières, résoudre sur $] -1, 1[$ l'équation différentielle :

$$(1-t^2)x'' - 6tx' - 4x = 0.$$

Exprimer la solution générale à l'aide de fonctions usuelles.

Corrigé de l'exercice 10

On trouve que les coefficients d'une série entière $\sum a_n t^n$ solution satisfont la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n+4}{n+2} a_n.$$

On fera attention à ce que le raisonnement soit correctement effectué (analyse-synthèse). On doit vérifier dans la synthèse que la série entière obtenue à un rayon > 0 : c'est le cas en séparant $\sum a_{2n} t^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} t^{2n+1}$. La relation de récurrence obtenue nous donne

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} t^{2(n+1)}}{a_{2n} t^{2n}} \right| = \left| \frac{(2n+4)2n}{(2n+2)^2} \right| t^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} t^2,$$

donc le raisonnement habituel, bien écrit, avec la règle de d'Alembert donne un rayon égal à 1 pour $\sum a_{2n} t^{2n}$. On procède de même avec $\sum a_{2n+1} t^{2n+1}$ pour laquelle on trouve également un rayon de 1 et enfin, par somme, $\sum a_n t^n$ a un rayon ≥ 1 donc non nul, ce qui valide les calculs menés dans l'analyse.

Ensuite, on trouve facilement une expression des coefficients (en distinguant les cas pair et impair).

En effet, on a $a_{2p} = \frac{2p+2}{2p} \times \frac{2p}{2p-2} \times \cdots \times \frac{4}{2} a_0 = \frac{2p+2}{2} a_0 = (p+1)a_0$ et, de la même façon,

$$a_{2p+1} = \frac{2p+3}{3} a_1.$$

Ainsi a-t-on trouvé les fonctions $S : t \mapsto a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)t^{2p} + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2p+3}{3} t^{2p+1}$, $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$, comme solutions DSE de l'équation sur $] -1, 1[$ (vu que $R \geq 1$).

On a, pour tout $x \in] -1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{p=0}^{+\infty} x^p$ donc, par dérivation terme à terme, $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)x^p$ sur $] -1, 1[$.

Et si on se donne $f : x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p+3}$ sur $] -1, 1[$, on a $f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} x^{2p+1} = x \sum_{p=1}^{+\infty} x^{2p} = x \sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p} - x =$

$$\frac{x}{1-x^2} - x \text{ et, en dérivant on obtient après calculs : } \sum_{p=0}^{+\infty} (2p+3)x^{2p+2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}.$$

Donc, divisant par x , on obtient : $\forall x \in] -1, 1[\setminus \{0\}$, $\sum_{p=0}^{+\infty} (2p+3)x^{2p+1} = \frac{3x - x^3}{(1-x^2)^2}$ mais on vérifie que cette relation vaut finalement aussi pour $x = 0$.

Et finalement les fonctions S s'écrivent : $S : t \mapsto \frac{a_0 + \frac{a_1}{3}(3t - t^3)}{(1-t^2)^2}$, $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$.

On a donc trouvé un espace vectoriel de dimension 2 de solutions DSE sur $] -1, 1[$. Or, l'équa diff proposée étant équivalente sur $] -1, 1[$ à une EDL linéaire d'ordre 2 résolue (vu que $1-t^2$ ne s'y annule pas) et homogène, on sait que l'ensemble de ses solutions est justement un espace vectoriel de dimension 2. On les a donc toutes trouvées.

Exercice 11 (*Variation des constantes)

Résoudre les équations différentielles :

1. $(E_1) : (1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$.
2. $(E_2) : y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}$ sur $] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} [$.
3. $(E_3) : t^2 y'' - 2y = 3t^2$ sur $\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 11

1. C'est une équation linéaire d'ordre 1 qui peut se mettre sous forme résolue (puisque le coefficient $x \mapsto (1+x)$ ne s'annule pas sur $I =] -1, +\infty[$, il n'y a pas de difficulté particulière. On résout l'équation homogène, puis on applique la MVC : les solutions de (E_1) sur I sont les $y(x) = \frac{\lambda(x)}{1+x}$, avec $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$(1+x) \left(\frac{\lambda'(x)}{1+x} - \frac{\lambda(x)}{(1+x)^2} \right) + \frac{\lambda(x)}{1+x} = 1 + \ln(1+x),$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(x) = 1 + \ln(1+x).$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\lambda(x) = x + (1+x) \ln(1+x) - \int \frac{1+x}{1+x} dx = (1+x) \ln(1+x) + Cte,$$

donc les solutions cherchées sont :

$$y(x) = \frac{\alpha}{1+x} + \ln(1+x), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(on obtient bien une droite affine, conformément au théorème du cours).

2. Les solutions (à valeurs réelles) de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont les combinaisons linéaires de $\cos$ et $\sin$. On résout (E_2) avec la MVC : les solutions sont les fonctions du type

$$y(x) = \lambda(x) \cos(x) + \mu(x) \sin(x),$$

où λ et μ sont deux fois dérivables sur $I =] -\pi/2, \pi/2[$ et vérifient le système

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(x) \\ \mu'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix}$$

(rappelons que la matrice du système est obtenue à l'aide du système fondamental de solutions $(\cos, \sin)$, auquel on rajoute les dérivées). On obtient facilement (inversion d'une matrice orthogonale ...) :

$$\begin{pmatrix} \lambda'(x) \\ \mu'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{pmatrix} \lambda(x) \\ \mu(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(\cos(x)) + \alpha \\ x + \beta \end{pmatrix},$$

ce qui donne les solutions de (E_2) sur I :

$$y(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \cos(x) \ln(\cos(x)) + x \sin(x), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

(il s'agit bien d'un plan affine, conformément au cours).

3. On résout d'abord sur les intervalles $I_1 =] -\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$, sur lesquels l'équation se met sous forme résolue, et donc les solutions de (E_3) sur ces intervalles forment un plan affine. L'équation homogène est $(H_3) : t^2 y'' - 2y = 0$. En cherchant des solutions simples sous la forme t^α , on obtient que $t \mapsto 1/t$ et $t \mapsto t^2$ sont solutions, et elles sont libres, donc elles forment une

base du plan vectoriel formé des solutions de (H_3) . Avec la MVC, on obtient que les solutions de (E_3) sur I_1 et I_2 sont les

$$y(t) = \frac{\lambda(t)}{t} + \mu(t)t^2,$$

avec λ et μ dérivables et vérifiant

$$\begin{pmatrix} 1/t & t^2 \\ -1/t^2 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2t & -t^2 \\ 1/t^2 & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \\ 1/t \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{pmatrix} \lambda(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{t^3}{3} + \alpha \\ \ln|t| + \beta \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les solutions de (E_3) sur I_1 et I_2 sont les

$$y(t) = \frac{\alpha}{t} + \beta t^2 - \frac{t^2}{3} + t^2 \ln|t|.$$

Résolution sur $\mathbb{R}$: toute solution de (E_3) sur $\mathbb{R}$, si elle existe, est de la forme :

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{t} + \beta t^2 - \frac{t^2}{3} + t^2 \ln|t| & \text{si } t > 0 \\ \frac{\alpha'}{t} + \beta' t^2 - \frac{t^2}{3} + t^2 \ln|t| & \text{si } t < 0 \end{cases},$$

où $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \in \mathbb{R}^4$. Une telle solution se doit d'être continue en 0, ce qui oblige $\alpha = \alpha' = 0$ (sinon, une des limites en 0^+ ou 0^- est infinie). Avec cette hypothèse, on a $y(0) = \lim_0 y = 0$, et

$$\frac{y(t) - y(0)}{t} = \begin{cases} \beta t - \frac{t}{3} + t \ln|t| & \text{si } t > 0 \\ \beta' t - \frac{t}{3} + t \ln|t| & \text{si } t < 0 \end{cases} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0,$$

donc y est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$. Mais y ne sera pas deux fois dérivable en 0 car

$$\frac{y'(t) - y'(0)}{t} = \begin{cases} 2\beta - \frac{2}{3} + \ln(t) + 1 & \text{si } t > 0 \\ 2\beta' - \frac{2}{3} + \ln(-t) + 1 & \text{si } t < 0 \end{cases} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -\infty.$$

Ainsi, l'équation (E_3) n'a aucune solution sur $\mathbb{R}$ (l'espace affine peut en effet être vide lorsque l'équa. diff ne peut pas se mettre sous forme résolue).

