Exercices du CH13 : Réduction des endomorphismes - Aspects euclidiens

Exercices de la banque INP à étudier : ex 63, 66, 68, 78.

I Généralités sur les adjoints

Exercice 1 (*Des propriétés supplémentaires)
Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien.

1. Comparer les rangs, traces et déterminants de u et u^*.
2. Montrer que $Ker(u^*) = Im(u)^\perp$ et $Im(u^*) = Ker(u)^\perp$.

Exercice 2 (Norme subordonnée à une norme euclidienne)**
Soit E un espace euclidien. On rappelle qu'on peut munir l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ de la norme $|||.||| : u \mapsto \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ subordonnée à la norme euclidienne de E.

1. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, démontrer qu'on a $|||u^*||| = |||u|||$ et $|||u^* \circ u||| = |||u|||^2$.
2. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est auto-adjoint, alors $|||u||| = \max_{\lambda \in Sp(u)} |\lambda|$.
   Montrer que ce résultat ne tient plus si u n'est pas autoadjoint.
3. En déduire que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $|||u||| = \max_{\lambda \in Sp(u^* \circ u)} \sqrt{\lambda}$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que vaut $|||A|||_2$ (la norme matricielle subordonnée à la norme $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$) ?

Exercice 3 (**)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $f = u^* \circ u - u \circ u^*$. On suppose $f \in S^+(E)$. Montrer que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Exercice 4 (*Endomorphismes normaux)**
On dit d'un endomorphisme u d'un espace euclidien E qu'il est **normal** lorsque $u \circ u^* = u^* \circ u$. On considère u un endomorphisme normal dans tout cet exercice.

1. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.
   On pourra représenter matriciellement $u \circ u^*$...
2. Dans cette question seulement, on suppose E de dimension 2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Montrer que u est normal ssi $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique ou de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
   Montrer que u est alors auto-adjoint ssi il possède un vecteur propre.
3. On revient à E de dimension (finie) quelconque.
   Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale par blocs, avec des blocs de taille $1 * 1$ ou de taille $2 * 2$ de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

II Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Exercice 5 (*Étude d'automorphismes orthogonaux de l'espace)
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

1. Déterminer la nature des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ associés aux matrices qui suivent, et donner leurs éléments caractéristiques.

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure canonique usuelle d'espace euclidien orienté. Soit $v = (1, 1, 1)$. Calculer la matrice M dans la base canonique de la rotation r d'axe orienté par $v/\|v\|$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 6 (Isométries diagonalisables)**

1. Trouver les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 7 (Avec des paramètres)**
Pour u, v et w réels non nuls, on note $M = -\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{v}{u} & \frac{w}{u} \\ \frac{u}{v} & -\frac{1}{2} & \frac{w}{v} \\ \frac{u}{w} & \frac{v}{w} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer si la matrice M est diagonalisable.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit orthogonale.

Exercice 8 (*Connexité par arcs de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$)**
Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que A soit de la forme $P^\top \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & D \end{pmatrix} P$, où $r \in \mathbb{N}$ et D est une matrice diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux de la forme $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
2. En déduire que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

III Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques

Exercice 9 (*)
Justifiez que les matrices suivantes sont diagonalisables et orthodiagonalisez-les :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 (*)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M + M^\top$ soit nilpotente. Montrer que M est antisymétrique.

Exercice 11 (**)
Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^\top = M^2$.

Exercice 12 (**)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E espace euclidien. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad i \neq j \implies (u(e_i)|u(e_j)) = 0.$$

Exercice 13 (Matrices antisymétriques)**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X^\top AX = 0$.
2. Que peut-on dire des valeurs propres complexes d'une matrice antisymétrique réelle ?
3. Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle d'ordre impair admet 0 comme unique valeur propre réelle.
4. Soit A une matrice antisymétrique. Montrer que le polynôme χ_A a même parité que n.
5. Déterminer $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour $n = 2$ et 3.

Exercice 14 (**)

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, déterminer les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & a \\ a & & & \\ \vdots & & (0) & \\ a & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15 (**)

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de S sont positives.
Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $tr(SU) \leq tr(S)$.

Exercice 16 (Inégalités)**

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer :

1. Montrer : $\forall S \in S_n^+(\mathbb{R}),\ \big(\det(S)\big)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}tr(S)$.
2. En déduire : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |\det(A)| \leq \big(\frac{1}{n}tr(A^\top A)\big)^{\frac{n}{2}}$.

Exercice 17 (**)

Soient $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres (non nécessairement distinctes) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. Montrer : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top X = 1 \implies \min\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i \leq X^\top SX \leq \max\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i$.
   Indication : décomposer X dans une base judicieusement choisie !
2. En déduire $\min\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i = \inf\limits_{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top X=1} X^\top SX$ et $\max\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i = \sup\limits_{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top X=1} X^\top SX$.
   Il faut commencer par justifier, grâce à un argument topologique, l'existence des bornes supérieures et inférieures.

Exercice 18 (*Matrices de Gram)**

Dans un espace préhilbertien réel E, on appelle **matrice de Gram** de la famille $(a_1, \cdots, a_n) \in E^n$ la matrice

$$G(a_1, \cdots, a_n) = ((a_i|a_j))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que pour toute famille $(a_1, \cdots, a_n) \in E^n$, on a $G(a_1, \cdots, a_n) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $G(a_1, \cdots, a_n) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$?
3. Soit $(a_1, \cdots, a_n)$ une base d'un sous-espace vectoriel F de E. Montrer que

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det(G(a_1, \cdots, a_n, x))}{\det(G(a_1, \cdots, a_n))}}.$$

Exercice 19 (*Racine carrée d'une matrice symétrique positive)**

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $X \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = X^2$.
   On dit alors que X est la racine carrée de A.
2. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors on a $X \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 20 (*Décomposition polaire)**

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O,S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$. *Indication : utiliser l'exercice précédent.*
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe $(O,S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$ (l'unicité n'est plus vraie dans ce cas général).
3. Montrer que l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) & \longmapsto & OS \end{array} \right.$$

est un *homéomorphisme*, c'est-à-dire une bijection telle que φ et φ^{-1} sont continues (pour n'importe quelle norme sur l'evn de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).