

Exercices du CH13 : Réduction des endomorphismes - Aspects euclidiens

Exercices de la banque INP à étudier : ex 63, 66, 68, 78.

I Généralités sur les adjoints

Exercice 1 (*Des propriétés supplémentaires)

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien.

1. Comparer les rangs, traces et déterminants de u et u^* .
2. Montrer que $\text{Ker}(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$ et $\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp$.

Exercice 2 (**Norme subordonnée à une norme euclidienne)

Soit E un espace euclidien. On rappelle qu'on peut munir l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ de la norme $\|\cdot\| : u \mapsto$

$\sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ subordonnée à la norme euclidienne de E .

1. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, démontrer qu'on a $\|u^*\| = \|u\|$ et $\|u^* \circ u\| = \|u\|^2$.
2. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est auto-adjoint, alors $\|u\| = \max_{\lambda \in Sp(u)} |\lambda|$.
Montrer que ce résultat ne tient plus si u n'est pas autoadjoint.
3. En déduire que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\|u\| = \max_{\lambda \in Sp(u^* \circ u)} \sqrt{|\lambda|}$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que vaut $\|A\|_2$ (la norme matricielle subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$ sur \mathbb{R}^n) ?

Exercice 3 (**)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $f = u^* \circ u - u \circ u^*$. On suppose $f \in S^+(E)$. Montrer que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Exercice 4 (***) Endomorphismes normaux

On dit d'un endomorphisme u d'un espace euclidien E qu'il est **normal** lorsque $u \circ u^* = u^* \circ u$. On considère u un endomorphisme normal dans tout cet exercice.

1. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par u , alors F^\perp est stable par u .
On pourra représenter matriciellement $u \circ u^$...*
2. Dans cette question seulement, on suppose E de dimension 2. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E . Montrer que u est normal ssi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique ou de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
Montrer que u est alors auto-adjoint ssi il possède un vecteur propre.
3. On revient à E de dimension (finie) quelconque.
Montrer qu'il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale par blocs, avec des blocs de taille 1×1 ou de taille 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

II Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Exercice 5 (*Étude d'automorphismes orthogonaux de l'espace)

On se place dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel.

- Déterminer la nature des endomorphismes de \mathbb{R}^3 associés aux matrices qui suivent, et donner leurs éléments caractéristiques.

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- On munit \mathbb{R}^3 de sa structure canonique usuelle d'espace euclidien orienté. Soit $v = (1, 1, 1)$. Calculer la matrice M dans la base canonique de la rotation r d'axe orienté par $v/\|v\|$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 6 (**Isométries diagonalisables)

- Trouver les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur \mathbb{R} .
- Montrer qu'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur \mathbb{C} .

Exercice 7 (**Avec des paramètres)

Pour u, v et w réels non nuls, on note $M = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{v}{u} & \frac{w}{u} \\ \frac{u}{v} & -\frac{1}{2} & \frac{w}{v} \\ \frac{u}{w} & \frac{v}{w} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- Déterminer si la matrice M est diagonalisable.
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit orthogonale.

Exercice 8 (***)Connexité par arcs de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$

Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que A soit de la forme $P^\top \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & D \end{pmatrix} P$, où $r \in \mathbb{N}$ et D est une matrice diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux de la forme $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
- En déduire que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

III Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Exercice 9 (*)

Justifiez que les matrices suivantes sont diagonalisables et orthodiagonalisez-les :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 (*)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M + M^\top$ soit nilpotente. Montrer que M est antisymétrique.

Exercice 11 (**)

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^\top = M^2$.

Exercice 12 (**)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E espace euclidien. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \quad i \neq j \implies (u(e_i)|u(e_j)) = 0.$$

Exercice 13 (Matrices antisymétriques)**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n, X^\top AX = 0$.
2. Que peut-on dire des valeurs propres complexes d'une matrice antisymétrique réelle ?
3. Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle d'ordre impair admet 0 comme unique valeur propre réelle.
4. Soit A une matrice antisymétrique. Montrer que le polynôme χ_A a même parité que n .
5. Déterminer $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour $n = 2$ et 3 .

Exercice 14 ()**

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, déterminer les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & a \\ a & & & \\ \vdots & & (0) & \\ a & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15 ()**

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de S sont positives.
Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $tr(SU) \leq tr(S)$.

Exercice 16 (Inégalités)**

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

1. Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), (\det(S))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} tr(S)$.
2. En déduire : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\det(A)| \leq \left(\frac{1}{n} tr(A^\top A)\right)^{\frac{n}{2}}$.

Exercice 17 ()**

Soient $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres (non nécessairement distinctes) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. Montrer : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top X = 1 \implies \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \leq X^\top SX \leq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$.
2. En déduire $\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = \inf_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top X = 1} X^\top SX$ et $\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = \sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top X = 1} X^\top SX$.

Il faut commencer par justifier, grâce à un argument topologique, l'existence des bornes supérieures et inférieures.

Exercice 18 (*)Matrices de Gram)**

Dans un espace préhilbertien réel E , on appelle **matrice de Gram** de la famille $(a_1, \dots, a_n) \in E^n$ la matrice

$$G(a_1, \dots, a_n) = ((a_i | a_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que pour toute famille $(a_1, \dots, a_n) \in E^n$, on a $G(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $G(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$?
3. Soit (a_1, \dots, a_n) une base d'un sous-espace vectoriel F de E . Montrer que

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det(G(a_1, \dots, a_n, x))}{\det(G(a_1, \dots, a_n))}}.$$

Exercice 19 (*)Racine carrée d'une matrice symétrique positive)**

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $X \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = X^2$.
On dit alors que X est la racine carrée de A .
2. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors on a $X \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 20 (*) Décomposition polaire)**

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$. *Indication : utiliser l'exercice précédent.*
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$ (l'unicité n'est plus vraie dans ce cas général).
3. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto OS \end{cases}$$

est un *homéomorphisme*, c'est-à-dire une bijection telle que φ et φ^{-1} sont continues (pour n'importe quelle norme sur l'evn de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).