Exercice 12 (**Prolongement de solutions)

Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ possèdent une limite finie en 0^+ . Le prolongement obtenu est-il dérivable ? deux fois dérivable ?

Corrigé de l'exercice 12

On exprime les solutions de (E) (sur $I =]0; +\infty[$) sous forme intégrale à l'aide de la méthode de variation des constantes. Ces solutions sont les :

$$y(x) = (A(x) + xB(x))e^{-x},$$

avec A, B dérivables sur I telles que :

$$\begin{cases} A'(x)e^{-x} + B'(x)xe^{-x} = 0 \\ -A'(x)e^{-x} + B'(x)(1-x)e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases} \iff \begin{cases} A'(x) = -\sqrt{x}e^x \\ B'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}e^x \end{cases}.$$

Ceci montre que les solutions de (E) sur I sont les :

$$y_{a,b}(x) = \left(-\int_1^x \sqrt{t}e^t dt + x \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt + a + bx \right) e^{-x}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Puisque l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$ converge, on obtient que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $y_{a,b}$ possède une limite finie en 0^+ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y_{a,b}(x) = a + \int_0^1 \sqrt{t} e^t dt.$$

Ainsi, toutes les solutions $y_{a,b}$ se prolongent continûment en 0 en posant $y_{a,b}(0) = a + \int_0^1 \sqrt{t} e^t dt$. Reste à étudier la dérivabilité du prolongement en 0. Pour cela on utilise le théorème de prolongement du caractère C^1 . Les fonctions $y_{a,b}$ sont C^1 sur I et

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad y'_{a,b}(x) &= \left(-\sqrt{x} e^x + \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt + x \frac{e^x}{\sqrt{x}} + b \right) e^{-x} - \left(-\int_1^x \sqrt{t} e^t dt + x \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt + a + bx \right) e^{-x} \\ &= \left((1-x) \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt + \int_1^x \sqrt{t} e^t dt + b - a - bx \right) e^{-x}. \end{aligned}$$

Effectuons alors un développement limité en 0 :

$$\int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt = \int_1^0 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt + \int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt = \int_1^0 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt + 2\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

(en effet, d'après le théorème d'intégration des relations de comparaison, on a l'équivalence des restes d'intégrales convergentes : $\int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{x}$).

De même :

$$\int_1^x \sqrt{t} e^t dt = \int_1^0 \sqrt{t} e^t dt + \int_0^x \sqrt{t} e^t dt = \int_1^0 \sqrt{t} e^t dt + \frac{2}{3} x^{3/2} + o(x^{3/2})$$

(puisque $\int_0^x \sqrt{t} e^t dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_0^x \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} x^{3/2}$).

Donc il existe une constante réelle C telle que

$$\forall x > 0, \quad y'_{a,b}(x) = C + 2\sqrt{x} + o(\sqrt{x}).$$

On en déduit que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la dérivée $y'_{a,b}$ possède une limite finie en 0^+ , donc le prolongement de $y_{a,b}$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, avec $y'_{a,b}(0) = C$.

Mais ce prolongement n'est jamais deux fois dérivable (quelles que soient les valeurs de a et b) puisque

$$\frac{y'_{a,b}(x) - y'_{a,b}(0)}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

Exercice 13 (*Équation d'Airy)

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - xy = 0$.

Montrer, sans chercher à les expliciter à l'aide des fonctions usuelles, que toutes les solutions de (E) sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 13

Si $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une fonction développable en série entière sur $] -R, R[$, alors par dérivation terme à terme, y est solution de (E) sur $] -R, R[$ si et seulement si

$$0 = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}] x^n,$$

ce qui équivaut par unicité d'un DSE aux relations :

$$a_2 = 0, \quad \forall n \geq 1, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}.$$

En séparant les termes de la suite (a_n) selon leur reste modulo 3, on obtient par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{3n} = \frac{a_0}{\prod_{k=1}^n 3k(3k-1)}, \quad a_{3n+1} = \frac{a_1}{\prod_{k=1}^n (3k+1)(3k)}, \quad a_{3n+2} = 0$$

(avec comme d'habitude la convention du produit vide qui vaut 1 pour $n = 0$). D'où l'expression :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad y(x) = a_0 \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{k=1}^n 3k(3k-1)} x^{3n} \right)}_{=y_0(x)} + a_1 \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{k=1}^n (3k+1)3k} x^{3n+1} \right)}_{=y_1(x)}.$$

Reste à vérifier que ces séries entières sont bien convergentes sur un domaine à déterminer. Une application simple de la règle de d'Alembert montre que y_0 et y_1 sont absolument convergentes pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc elles définissent deux séries entières de rayon $+\infty$. De plus, on montre facilement que la famille (y_0, y_1) est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, à l'aide du wronskien en $x = 0$:

$$w(0) = \begin{vmatrix} y_0(0) & y_1(0) \\ y_0'(0) & y_1'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

On a donc trouvé un plan vectoriel formé de solutions DSE sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène (E) . Puisque cette équation d'ordre 2 est sous forme résolue, on sait d'après le cours que l'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{R}$ est un plan vectoriel. On a donc trouvé toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, et elles sont toutes DSE sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E) = Vect(y_0, y_1)$.

Exercice 14 (**)

Soit l'équation différentielle $(E) : (1-x)y' + y = g$, où $g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

On note $(E_0) : (1-x)y' + y = 0$.

1. Résoudre (E_0) .

2. On suppose, dans cette question, que g est développable en série entière (en 0), $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, de rayon ≥ 1 .

