Exercices du CH14 : Séries entières

Exercices de la banque INP à étudier : ex 2, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 47, 51.

I Rayon de convergence

Exercice 1 (*)
Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$(a)\ \sum_{n\geq 0} \frac{5n^3-2n^2}{3^n} z^n, \quad (b)\ \sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}} z^n, \quad (c)\ \sum_{n\geq 1} \ln(n)^n z^n, \quad (d)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^{n+1}}{n!} z^n,$$

$$(e)\ \sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^n}{n+\arctan(n)} z^{2n}, \quad (f)\ \sum_{n\geq 0} n! z^{n^2}, \quad (g)\ \sum_{n\geq 0} \cos(n) z^n, \quad (h)\ \sum_{n\geq 0} (1+i)^n z^n.$$

Exercice 2 (Règle de Cauchy)**
Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sqrt[n]{|a_n|} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
Discuter le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ en fonction de ℓ.

Exercice 3 (*Décimales de π)
On note a_n la n-ième décimale de π. Quel est l'intervalle de définition de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$?

Exercice 4 (Changement d'indice)**
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. Montrer que le rayon de convergence R' de $\sum a_{2n} z^n$ vérifie $R' \geq R^2$. L'inégalité précédente peut-elle être stricte ?

Exercice 5 (*Suite récurrente)**
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $a_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$.
Déterminer le rayon de la série entière $\sum a_n x^n$ puis son domaine de convergence réel.

II Calculs de sommes

Exercice 6 (**)
Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes (z variable complexe ; x variable réelle) :

$$(a)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{n!} z^n, \quad (b)\ \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}, \quad (c)\ \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n^3-n}, \quad (d)\ \sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

$$(e)\ \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n, \quad (f)\ \sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n\theta) x^n}{n!},\ \theta \in \mathbb{R}, \quad (g)\ \sum_{n\geq 1} n^{(-1)^n} x^n.$$

Remarque
Il arrivera que l'on ait à calculer une somme d'un des types précédents pour une valeur particulière de x ou de z, comme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)!}$ - obtenue en posant $x = 1$ dans la formule (d) : il faudra être capable de reconnaître qu'il s'agit de la somme d'une série entière évaluée en une valeur précise, et être capable de calculer cette somme...

Exercice 7 (**)
Justifier l'existence et calculer les quantités :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}, \qquad B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}, \qquad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

III Développements en série entière

Exercice 8 (*Calculs de DSE)
Pour les fonctions f qui suivent, où l'on donne $f(x)$ avec x une variable réelle, montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et former ce développement. Préciser le rayon de convergence.

$$(a)\ \frac{1}{(x-1)(x+2)}, \qquad (b)\ \frac{1}{(2x+3)^2}, \qquad (c)\ \cos(x+1), \qquad (d)\ \ln(x^2-5x+6),$$

$$(e)\ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad (f)\ \frac{\sin^2(x)}{x^2}, \qquad (g)\ x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt.$$

Exercice 9 (**)
Soit $a \in \,]-1,1[$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{1-|a|}$.
3. Montrer que f est développable en série entière de deux manières :
   (a) en utilisant la majoration précédente ;
   (b) en écrivant explicitement $f(x)$ comme une somme d'une série entière.

Exercice 10 (**)
Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Déterminer l'intervalle de convergence I de la série entière de terme général $a_n x^n$.
2. Pour $x \in I$, calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. Déterminer les coefficients du développement de $\frac{e^x}{(1-x)^2}$ en série entière sur $]-1,1[$.

Exercice 11 (*Fonction $\mathcal{C}^\infty$ mais pas DSE)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
   On pourra d'abord montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la dérivée n^e de f sur $\mathbb{R}^*$ est de la forme $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$, où P_n est un polynôme que l'on ne cherchera pas à calculer.
2. En déduire que f n'est pas développable en série entière.

Exercice 12 (Double exponentielle)**
Démontrer que la fonction $f : x \mapsto e^{e^x}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et former son développement en série entière.

Exercice 13 (*Fonction absolument monotone)**
Soit $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a,a[,\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-a,a[,\ f^{(n)}(x) \geq 0$.

