Exercices du CH16 : Equations différentielles linéaires

Exercices de la banque INP à étudier : ex 31, 32, 42, 74, 75

I Révisions MP2I

Exercice 1 (*Ordre 2 à coefficients constants)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

1. $y'' + 4y' + 4y = -4x$.
2. $y'' + y' - 2y = 9e^x + 6$.
3. $y'' + y = \sin(\omega x)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (*Recollement)
Résoudre l'équation différentielle $(E) : t^2y' + (1-t)y = 1$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}$. Préciser la dimension de l'espace vectoriel des solutions de (E) sur chaque intervalle.

II Exponentielles de matrices

Exercice 3 (*Puissances et exponentielle d'une matrice)

1. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^k par $(X-1)(X-2)$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'on a $A^2 - 3A + 2I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Déterminer l'expression de $\exp(A)$ en fonction de A et I_n.

Exercice 4 (*Exponentielle d'une matrice antisymétrique)
Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices antisymétriques). Montrer que $\exp(A) \in S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (**)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que e^A est un polynôme en A.

Exercice 6 (*Limite d'une exponentielle de matrices)**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \exp(tA) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.

Exercice 7 (***)
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(I_p + \dfrac{A}{n}\right)^n = \exp(A)$.

III Résolution de systèmes différentiels

Exercice 8 (Systèmes différentiels)**
Résoudre les systèmes différentiels :

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}, \quad (\Sigma_2) : \begin{cases} x' = x + 8y + \mathrm{e}^t \\ y' = 2x + y + \mathrm{e}^{-3t} \end{cases}, \quad (\Sigma_3) : \begin{cases} x_1' = (1+t)x_1 + tx_2 - \mathrm{e}^t \\ x_2' = -tx_1 + (1-t)x_2 + \mathrm{e}^t \end{cases}$$

$$(\Sigma_4) : \begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases}, \quad (\Sigma_5) : \begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}.$$

Exercice 9 (Résolution à l'aide d'une exponentielle de matrice)**
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A.
2. En déduire l'expression de $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre le système différentiel (Σ) : $\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases}$.

IV Résolution d'équations scalaires

Exercice 10 (*Résolution par série entière)
En utilisant les séries entières, résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle :

$$(1-t^2)x'' - 6tx' - 4x = 0.$$

Exprimer la solution générale à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 11 (*Variation des constantes)
Résoudre les équations différentielles :

1. $(E_1) : (1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1,+\infty[$.
2. $(E_2) : y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.
3. $(E_3) : t^2y'' - 2y = 3t^2$ sur $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (Prolongement de solutions)**
Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ possèdent une limite finie en 0^+. Le prolongement obtenu est-il dérivable ? deux fois dérivable ?

Exercice 13 (*Équation d'Airy)
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - xy = 0$.
Montrer, sans chercher à les expliciter à l'aide des fonctions usuelles, que toutes les solutions de (E) sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 (**)
Soit l'équation différentielle (E) : $(1-x)y' + y = g$, où $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est continue.
On note (E_0) : $(1-x)y' + y = 0$.

1. Résoudre (E_0).
2. On suppose, dans cette question, que g est développable en série entière (en 0), $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, de rayon ≥ 1.
   Montrer que (E) admet au moins une solution développable en série entière (en 0), $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon ≥ 1, et vérifiant :
   $$a_1 = -a_0 + b_0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2,\ a_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} kb_k.$$
3. On suppose dans cette question : $\forall x \in]-1,1[$, $g(x) = -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.
   Déterminer une solution de (E) sous forme de série entière et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

V Etudes qualitatives

Exercice 15 (Limite de solutions)**

1. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue de limite nulle en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = h$ convergent vers 0 en $+\infty$.
   Indication : en utilisant la variation de la constante, on peut obtenir une expression des solutions à l'aide d'une intégrale.
2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On suppose que $f + f' \xrightarrow[+\infty]{} \ell$. Montrer que $f \xrightarrow[+\infty]{} \ell$.

Exercice 16 (**)

Soient $n \geq 1$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer que toutes les solutions $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de $X'' + SX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ sont bornées.

Exercice 17 (**)

Soient I un intervalle réel d'intérieur non vide et $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ des applications continues telles que :

$$\forall t \in I,\ q_2(t) \geq q_1(t).$$

Soient u_1 et u_2 des applications 2 fois dérivables sur I et telles que :

$$\forall i \in \{1, 2\},\ \forall t \in I,\ u_i''(t) + q_i(t)u_i(t) = 0.$$

On suppose qu'il existe a et b dans I avec $a < b$ tels que $u_1(a) = u_1(b) = 0$ et que u_1 et u_2 ne s'annulent pas sur $]a, b[$.
On définit, pour tout $t \in I$, $w(t) = u_1'(t)u_2(t) - u_2'(t)u_1(t)$.

1. Démontrer que w est monotone sur $[a, b]$ et étudier le signe de $w(a)$ et $w(b)$.
2. En déduire que u_1 et u_2 sont proportionnelles sur $[a, b]$.

Exercice 18 (Zéros de solutions)**

Soient I un intervalle réel d'intérieur non vide et $p : I \to \mathbb{R}$ continue.