Montrer que (E) admet au moins une solution développable en série entière (en 0), $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon ≥ 1 , et vérifiant :

$$a_1 = -a_0 + b_0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k b_k.$$

3. On suppose dans cette question : $\forall x \in]-1, 1[, g(x) = -\ln(1 - \frac{x}{2})$.

Déterminer une solution de (E) sous forme de série entière et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Corrigé de l'exercice 14

1. Sur $I =]-1, 1[$, on a

$$(E_0) \iff y' = \frac{1}{x-1} y \iff y \in Vect(x \mapsto 1-x).$$

2. Si $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une fonction DSE sur $] -R, R[$ avec $R \geq 1$, alors par dérivation terme à terme, y est solution de (E) sur $] -1, 1[$ si et seulement si

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)a_{n+1} - (n-1)a_n] x^n,$$

ce qui équivaut par unicité d'un DSE aux relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1} a_n + \frac{1}{n+1} b_n.$$

On obtient alors par récurrence simple les relations voulues :

$$a_1 = -a_0 + b_0, \quad a_2 = \frac{1}{2}b_1,$$

et pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n-2}{n}a_{n-1} + \frac{1}{n}b_{n-1} = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}a_{n-2} + \frac{(n-1)b_{n-1} + (n-2)b_{n-2}}{n(n-1)} = \dots \\ &= \frac{(n-2)(n-3) \cdots \times 2 \times 1}{n(n-1) \cdots \times 4 \times 3}a_2 + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n-1} kb_k = \frac{2a_2}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n-1} kb_k = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} kb_k. \end{aligned}$$

Reste à vérifier que la série entière obtenue (unique dès que a_0 est choisi) a bien un rayon de convergence $R \geq 1$. Pour cela, revenons à la définition du rayon de convergence : fixons $0 \leq r < 1$ et montrons que la suite $(a_n r^n)$ est bornée. Pour $n \geq 2$, on a

$$|a_n r^n| \leq \frac{r^n}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k|b_k|.$$

Mais la série entière $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence ≥ 1 donc la suite $(b_k r^k)$ est bornée : il existe $M > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, |b_k r^k| \leq M$. D'où la majoration

$$\forall n \geq 2, \quad |a_n r^n| \leq \frac{r^n}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k M r^{-k} = \frac{M}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k r^{n-k},$$

avec $0 \leq r^{n-k} \leq 1$ pour tout $k \in [0, n-1]$ (vu que $n-k \geq 0$) donc

$$\forall n \geq 2, \quad |a_n r^n| \leq \frac{M}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{M}{2}.$$

Ainsi, $(a_n r^n)$ est bornée pour tout réel $r \in [0, 1[$, donc la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$.

On a donc montré l'existence de solutions de (E) développables en série entière au moins sur $] -1, 1[$: les fonctions

$$y : x \mapsto a_0(1-x) + b_0x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} kb_k \right) x^n, \quad a_0 \in \mathbb{R}.$$

Remarque : vu que sur l'intervalle $I =] -1, 1[$ l'équation (E) peut se mettre sous forme résolue, on sait par le cours que $\mathcal{S}_I(E)$ est une droite affine, donc on a en fait montré que **toutes** les solutions de (E) sur I sont développables en série entière sur I .

3. On suppose que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad g(x) = -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x/2)^n}{n}$$

(cette relation est même vraie pour $x \in] -2, 2[$ d'ailleurs, la série entière a pour rayon 2...). D'après les calculs précédents avec $b_0 = 0$ et $b_n = \frac{1}{n2^n}$ pour tout $n \geq 1$, on obtient

$$a_1 = -a_0, \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{n(n-1)} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

Remarque

On comprend sur cet exemple que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ n'est pas nécessairement égal à celui de $\sum b_n x^n$ (dans la question précédente, on a seulement montré que ce rayon est supérieur ou égal à 1). Dans cet exemple, $\sum b_n x^n$ est de rayon 2, alors que $\sum a_n x^n$ est de rayon 1 puisque $a_n \sim \frac{1}{n^2}$.

On en déduit que les solutions de (E) sur $] - 1, 1[$ sont les

$$y : x \mapsto a_0(1-x) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) x^n = a_0(1-x) + S(x) - 2S(x/2),$$

en posant

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

Par dérivation terme à terme :

$$S'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = -\ln(1-x),$$

donc puisque $S(0) = 0$ (d'après le DSE),

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad S(x) = \int_0^x -\ln(1-t)dt = (1-x)\ln(1-x) + x,$$

donc finalement les solutions de (E) sur $I =] - 1, 1[$ sont les

$$y : x \mapsto a_0(1-x) + (1-x)\ln(1-x) + (x-2)\ln(1-\frac{x}{2}), \quad a_0 \in \mathbb{R}.$$

V Etudes qualitatives

Exercice 15 (**Limite de solutions)

1. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue de limite nulle en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = h$ convergent vers 0 en $+\infty$.
Indication : en utilisant la variation de la constante, on peut obtenir une expression des solutions à l'aide d'une intégrale.
2. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On suppose que $f + f' \xrightarrow[+\infty]{} \ell$. Montrer que $f \xrightarrow[+\infty]{} \ell$.

Corrigé de l'exercice 15

1. En résolvant l'équation différentielle $y' + y = h$ par la méthode de variation de la constante, on obtient une expression intégrale des solutions :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \left(y(0) + \int_0^x h(t)e^t dt \right) e^{-x}.$$

Montrons maintenant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

On fixe $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur h , il existe $A > 0$ tel que $t \geq A \implies |h(t)| \leq \varepsilon$.

Pour $x \geq a$, on a :

$$y(x) = \left(y(0) + \int_0^A h(t)e^t dt + \int_A^x h(t)e^t dt \right) e^{-x},$$

donc

$$|y(x)| \leq \underbrace{\left(|y(0)| + \int_0^A |h(t)|e^t dt \right)}_{=C_A} e^{-x} + \left(\int_A^x \underbrace{|h(t)|}_{\leq \varepsilon} e^t dt \right) e^{-x} \leq C_A e^{-x} + \varepsilon(e^x - e^A)e^{-x} \leq C_A e^{-x} + \varepsilon.$$

Enfin, il existe $B > 0$ tel que $x \geq B \implies C_A e^{-x} \leq \varepsilon$, donc

$$x \geq \max(A, B) := X_0 \implies |y(x)| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui montre bien la convergence vers 0 voulue.

2. Posons $y = f - \ell$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et vérifie :

$$y' + y = f' + f - \ell \xrightarrow{+\infty} 0,$$

donc d'après la question précédente, $y \xrightarrow{+\infty} 0$, ce qui prouve que $f \xrightarrow{+\infty} \ell$.

Exercice 16 (**)

Soient $n \geq 1$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrer que toutes les solutions $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de $X'' + SX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ sont bornées.

Corrigé de l'exercice 16

Appliquons le théorème spectral : S étant réelle symétrique, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}SP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Vu que S est définie positive, on obtient de plus que les $\lambda_i > 0$.

On peut alors résoudre le système différentiel proposé par changement de base : en posant $Y : t \mapsto P^{-1}X(t)$, on a

$$X'' + SX = 0 \iff P^{-1}X'' + DP^{-1}X = 0 \iff Y'' + DY = 0.$$

En notant $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de Y dans la base canonique on a donc

$$Y'' + DY = 0 \iff \forall i \in [1, n], \quad y_i'' + \lambda_i y_i = 0 \iff \forall i \in [1, n], \quad y_i \in \text{Vect}(\cos(t\sqrt{\lambda_i}), \sin(t\sqrt{\lambda_i})).$$

Les solutions Y sont donc bornées sur $\mathbb{R}$ (puisque leurs fonctions coordonnées le sont), et il en est de même des solutions $X : t \mapsto PY(t)$ (puisque P ne dépend pas de t).

Exercice 17 (**)

Soient I un intervalle réel d'intérieur non vide et $q_1, q_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ des applications continues telles que :

$$\forall t \in I, \quad q_2(t) \geq q_1(t).$$

Soient u_1 et u_2 des applications 2 fois dérivables sur I et telles que :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad \forall t \in I, \quad u_i''(t) + q_i(t)u_i(t) = 0.$$

On suppose qu'il existe a et b dans I avec $a < b$ tels que $u_1(a) = u_1(b) = 0$ et que u_1 et u_2 ne s'annulent pas sur $]a, b[$.

On définit, pour tout $t \in I$, $w(t) = u_1'(t)u_2(t) - u_2'(t)u_1(t)$.