1. Montrer que f est développable en série entière sur $]-a,a[$.
2. Montrer que la fonction tan est développable en série entière sur $]-\pi/2,\pi/2[$.

IV Utilisations d'équations différentielles

Exercice 14 (**)
Soit f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Justifier que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.
3. D'après la première question, il existe une série entière de rayon $R \geq 1$ dont la fonction somme coïncide avec f sur $]-1,1[$.
   (a) Justifier que cette série entière est de la forme $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^{2n+1}$.
   (b) On note $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$. Justifier que S est définie et de classe C^∞ sur $]-R,R[$.
   (c) Comme S et f coïncident sur $]-1,1[$, S vérifie l'équation différentielle de la question 2 sur $]-1,1[$. Calculant $(1-x^2)S'(x) - xS(x)$, établir que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre 1.
   (d) En déduire l'expression de a_n en fonction de n (cette expression pourra faire intervenir des factorielles).
   (e) Vérifier que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^{2n+1}$ est finalement de rayon 1.
   (f) Conclure.

Exercice 15 (**)
Soit $f : x \mapsto e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1. Exploiter le développement en série entière de exp pour former celui de f.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 que l'on explicitera.
3. Résoudre cette équation différentielle en cherchant une solution particulière sous la forme d'une série entière.
4. En déduire qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{2n+1}$.

Exercice 16 (*Solution DSE d'une équa diff linéaire d'ordre 2)**
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
Il existe donc une série entière $\sum p_n x^n$ de rayon $+\infty$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.
Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle : $(E) \quad y'' + \varphi y = 0$.

1. On suppose qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $+\infty$ qui est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'on a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum\limits_{k=0}^{n} p_k a_{n-k} = 0$.
2. Réciproquement, les relations précédentes déterminent de façon unique une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de la donnée de a_0 et a_1. On fixe un réel $r > 0$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|p_n| \leq \frac{C}{r^n}$.
   (b) On considère un entier $N \geq 1$ tel que $\frac{Cr^2}{N+1} \leq 1$.
   On pose aussi $M = \max\limits_{k\in\{0,\dots,N\}} |a_k r^k|$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$.
   (c) Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$? Et que dire de $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ finalement ?

V Etude au bord

Exercice 17 (**)
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
Pour $x \in]-1, 1[$, on définit $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
On suppose que la suite (a_n) est à termes réels positifs et que la fonction S est bornée sur $[0, 1[$.

1. Montrer que $\sum a_n$ est une série convergente.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 18 (**)
Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite ordonnée des solutions positives ou nulles de l'équation $\tan(x) = x$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$.
2. Pour $x \in]-R\,; R[$, on pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Déterminer $\lim\limits_{x \to R^-} S(x)$.

Exercice 19 (*Un théorème taubérien)**
Soit f la fonction somme dans le domaine réel d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R = 1$. On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que $f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \ell$.

1. Peut-on affirmer que $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ ?
2. Montrer que si $a_n = o(1/n)$, alors $\sum a_n$ converge et sa somme vaut ℓ.

VI Applications des séries entières

Exercice 20 (*)
Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21 (Nombres de Catalan)**
On pose $c_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} c_{n-k} c_k$.

1. Déterminer une relation vérifiée par : $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.
2. Calculer $S(x)$.
3. Calculer les c_n.
4. Donner un équivalent de la suite (c_n).

Remarque
Le nombre de Catalan c_n donne le nombre de parenthésages d'un mot à $n+1$ éléments...

VII Résultats classiques

Exercice 22 (Formule de Cauchy, théorème de Liouville)**
Soit $\sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$. On note f sa somme sur $\mathbb{C}$.

1. Pour $r \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, établir la formule de Cauchy : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt = a_n r^n$.
2. En déduire que si f est bornée, alors f est constante (*théorème de Liouville*).

Exercice 23 (*Principe des zéros isolés)**

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle, de rayon de convergence $R > 0$, f sa somme. On suppose qu'il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $t_n \to 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \in]-R, R[\setminus\{0\}$ et $f(t_n) = 0$. Démontrer que f est nulle sur $]-R, R[$.
2. *Application* : existe-t-il une application $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, développable en série entière en 0, de rayon ≥ 1, et telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$?