1. Soit $z : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $z' + pz > 0$. Montrer que z admet au plus un zéro dans I.
2. Soient $q : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $q < 0$ et $y : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et non nulle telle que $y'' + py' + qy = 0$.
   Montrer que yy' admet au plus un zéro dans I.

Exercice 19 (*Zéros d'une solution)**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $p, q \in C^0(I, \mathbb{R})$. On considère l'équation :

$$(E) : y'' + py' + qy = 0.$$

Soit f une solution sur I réelle et non identiquement nulle de (E).

1. On suppose qu'il existe deux réels a et b avec $a < b$ et tels que $f(a) = f(b) = 0$.
   Montrer que l'ensemble $Z = \{x \in [a\,; b]\,,\ f(x) = 0\}$ est un ensemble fini.
2. En déduire que l'ensemble des zéros de f est un ensemble au plus dénombrable.

Exercice 20 (*Histoires de parité)**
Soit $(a,b) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$. On considère l'équation différentielle homogène :

$$(E) \ : y'' + ay' + by = 0,$$

dont on note $\mathcal{S}_0$ l'espace des solutions.
On suppose la fonction a impaire et la fonction b paire. Soit $f \in \mathcal{S}_0$.

1. Montrer que les fonctions $f_p : t \mapsto f(t) + f(-t)$ et $f_i : t \mapsto f(t) - f(-t)$ sont des solutions de $\mathcal{S}_0$, respectivement paire et impaire.
2. En déduire que s'il existe une solution de (E) qui ne soit ni paire ni impaire, alors (f_p, f_i) forme une base de $\mathcal{S}_0$.
3. Montrer finalement qu'il existe une base de $\mathcal{S}_0$ formée d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

VI Autour des lemmes de Gronwall

Exercice 21 (Lemmes de Gronwall)**
Les résultats qui suivent, appelés *lemmes de Gronwall*, servent à majorer ou minorer des fonctions vérifiant des *inéquations* différentielles ou intégrales. Ce sont notamment des outils puissants pour établir des résultats d'unicité dans la théorie des équations différentielles.
Dans tout cet exercice, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, et t_0 un point de I.

1. *Lemme de Gronwall différentiel*
   Soient $w \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$, $v \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ telles que $\forall t \in I, \ w'(t) \leq v(t)w(t)$.
   Montrer que pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, on a $w(t) \leq w(t_0)e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$.
2. *Lemme de Gronwall intégral*
   Soient $u, v \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ tels que $v \geq 0$ et pour tout $t \in I$:
   $$t \geq t_0 \implies u(t) \leq a + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds.$$
   Montrer que pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, on a $u(t) \leq ae^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$.
3. *Variante du lemme de Gronwall intégral*
   Soient $u, v \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ tels que $u \geq 0$, $v \geq 0$ et
   $$\forall t \in I, \qquad u(t) \leq a + \left| \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds \right|.$$
   Montrer que pour tout $t \in I$, on a $u(t) \leq ae^{\left|\int_{t_0}^t v(s)ds\right|}$.

Exercice 22 (Lemme de Gronwall discret)**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites positives. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$V_0 = 0, \qquad \forall n \geq 1, \ V_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k.$$

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} \leq a_n + (1+v_n)u_n$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \leq u_0 e^{V_n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{V_n - V_k}$.
Ce lemme est notamment utile pour la résolution numérique des équations différentielles, c'est-à-dire lorsqu'on cherche à approcher une solution d'équation différentielle par une suite de points (comme c'est le cas dans la méthode d'Euler par exemple).

Exercice 23 (Une inéquation différentielle)**
Trouver toutes les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et :

$$\forall x \in [0,1],\ \ f'(x) + xf(x) \geq x^3 + 2x.$$

Exercice 24 (***)
Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive et croissante.
Montrer que toutes les solutions de $y'' + qy = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

VII Divers

Exercice 25 (**)
I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soient $A \in \mathcal{C}^0\big(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ et $t_0 \in I$.
On considère le système différentiel : $X' = A(t)X + B(t)$.
Montrer qu'une solution $X : I \to \mathbb{C}^n$ de ce système est à valeurs réelles ssi $X(t_0) \in \mathbb{R}^n$.
Ainsi une solution à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui admet une valeur non réelle a en fait toutes ses valeurs non réelles !

Exercice 26 (Une méthode de calcul utilisant le wronskien)**
On souhaite résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E_0)\ \ : x'' + \frac{2}{t}x' + x = 0.$$

1. Vérifier que la fonction $\varphi_1 : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est solution.
2. Soit φ une solution quelconque de (E_0). On note W le wronskien de (φ_1, φ).
   Montrer que sur un intervalle $J \subset\ ]0\,;+\infty[$ sur lequel φ_1 ne s'annule pas, on a $\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_1}\right)' = \dfrac{W}{\varphi_1^2}$.
3. En utilisant l'équation linéaire d'ordre 1 vérifiée par le wronskien, en déduire toutes les solutions de (E_0).

Exercice 27 (*DL d'une solution)
On considère l'équation $(E) : 2(x-1)y' + y = \sin(2x) + x^2$.

1. Montrer que (E) admet une unique solution f sur $]-\infty, 1[$ vérifiant $f(0) = 0$.
2. Déterminer un DL de f à l'ordre 4 en 0.

Exercice 28 (***)
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f''(x) + f(-x) = x.$$