1. Démontrer que w est monotone sur $[a, b]$ et étudier le signe de $w(a)$ et $w(b)$.
2. En déduire que u_1 et u_2 sont proportionnelles sur $[a, b]$.

Corrigé de l'exercice 17

1. Les fonctions u_1 et u_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$ (puisque $u_i'' = -q_i u_i$ est continue pour $i = 1, 2$), la fonction $w = u_1' u_2 - u_2' u_1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$w' = u_1'' u_2 - u_2'' u_1 = (q_2 - q_1) u_1 u_2$$

Par hypothèse, u_1 et u_2 sont continues et ne s'annulent pas sur $]a, b[$, donc elles gardent un signe constant strict sur $]a, b[$ (par le TVI), donc un signe constant large sur $[a, b]$ par continuité. En outre, $q_2 - q_1 \geq 0$ donc par produit w' garde un signe constant (large) sur $[a, b]$, ce qui montre que w est monotone sur $[a, b]$.

Etudions maintenant le signe de

$$w(a) = u_1'(a)u_2(a), \quad w(b) = u_1'(b)u_2(b)$$

en fonction du signe constant (large) de u_1 et u_2 sur $[a, b]$.

Puisque $u_1(a) = u_1(b) = 0$, on a

$$u_1'(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{u_1(t)}{t - a}, \quad u_1'(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{u_1(t)}{t - b},$$

donc $u'_1(a)$ est du signe (large) de u_1 sur $[a, b]$, et $u'_1(b)$ de signe contraire.

Par produit, on déduit finalement que $w(a)$ est du signe de $u_1 u_2$ sur $[a, b]$, alors que $w(b)$ est du signe contraire.

2. Si $u_1 u_2 \geq 0$ sur $[a, b]$, alors w est croissante sur $[a, b]$, mais $w(a) \geq 0 \geq w(b)$, donc $w = 0$ sur $[a, b]$.

Si $u_1 u_2 \leq 0$ sur $[a, b]$ alors w est décroissante sur $[a, b]$, mais $w(a) \leq 0 \leq w(b)$, donc $w = 0$ sur $[a, b]$.

Dans tous les cas $w = 0$, donc

$$\forall t \in]a, b[, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{u_1}{u_2}(t) \right) = \frac{u'_1(t)u_2(t) - u'_2(t)u_1(t)}{u_2^2(t)} = \frac{w(t)}{u_2^2(t)} = 0$$

(ce quotient existe bien car u_2 ne s'annule pas sur $]a, b[$). Ainsi, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in]a, b[, \quad u_1(t) = \lambda u_2(t)$, et cette égalité reste vraie en a et b par continuité.

On a bien montré que u_1 et u_2 sont proportionnelles sur $[a, b]$.

Exercice 18 (**Zéros de solutions)

Soient I un intervalle réel d'intérieur non vide et $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Soit $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $z' + pz > 0$. Montrer que z admet au plus un zéro dans I .
2. Soient $q : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $q < 0$ et $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et non nulle telle que $y'' + py' + qy = 0$.
Montrer que yy' admet au plus un zéro dans I .

Corrigé de l'exercice 18

1. Soit P une primitive de p sur I (elle existe puisque p est continue sur I). On remarque que

$$\frac{d}{dt}(z(t)e^{P(t)}) = (z'(t) + p(t)z(t))e^{P(t)} > 0$$

donc la fonction $t \mapsto z(t)e^{P(t)}$ est strictement croissante sur l'intervalle I , ce qui montre son injectivité. Ainsi, $z(t)e^{P(t)}$ s'annule au plus une fois sur I , donc $z(t)$ également (ces deux fonctions ont les mêmes zéros puisque $e^{P(t)}$ ne s'annule jamais).

2. La fonction $z = yy'$ est dérivable sur I , et vérifie :

$$z' + pz = (y')^2 + yy'' + pyy' = (y')^2 - qy^2 \geq 0$$

(puisque $q > 0$). De plus, s'il existe $t_0 \in I$ tel que $z'(t_0) + p(t_0)z(t_0) = 0$, alors par somme nulle de termes positifs, on obtient

$$y'(t_0)^2 = -q(t_0)y^2(t_0) = 0,$$

donc (puisque q ne s'annule pas) : $y(t_0) = y'(t_0) = 0$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation différentielle linéaire $y'' + py' + qy = 0$ (qui est à coefficients continus et sous forme résolue) possède une seule solution vérifiant $y(t_0) = y'(t_0) = 0$, c'est la fonction nulle. Mais c'est contradictoire car on a supposé y non nulle. Donc $z' + pz > 0$ sur I , ce qui entraîne d'après la première question que $z = yy'$ s'annule au plus une fois sur I .

Exercice 19 (**Zéros d'une solution)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $p, q \in C^0(I, \mathbb{R})$. On considère l'équation :

$$(E) : y'' + py' + qy = 0.$$

Soit f une solution sur I réelle et non identiquement nulle de (E) .

1. On suppose qu'il existe deux réels a et b avec $a < b$ et tels que $f(a) = f(b) = 0$.
Montrer que l'ensemble $Z = \{x \in [a, b], f(x) = 0\}$ est un ensemble fini.
2. En déduire que l'ensemble des zéros de f est un ensemble au plus dénombrable.

Corrigé de l'exercice 19

1. Si Z est infini, alors il contient une suite injective (z_n) de laquelle on peut extraire une sous-suite $(z_{\varphi(n)})$ qui converge vers $z^* \in [a, b]$ (par compacité du segment $[a, b]$). Tous les $z_{\varphi(n)}$ sont donc distincts (et distincts de z^* quitte à délaissier un terme de la suite), vérifient $f(z_{\varphi(n)}) = 0$, donc par continuité de f sur $[a, b] \subset I$, $f(z^*) = 0$. Par dérivabilité de f sur I , on déduit également (puisque $z_{\varphi(n)} \neq z^*$ pour tout n) :

$$f'(z^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(z_{\varphi(n)}) - f(z^*)}{z_{\varphi(n)} - z^*} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0,$$

donc $f(z^*) = f'(z^*) = 0$, ce qui entraîne par le théorème de Cauchy-Lipchitz que $f = 0$ sur I (unicité de la solution car l'équation est linéaire à coefficients continus et sous forme résolue). Mais ceci est contradictoire. Donc Z est fini.

Remarque

L'hypothèse $f(a) = f(b) = 0$ est inutile ici.

2. Quelle que soit la topologie de l'intervalle I (ouvert, fermé, borné, etc.), il existe une suite de segments $[a_n, b_n]$ tels que $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ (faire un dessin pour chacun des cas). L'ensemble des zéros de f sur I est alors $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$, avec $Z_n = \{x \in [a_n, b_n], f(x) = 0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, tous les Z_n sont finis, donc leur réunion dénombrable Z est au plus dénombrable.

Exercice 20 (***)Histoires de parité

Soit $(a, b) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$. On considère l'équation différentielle homogène :

$$(E) : y'' + ay' + by = 0,$$

dont on note $\mathcal{S}_0$ l'espace des solutions.

On suppose la fonction a impaire et la fonction b paire. Soit $f \in \mathcal{S}_0$.

