Exercices du CH15 : Séries et fonctions vectorielles

Exercices de la banque INP à étudier : 40 (inverse de $1-u$ dans une algèbre normée), 61 (exponentielle de matrice).

I Séries vectorielles

Exercice 1 (Un peu de topologie)**
Soit $\|.\|$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ (par exemple une norme d'opérateur) et soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| < 1$.

1. (a) Démontrer que $I_p - A$ est inversible et déterminer son inverse.
   (b) Prouver : $\|(I_p - A)^{-1} - (I_p + A)\| \leq \frac{\|A\|^2}{1-\|A\|}$.
2. Montrer que $GL_p(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ en utilisant ce qui précède.

Exercice 2 (Un théorème de point fixe)**
Soient E un espace de dimension finie de norme $\|.\|$ et f une application de E vers E.
On dit que f est **contractante** lorsque : $\exists k \in [0\,;1[\,,\ \forall (x,y) \in E^2,\ \|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\|$.

1. On suppose que f est contractante et on introduit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 \in E \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n).$$

   Montrer la convergence de la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$.
2. En déduire que lorsque f est contractante, elle admet un point fixe et justifier que celui-ci est unique.
3. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit contractante alors f admet un unique point fixe.

II Continuité

Exercice 3
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ continue telle que : $\forall t \in [a;b]$, $\mathrm{Re}\big(f(t)\big) = 0 \implies \mathrm{Im}\big(f(t)\big) \neq 0$.
Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t \in [a;b]$, $|f(t)| \geq m$.

Exercice 4
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ continues en 0 telles que $f(0) = (-1, 1)$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(2t) = \mathrm{ch}(t) \times f(t)$.

III Dérivabilité et dérivation

Exercice 5
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \left(\cos(t), \frac{\sin(t)}{t}, te^{2t}\right) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f admet une limite en 0. On note encore f le prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}_+$ ainsi obtenu.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f' sur $\mathbb{R}_+^*$.
   La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier.
3. La fonction f admet-elle une primitive sur $\mathbb{R}_+$? Justifier.
4. Déterminer les fonctions coordonnées de f dans la base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$, où $u = (1, -1, 0)$, $v = (0, 1, -1)$ et $w = (1, 0, 1)$.

Exercice 6
Soit $M : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ s & \longmapsto & M(s) \end{array} \right.$ une application dérivable.

1. Montrer que la fonction $s \mapsto {}^tM(s)M(s)$ est dérivable.
2. On suppose que M est à valeurs dans l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales. Que peut-on alors en déduire concernant ${}^tM(s)M'(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$?

Exercice 7
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathbb{R} \to E$ dérivable en 0. On suppose : $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 8
Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable et telle que : $\forall t \in \mathbb{R},\ A(t) \in GL_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $A^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \big(A(t)\big)^{-1} \end{array} \right.$ est dérivable et calculer sa dérivée.
On pourra penser à une formule vue en sup donnant une expression de l'inverse d'une matrice...

Exercice 9
Soient $n \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \det(Id_{\mathbb{R}^n} + tf)$.
Montrer que φ est dérivable en 0 et calculer $\varphi'(0)$.
On pourra travailler dans une base fixée de $\mathbb{R}^n$, par exemple la base canonique...

Exercice 10
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère $S : t \mapsto \exp(tA)$. Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 11
Pour $n \geq 1$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, calculer $\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^n \end{vmatrix}$ en interprétant ce déterminant comme une dérivée...

Exercice 12 (Une preuve géométrique du théorème spectral)**
Soient E un espace euclidien non réduit à $\{0_E\}$, et u un endomorphisme auto-adjoint de E. On note $\mathcal{S} = S(0_E, 1)$ la sphère unité de E.

1. Montrer que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (u(x)|x) \end{array} \right.$ admet un maximum.
   On note x_0 un vecteur de $\mathcal{S}$ où ce maximum est atteint.
2. Soit y un vecteur unitaire de E et orthogonal à x_0.
   Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $x(t) = \cos(t)x_0 + \sin(t)y$ et on introduit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \Big(x(t)|u\big(x(t)\big)\Big) \end{array} \right.$.
   Démontrer que f atteint son maximum en 0, puis en déduire qu'on a $\big(u(x_0)|y\big) = 0$.
3. Retrouver ainsi le théorème spectral.

IV Intégration

Exercice 13
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, $\left|(y-a)\int_a^x f - (x-a)\int_a^y f\right| \leq (b-a)\int_a^b |f|$.
2. En déduire que, s'il existe $(x, y) \in [a, b]^2$ tel que $\left|(y-a)\int_a^x f - (x-a)\int_a^y f\right| = (b-a)\int_a^b |f|$, et si f est continue sur $[a, b]$, alors $f = 0$.

Exercice 14
Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\big(|x - e^{it}|\big)dt$ en utilisant les sommes de Riemann.

Exercice 15
Soit $\big(E, (.|.)\big)$ un espace euclidien et $f \in C^1([0,1], E)$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ où $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\Big(f\left(\frac{k}{n}\right) \mid f'\left(\frac{k+1}{n}\right)\Big)$.
On pourra commencer par calculer la limite d'une somme proche de S_n, en reconnaissant un outil du cours.

V DL et Formules de Taylor

Exercice 16
Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \big(\sin(t), \sqrt{2+t^2}, e^{1+t}\big) \end{array}\right.$.

1. Justifier que f est de classe C^∞.
2. Écrire le développement limite à l'ordre 4 en $t = 0$ de f.
3. En déduire $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ et $f^{(4)}(0)$.

Exercice 17
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que :
$1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

Exercice 18
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : [0,1] \to E$ dérivable à droite en 0 et vérifiant $f(0) = 0$.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 19 (***)
Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}_+^*$ dans un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer qu'on peut avoir $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ sans avoir nécessairement $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que si on suppose $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et f'' bornée, alors nécessairement $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 20 (***)
Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f : [-a, a] \to E$ de classe C^2. Montrer, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall t \in [-a,a],\ \|f'(t)\| \leq \frac{1}{2a}\|f(a) - f(-a)\| + \frac{a^2+t^2}{2a}\sup_{u\in[-a,a]}\|f''(u)\|.$$