1. Montrer que les fonctions $f_p : t \mapsto f(t) + f(-t)$ et $f_i : t \mapsto f(t) - f(-t)$ sont des solutions de $\mathcal{S}_0$, respectivement paire et impaire.
2. En déduire que s'il existe une solution de (E) qui ne soit ni paire ni impaire, alors (f_p, f_i) forme une base de $\mathcal{S}_0$.
3. Montrer finalement qu'il existe une base de $\mathcal{S}_0$ formée d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Corrigé de l'exercice 20

1. La fonction f étant solution de (E) , on a pour tout réel t :

$$(1) \quad f''(t) + a(t)f'(t) + b(t)f(t) = 0,$$

mais aussi (en évaluant en $-t$) :

$$f''(-t) + a(-t)f'(-t) + b(-t)f(t) = 0,$$

c'est-à-dire (puisque a impaire et b paire)

$$(2) \quad f''(-t) - a(t)f'(-t) + b(t)f(-t) = 0.$$

En additionnant (1) et (2), on obtient alors que f_p est solution de (E) , et de même pour f_i en soustrayant les deux équations.

Enfin, la parité de f_p et l'imparité de f_i sont évidentes.

2. On sait d'après le cours que $\mathcal{S}_0$ est un plan vectoriel (puisque (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients continus et sous forme résolue sur $\mathbb{R}$). Si f est une solution de (E) ni paire ni impaire, alors $f_p \neq 0$ et $f_i \neq 0$. Or, on sait que l'ensemble des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont deux SEV supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, donc la famille (f_p, f_i) est libre. Cette famille est donc une base de $\mathcal{S}_0$.

3. Si (E) ne possède que des solutions paires ou que des solutions impaires, alors il existe une base (f_1, f_2) de $\mathcal{S}_0$ avec f_1 et f_2 de même parité. Dans ce cas, le wronskien

$$w = f_1 f_2' - f_1' f_2$$

est une fonction impaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (puisque f_1', f_2' sont de parité contraire à f_1, f_2), donc $w(0) = 0$. Mais c'est impossible, car $\forall t \in \mathbb{R}$, $w(t) \neq 0$ (le wronskien d'un système fondamental ne s'annule jamais). Donc il existe au moins une solution $f \in \mathcal{S}_0$ ni paire ni impaire, ce qui entraîne d'après la question précédente l'existence d'une base (f_p, f_i) de $\mathcal{S}_0$ avec f_p paire et f_i impaire.

VI Autour des lemmes de Gronwall

Exercice 21 (**Lemmes de Gronwall)

Les résultats qui suivent, appelés *lemmes de Gronwall*, servent à majorer ou minorer des fonctions vérifiant des *inéquations* différentielles ou intégrales. Ce sont notamment des outils puissants pour établir des résultats d'unicité dans la théorie des équations différentielles.

Dans tout cet exercice, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, et t_0 un point de I .

1. *Lemme de Gronwall différentiel*

Soient $w \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $v \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ telles que $\forall t \in I$, $w'(t) \leq v(t)w(t)$.

Montrer que pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, on a $w(t) \leq w(t_0)e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$.

2. *Lemme de Gronwall intégral*

Soient $u, v \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ tels que $v \geq 0$ et pour tout $t \in I$:

$$t \geq t_0 \implies u(t) \leq a + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds.$$

Montrer que pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, on a $u(t) \leq ae^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$.

3. *Variante du lemme de Gronwall intégral*

Soient $u, v \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ tels que $u \geq 0$, $v \geq 0$ et

$$\forall t \in I, \quad u(t) \leq a + \left| \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds \right|.$$

Montrer que pour tout $t \in I$, on a $u(t) \leq ae^{\left| \int_{t_0}^t v(s)ds \right|}$.

Corrigé de l'exercice 21

1. Par hypothèse, $w' - vw \leq 0$, donc en multipliant par $e^{-V} > 0$ (où V est une primitive de v sur I), on obtient :

$$\forall t \in I, \quad \frac{d}{dt}(w(t)e^{-V(t)}) = (w'(t) - v(t)w(t))e^{-V(t)} \leq 0.$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto w(t)e^{-V(t)}$ décroît sur I , ce qui donne l'inégalité :

$$\forall t \in I, \quad t \geq t_0 \implies w(t)e^{-V(t)} \leq w(t_0)e^{-V(t_0)}.$$

En choisissant V la primitive de v nulle en t_0 (c'est-à-dire $V : t \mapsto \int_{t_0}^t v$), on obtient l'inégalité voulue :

$$\forall t \in I, \quad t \geq t_0 \implies w(t) \leq w(t_0)e^{V(t)}.$$

2. On se ramène à la question précédente, en étudiant le membre de droite de l'inégalité intégrale. Posons

$$w : t \mapsto a + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds.$$

On a $w \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ (puisque u et v sont continues sur I) et

$$\forall t \in I, \quad w'(t) = v(t)u(t)$$

Mais par hypothèse, $u(t) \leq w(t)$ pour $t \geq t_0$ **et** $v \geq 0$ donc

$$\forall t \in I, \quad t \geq t_0 \implies w'(t) = v(t)u(t) \leq v(t)w(t).$$

D'après la première question (utilisée avec l'intervalle $\{t \in I, t \geq t_0\}$ au lieu de I tout entier), on obtient

$$\forall t \in I, \quad t \geq t_0 \implies w(t) \leq w(t_0)e^{\int_{t_0}^t v} = ae^{\int_{t_0}^t v},$$

donc par transitivité :

$$\forall t \in I, \quad t \geq t_0 \implies u(t) \leq w(t) \leq ae^{\int_{t_0}^t v}.$$

3. Ici, u et v sont continues **et positives**, donc le signe de $\int_{t_0}^t vu$ est celui de $t - t_0$.

- Pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, on a par hypothèse

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^t vu,$$

donc par la question précédente :

$$t \geq t_0 \implies u(t) \leq ae^{\int_{t_0}^t v} = ae^{|\int_{t_0}^t v|}.$$

- Pour tout $t \in I$ tel que $t \leq t_0$, l'hypothèse devient

$$u(t) \leq a - \int_{t_0}^t vu,$$

donc on va refaire le raisonnement des questions précédentes avec la fonction

$$w : t \mapsto a - \int_{t_0}^t vu$$

w est de classe $\mathcal{C}^1$ et $w' : t \mapsto -v(t)u(t)$ donc en multipliant l'inégalité $u \leq w$ par $-v \leq 0$, on obtient :

$$t \leq t_0 \implies w'(t) \geq -v(t)w(t) \implies \frac{d}{dt}(w(t)e^{\int_{t_0}^t v}) \geq 0.$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto w(t)e^{\int_{t_0}^t v}$ croît sur $I \cap]-\infty, t_0]$, ce qui donne l'inégalité :

$$t \leq t_0 \implies w(t)e^{\int_{t_0}^t v} \leq w(t_0) \implies w(t) \leq ae^{-\int_{t_0}^t v},$$

puis par transitivité :

$$t \leq t_0 \implies u(t) \leq w(t) \leq ae^{-\int_{t_0}^t v} = ae^{|\int_{t_0}^t v|}.$$

En réunissant les deux cas, on a bien montré l'inégalité voulue :

$$\forall t \in I, \quad u(t) \leq ae^{|\int_{t_0}^t v|}.$$

Exercice 22 (**Lemme de Gronwall discret)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites positives. Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$V_0 = 0, \quad \forall n \geq 1, \quad V_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k.$$

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq a_n + (1 + v_n)u_n$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq u_0 e^{V_n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{V_n - V_k}$.

Ce lemme est notamment utile pour la résolution numérique des équations différentielles, c'est-à-dire lorsqu'on cherche à approcher une solution d'équation différentielle par une suite de points (comme c'est le cas dans la méthode d'Euler par exemple).

Corrigé de l'exercice 22

Par hypothèse et positivité des suites, on a les inégalités successives :

$$u_1 \leq a_0 + (1 + v_0)u_0,$$

$$u_2 \leq a_1 + (1 + v_1)u_1 \leq a_1 + (1 + v_1)a_0 + (1 + v_1)(1 + v_0)u_0,$$

$$u_3 \leq a_2 + (1 + v_2)u_2 \leq a_2 + (1 + v_2)a_1 + (1 + v_2)(1 + v_1)a_0 + (1 + v_2)(1 + v_1)(1 + v_0)u_0,$$

donc par une récurrence simple :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\prod_{j=k+1}^{n-1} (1 + v_j) \right) + u_0 \left(\prod_{j=0}^{n-1} (1 + v_j) \right).$$

Enfin, par convexité de l'exponentielle : $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq 1 + x \leq e^x$, donc

$$\forall k \in [-1, n-1], \quad \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 + v_j) \leq \prod_{j=k+1}^{n-1} e^{v_j} = \exp \left(\sum_{j=k+1}^{n-1} v_j \right) = e^{V_n - V_{k+1}},$$

ce qui donne l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{V_n - V_{k+1}} + u_0 e^{V_n - V_0}$$

(par positivité des a_k et de u_0). Puisque $V_0 = 0$ et $V_{k+1} \geq V_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{V_n - V_k} + u_0 e^{V_n}.$$

Exercice 23 (**Une inéquation différentielle)

Trouver toutes les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'(x) + xf(x) \geq x^3 + 2x.$$

Corrigé de l'exercice 23

Si f vérifie l'inéquation différentielle proposée, alors en multipliant par $e^{x^2/2} > 0$, on a

$$\forall x \in [0, 1], \quad \frac{d}{dx}(f(x)e^{x^2/2}) = (f'(x) + xf(x))e^{x^2/2} \geq (x^3 + 2x)e^{x^2/2} = \frac{d}{dx}(x^2e^{x^2/2}).$$

Ainsi, la fonction $\varphi : x \mapsto (f(x) - x^2)e^{x^2/2}$ est croissante sur $[0, 1]$. Mais $\varphi(0) = f(0) = 0$ et $\varphi(1) = (f(1) - 1)e^{1/2} = 0$, donc φ est nulle, ce qui montre que $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Réciproquement, la fonction $f : x \mapsto x^2$ convient (elle vérifie l'égalité, donc a fortiori l'inégalité proposée).

Ainsi, le problème a une seule solution : $f : x \mapsto x^2$.

Exercice 24 (***)

Soit $q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive et croissante.

Montrer que toutes les solutions de $y'' + qy = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Corrigé de l'exercice 24

• Première méthode : avec la méthode du lemme de Gronwall

Si $y'' + qy = 0$, alors en multipliant par y' on a $y''y' + qyy' = 0$ donc en intégrant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y'(t)^2 - y'(0)^2 = \int_0^t 2y'y'' = -2 \int_0^t qyy'.$$

On fait alors une IPP :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y'(t)^2 - y'(0)^2 = [-qy^2]_0^t + \int_0^t q'y^2,$$

qui conduit à

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad q(t)y^2(t) + y'(t)^2 \leq q(0)y^2(0) + y'(0)^2 + \int_0^t q'y^2,$$

et puisque $y'(t)^2 \geq 0$, on en déduit l'inégalité "à la Gronwall" portant sur y^2 :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad q(t)y^2(t) \leq a + \int_0^t q'y^2$$

(avec $a = q(0)y^2(0) + y'(0)^2$).

On adapte alors la méthode du lemme de Gronwall intégral : en posant $\varphi : t \mapsto a + \int_0^t q'y^2$, on a $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et puisque $q > 0$ et $q' \geq 0$:

$$\varphi' = q'y^2 = \frac{q'}{q}qy^2 \leq \frac{q'}{q}\varphi,$$

donc

$$\left(\frac{\varphi}{q}\right)' = \frac{\varphi'q - \varphi q'}{q^2} \leq 0.$$

Ainsi, $\frac{\varphi}{q}$ décroît sur $\mathbb{R}^+$, ce qui entraîne

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{\varphi(t)}{q(t)} \leq \frac{\varphi(0)}{q(0)} = \frac{a}{q(0)},$$

puis par transitivité :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq y^2(t) \leq \frac{\varphi(t)}{q(t)} \leq \frac{a}{q(0)} = y^2(0) + \frac{y'(0)^2}{q(0)},$$

donc y est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

• **Seconde méthode, plus directe (mais il faut avoir l'idée de diviser par q) !**

Si $y'' + qy = 0$, alors en multipliant par y' on a $y''y' + qyy' = 0$, qu'on réécrit

$$yy' = -\frac{1}{q}y''y'$$

(possible car $q > 0$). En intégrant par parties, on obtient alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y^2(t) - y^2(0) = \int_0^t 2yy' = \int_0^t -\frac{2y''y'}{q} = \left[-\frac{(y')^2}{q}\right]_0^t - \int_0^t \frac{(y')^2 q'}{q^2}.$$

Vu que $q > 0$ et $q' \geq 0$ on en déduit

$$-\frac{(y'(t))^2}{q(t)} - \int_0^t \frac{(y')^2 q'}{q^2} \leq 0$$

et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq y^2(t) \leq y^2(0) + \frac{y'(0)^2}{q(0)},$$

donc y est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

VII Divers

Exercice 25 (**)

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soient $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ et $t_0 \in I$. On considère le système différentiel : $X' = A(t)X + B(t)$.

Montrer qu'une solution $X : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ de ce système est à valeurs réelles ssi $X(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi une solution à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui admet une valeur non réelle a en fait toutes ses valeurs non réelles !

Corrigé de l'exercice 25

• Première méthode : avec le théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}^n)$ une solution de $X' = A(t)X + B(t)$. En conjuguant cette relation, on obtient (puisque A et B sont à valeurs réelles) que $\overline{X}' = \overline{X'} = \overline{A(t)X + B(t)} = A(t)\overline{X} + B(t)$, et donc la fonction $\overline{X}$ vérifie aussi le même système différentiel. S'il existe $t_0 \in I$ tel que $X(t_0) \in \mathbb{R}^n$, alors $\overline{X}(t_0) = X(t_0)$ et donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $X = \overline{X}$ (une seule solution vérifie la condition initiale $X(t_0) = X_0$ pour tout $X_0 \in \mathbb{C}^n$). Ainsi, X est nécessairement à valeurs réelles. La réciproque est évidente.

• Seconde méthode : avec une méthode de point fixe

Fixons $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{C}^n$. Comme dans la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz, on fait apparaître l'unique solution du problème de Cauchy

$$(PC) : \quad X' = A(t)X + B(t), \quad X(t_0) = X_0$$

comme la solution d'un problème de point fixe, en considérant la suite de fonctions

$$X_0(t) = X_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \quad X_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(s)X_n(s) + B(s)) ds,$$

qui rappelons-le converge uniformément sur tout segment de I vers l'unique point fixe de l'opérateur $\Phi : X \mapsto X_0 + \int_{t_0}^t (AX + B)$, c'est-à-dire l'unique solution X de (PC) (cette convergence n'est pas facile à établir, voir le dernier exercice de cette feuille).

Dès lors, si $X_0 \in \mathbb{R}^n$, alors on obtient par récurrence triviale (puisque A et B sont à valeurs réelles) que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, X_n(t) \in \mathbb{R}^n$, donc par convergence simple, $X(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(t) \in \mathbb{R}^n$.

Remarque

L'avantage de cette seconde méthode est qu'elle peut servir à démontrer d'autres propriétés que la solution X "hériterait" de la condition initiale X_0 et des coefficients A et B de l'équation.

Par exemple, on peut montrer que si $A(t)$, $B(t)$ et $X_0 = X(t_0)$ sont à coefficients positifs pour tout $t \geq t_0$, alors la solution $X(t)$ sera elle aussi à composantes positives pour tout $t \geq t_0$.

Exercice 26 (**Une méthode de calcul utilisant le wronskien)

On souhaite résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E_0) : x'' + \frac{2}{t}x' + x = 0.$$

1. Vérifier que la fonction $\varphi_1 : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est solution.

2. Soit φ une solution quelconque de (E_0) . On note W le wronskien de (φ_1, φ) .

Montrer que sur un intervalle $J \subset]0; +\infty[$ sur lequel φ_1 ne s'annule pas, on a $\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)' = \frac{W}{\varphi_1^2}$.

3. En utilisant l'équation linéaire d'ordre 1 vérifiée par le wronskien, en déduire toutes les solutions de (E_0) .

Corrigé de l'exercice 26

1. La fonction $\varphi_1 : t \mapsto t^{-1} \sin(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I =]0; +\infty[$ et

$$\forall t > 0, \quad \varphi_1'(t) = -t^{-2} \sin(t) + t^{-1} \cos(t),$$

$$\varphi_1''(t) = 2t^{-3} \sin(t) - 2t^{-2} \cos(t) - t^{-1} \sin(t),$$

donc

$$\varphi_1''(t) + \frac{2}{t} \varphi_1'(t) + \varphi_1(t) = 2t^{-3} \sin(t) - 2t^{-2} \cos(t) - t^{-1} \sin(t) - 2t^{-3} \sin(t) + 2t^{-2} \cos(t) + t^{-1} \sin(t) = 0,$$

ce qui montre bien que φ_1 est solution de (E_0) sur I .

2. Soit φ une solution de (E_0) , et soit $J \subset I$ un intervalle sur lequel φ_1 ne s'annule pas (par exemple $J =]n\pi, (n+1)\pi[$ avec $n \in \mathbb{N}$). On a

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_1} \right)' = \frac{\varphi' \varphi_1 - \varphi \varphi_1'}{\varphi_1^2} = \frac{W}{\varphi_1^2},$$

où $W = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi \\ \varphi_1' & \varphi' \end{vmatrix}$ est le wronskien de (φ_1, φ) .

3. On sait que pour une équation différentielle du type $x'' = a(t)x' + b(t)$, le wronskien vérifie l'équation différentielle $w' = a(t)w$, donc ici :

$$\forall t \in I, \quad W'(t) = -\frac{2}{t}W(t),$$

ce qui amène

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in I, \quad W(t) = \frac{a}{t^2},$$

D'après la question précédente, on obtient pour toute solution φ de (E_0) sur J (intervalle du type $]n\pi, (n+1)\pi[$) :

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_1} \right)'(t) = \frac{W(t)}{\varphi_1^2(t)} = \frac{a}{\sin^2(t)},$$

donc en intégrant :

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_1} \right)(t) = -\frac{a \cos(t)}{\sin(t)} + b,$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in J, \quad \varphi(t) = -a \frac{\cos(t)}{t} + b \frac{\sin(t)}{t}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Ce raisonnement par condition nécessaire, valable uniquement sur $J =]n\pi, (n+1)\pi[$, permet quand même de conjecturer que $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est une deuxième solution de (E_0) , linéairement indépendante de $\varphi_1 : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ et valable sur tout I , ce que l'on vérifie aisément (comme dans la question 1.)

En outre, (E_0) est sous forme résolue sur I donc on sait *a priori* que $\mathcal{S}_I(E_0)$ est un plan vectoriel. On peut donc conclure :

$$\mathcal{S}_I(E_0) = \text{Vect}\left(t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}, t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}\right).$$

Exercice 27 (*DL d'une solution)

On considère l'équation $(E) : 2(x-1)y' + y = \sin(2x) + x^2$.

1. Montrer que (E) admet une unique solution f sur $] -\infty, 1[$ vérifiant $f(0) = 0$.
2. Déterminer un DL de f à l'ordre 4 en 0.

Corrigé de l'exercice 27

1. Sur l'intervalle $I =] -\infty, 1[$, l'équation différentielle linéaire (E) peut se mettre sous forme résolue :

$$(E) \iff y' = \frac{1}{2(1-x)}y + \frac{\sin(2x) + x^2}{2(x-1)},$$

et les coefficients de l'équation sont des fonctions continues sur I , donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : il existe une unique solution f de (E) telle que $f(0) = 0$ (car $0 \in I$).

2. Les coefficients de l'équation (E) sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I , donc on obtient par une récurrence directe que $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ (puisque $f' = af + b$ avec $a, b \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$), d'où l'existence de DL en 0 à tout ordre.

Calculons alors le DL_4 de f en 0, en partant du DL_3 de f' en 0 (qui existe car f' est $\mathcal{C}^\infty$) :

$$f'(x) = f'(0) + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3).$$

Par le théorème d'intégration "terme à terme" d'un DL :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_3}{4}x^4 + o(x^4)$$

("on gagne un ordre").

Remarque

C'est une méthode classique, comme pour calculer le DL de $\arctan$. Attention, on ne peut pas faire l'inverse ! Ce n'est pas parce que f admet un DL_n en 0 que f' admet un DL_n en 0.

Vu que $f(0) = 0$ et que d'après (E), $f'(0) = \frac{f(0)}{2} + 0 = 0$, on obtient en effectuant les DL_3 en 0 des deux membres de l'équation (E) :

$$-2(1-x)(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)) + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + o(x^3) = 2x + x^2 - \frac{4x^3}{3} + o(x^3),$$

c'est-à-dire

$$(-2a_1)x + (-2a_2 + \frac{5}{2}a_1)x^2 + (-2a_3 + \frac{7}{3}a_2)x^3 + o(x^3) = 2x + x^2 - \frac{4x^3}{3} + o(x^3).$$

Par unicité d'un DL on peut identifier les coefficients :

$$\begin{cases} -2a_1 = 2 \\ -2a_2 + \frac{5}{2}a_1 = 1 \\ -2a_3 + \frac{7}{3}a_2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = \frac{7}{4} \\ a_3 = -\frac{11}{8} \end{cases},$$

donc finalement :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{12}x^3 - \frac{11}{32}x^4 + o(x^4).$$

Exercice 28 (***)

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x.$$

Corrigé de l'exercice 28

On rappelle que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se décompose explicitement et de façon unique $f = f_p + f_i$ avec f_p paire et f_i impaire (prendre $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) \pm f(-x))$).

Si f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x,$$

alors ses projections f_p et f_i sont également deux fois dérivables (vu leurs expressions), et en remplaçant f par $f_p + f_i$ dans l'équation, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_p''(x) + f_i''(x) + f_p(-x) + f_i(-x) = x,$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f_p''(x) + f_p(x)) + (f_i''(x) - f_i(x)) = x.$$

Mais la dérivée d'une fonction paire étant impaire et inversement, on a $f_p'' + f_p$ paire et $f_i'' - f_i$ impaire. Vu que $x \mapsto x$ est impaire, on obtient par unicité de la décomposition les deux équations différentielles :

$$f_p'' + f_p = 0, \quad f_i'' - f_i = x,$$

soit après résolution

$$f_p(x) = a \cos(x) + b \sin(x), \quad f_i(x) = c \operatorname{ch}(x) + d \operatorname{sh}(x) - x, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

Là encore, par unicité de la décomposition, la parité de f_p entraîne $b = 0$, et l'impairité de f_i entraîne $c = 0$, donc

$$f(x) = f_p(x) + f_i(x) = a \cos(x) + d \operatorname{sh}(x) - x, \quad (a, d) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement, il est facile de vérifier que toutes ces fonctions conviennent, donc l'ensemble des solutions est le plan affine $Vect(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}) + \{x \mapsto -x\}$.

Exercice 29 (***) **Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On va montrer que le problème de Cauchy :

$$(PC) : \quad \begin{cases} x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

(avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$, $(t_0, x_0) \in I \times E$) possède une unique solution $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$, grâce à une **méthode de point fixe**.

1. Montrer que les solutions de (PC) sont exactement les points fixes de l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{C}^0(I, E) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I, E) \\ x & \longmapsto & \Phi(x) : (t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t (a(s)(x(s)) + b(s)) ds) \end{cases}.$$

Dans la suite, on considère la suite de fonctions $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 : t \mapsto x_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \Phi(x_n).$$

2. En majorant $\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\|$, montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (x_{n+1} - x_n)$ converge normalement sur tout segment $[t_1, t_2] \subset I$ et en déduire l'existence d'une solution x de (PC) .
3. Toujours à l'aide de ces majorations, établir l'unicité de x .

Corrigé de l'exercice 29

On notera $\|\cdot\|$ la norme choisie sur E et $\| \cdot \|$ la norme subordonnée correspondante sur $\mathcal{L}(E)$.

1. Si x est solution de (PC) , alors x est de classe $\mathcal{C}^1$ (car $x' : t \mapsto a(t)(x(t)) + b(t)$ est continue, voir le cours) et vérifie $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$. En intégrant de t_0 à t , on obtient $\Phi(x) = x$. Réciproquement, si $x : I \rightarrow E$ continue vérifie $\Phi(x) = x$, c'est-à-dire

$$\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s)(x(s)) + b(s)) ds,$$

alors, par le théorème fondamental de l'analyse, x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (puisque l'intégrande est continu) et $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$. De plus, $x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} \dots = x_0$, donc x est solution de (PC) .

2. Soit x, y dans $\mathcal{C}^0(I, E)$. Pour tout $t \in I$, on obtient par linéarité de l'intégrale :

$$\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t) = \int_{t_0}^t a(s)(x(s) - y(s)) ds,$$

donc

$$\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| \leq \left\| \int_{t_0}^t a(s)(x(s) - y(s)) ds \right\| \leq \left\| \int_{t_0}^t \|a(s)\| \times \|x(s) - y(s)\| ds \right\|$$

donc

$$(*) \quad \|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| \leq \sup_{s \in [t_0, t]} \|a(s)\| \times \left\| \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds \right\|.$$

(cette borne sup existe car a est continue sur le segment $[t_0, t]$).

Pour montrer la convergence normale voulue, considérons alors un segment $[t_1, t_2] \subset I$ et majorons récursivement

$$\|x_{n+1} - x_n\|_{\infty, [t_1, t_2]} = \|\Phi^n(x_1) - \Phi^n(x_0)\|_{\infty, [t_1, t_2]}.$$

Tout d'abord, on a pour tout $t \in [t_1, t_2]$:

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_0(t)\| &= \|\Phi(x_0)(t) - x_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t (a(s)(x_0) + b(s)) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t (\|a(s)\| \|x_0\| + \|b(s)\|) ds \right| \leq (\alpha_K \|x_0\| + \beta_K) |t - t_0|, \end{aligned}$$

où K est un segment de I contenant t_0 et $[t_1, t_2]$, et

$$\alpha_K = \sup_{s \in K} \|a(s)\|, \quad \beta_K = \sup_{s \in K} \|b(s)\|$$

(ces deux quantités sont finies car a et b sont continues).

Ensuite, d'après l'inégalité (*) :

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_1, t_2], \quad \|x_2(t) - x_1(t)\| &= \|\Phi(x_1)(t) - \Phi(x_0)(t)\| \leq \alpha_K \left| \int_{t_0}^t \|x_1(s) - x_0(s)\| ds \right| \\ &\leq \alpha_K (\alpha_K \|x_0\| + \beta_K) \left| \int_{t_0}^t |s - t_0| ds \right| = (\alpha_K \|x_0\| + \beta_K) \frac{\alpha_K}{2} |t - t_0|^2 \end{aligned}$$

(le calcul de l'intégrale se fait simplement en distinguant les cas $t > t_0$ et $t \leq t_0$).

On conjecture alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [t_1, t_2]$:

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| = \|\Phi^n(x_1)(t) - \Phi^n(x_0)(t)\| \leq (\alpha_K \|x_0\| + \beta_K) \frac{\alpha_K^n}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1},$$

et cela se vérifie avec une simple récurrence par croissance de l'intégrale.

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{n+1} - x_n\|_{\infty, [t_1, t_2]} \leq (\alpha_K \|x_0\| + \beta_K) \frac{\alpha_K^n}{(n+1)!} d_K^{n+1},$$

avec d_K le diamètre du segment K . La suite majorante étant sommable (terme général d'une série exponentielle), on en déduit que $\sum \|x_{n+1} - x_n\|_{\infty, [t_1, t_2]} < +\infty$, d'où la convergence normale annoncée. Ainsi, la série vectorielle $\sum (x_{n+1} - x_n)$ converge uniformément sur $[t_1, t_2]$, et donc (par liaison suite-série), la suite (x_n) converge uniformément sur tout segment $[t_1, t_2]$ de I , ce qui définit une fonction $x : I \rightarrow E$ qui est continue car les x_n le sont (par récurrence évidente). Cette convergence uniforme sur tout segment permet de passer à la limite dans la relation $x_{n+1}(t) = \Phi(x_n)(t)$, puisque

$$\Phi(x_n)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s)(x_n(s)) + b(s)) ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 + \int_{t_0}^t (a(s)(x(s)) + b(s)) ds = \Phi(x)(t)$$

(facile en majorant l'écart des intégrandes uniformément).

Donc $\Phi(x)(t) = x(t)$ pour tout $t \in I$, ce qui montre que x est solution de (PC).

3. Si x et y sont deux solutions de (PC) (c'est-à-dire deux points fixes de Φ), alors pour tout segment $[t_1, t_2] \subset I$, on obtient avec l'inégalité (*) et les notations précédentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [t_1, t_2], \quad \|x(t) - y(t)\| = \|\Phi^n(x)(t) - \Phi^n(y)(t)\| \leq \frac{\alpha_K^n}{n!} |t - t_0|^n \|x - y\|_{\infty, K} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $x = y$ sur tout segment $[t_1, t_2] \subset I$, ce qui amène $x = y$ dans $\mathcal{C}^0(I, E)$.

Remarque

Difficulté principale de cette preuve : impossible à chaque fois d'obtenir des estimations ponctuelles, c'est-à-dire qu'on ne peut pas majorer $\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\|$ simplement par $\|x(t) - y(t)\|$, il faut considérer des normes uniformes locales (des sup sur des segments arbitraires de I), ce qui augmente la technicité de ces majorations.