Exercices du CH12 : Interversion limite-intégrale

Exercices de la banque INP à étudier : ex 19 (utilisation du th. d'intégration terme à terme), 25, 26, 27 (utilisation du th. de convergence dominée), 29 (fonction Gamma), 30 (intégrale à paramètre et équa. diff.), 49 (utilisation du th. d'intégration terme à terme), 50 (continuité et équivalent d'une intégrale à paramètre).

I Suites d'intégrales

Exercice 1 (*)
Déterminer les limites pour $n \to +\infty$ des suites d'intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi \sqrt{\pi - x}\sin^n(x)dx, \quad J_n = \int_0^{\sqrt[n]{n}} \sqrt{1+x^n}dx.$$

On pourra découper judicieusement J_n...

Corrigé de l'exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \sqrt{\pi - x}\sin^n(x)$ est continue par morceaux (car continue) sur $[0, \pi]$, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \end{array} \right. ,$$

   et enfin, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,\pi], \qquad |f_n(x)| \leq \varphi(x) = \sqrt{\pi - x},$$

   avec φ intégrable sur $[0, \pi]$ (car continue sur ce segment).
   Donc d'après le théorème de convergence dominée, $I_n = \displaystyle\int_0^\pi f_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^\pi f = 0.$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n : x \mapsto \sqrt{1+x^n}$. Chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   On décompose $J_n = A_n + B_n$, avec

$$A_n = \int_0^1 g_n, \qquad B_n = \int_1^{\sqrt[n]{n}} g_n.$$

   Le théorème de convergence domininée s'applique à la suite d'intégrales (A_n), puisque (g_n) converge simplement vers la fonction constante égale à 1 sur l'intervalle $[0, 1[$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $|g_n(x)| \leq \varphi(x)$, où $\varphi : x \mapsto \sqrt{2}$ est intégrable sur $[0, 1[$. Donc $A_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 dx = 1$.
   Quant à B_n, il suffit de majorer :

$$|B_n| \leq \left(\sqrt[n]{n} - 1\right) \|g_n\|_{\infty,[1,\sqrt[n]{n}]} = \left(e^{\ln(n)/n} - 1\right)\sqrt{1+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

   Donc par somme, $J_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

Exercice 2 (De la forme $f(t^n)$)**

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Étudier la limite de $\int_0^1 f(t^n)dt$ pour $n \to +\infty$.
2. Chercher un équivalent pour $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt$.

Corrigé de l'exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n : t \mapsto f(t^n)$. Par continuité de f, les g_n sont continues sur $[0,1]$, la suite (g_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction continue par morceaux $g : t \mapsto \begin{cases} f(0) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ f(1) & \text{si } t = 1 \end{cases}$, et pour tout $(n,t) \in \mathbb{N} \times [0,1]$, $|g_n(t)| \leq \varphi(t)$, où φ est la fonction constante égale à $\|f\|_{\infty,[0,1]}$, donc φ est intégrable sur $[0,1]$. On obtient donc par le théorème de convergence dominée que

$$\int_0^1 f(t^n)dt = \int_0^1 g_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 g = f(0).$$

2. La première question appliquée à $f : t \mapsto \frac{t}{1+t}$ (qui est bien continue sur $[0,1]$) donne $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt \underset{n\to+\infty}{\to} f(0) = 0$, mais ne fournit pas d'équivalent.
Avec le changement de variable $x = t^n$, on peut réécrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{x^{1/n}}{1+x}dx.$$

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(h_n)_{n\geq 1}$ définie par $h_n : x \mapsto \dfrac{x^{1/n}}{1+x}$. Les h_n sont continues sur $]0,1]$ (et prolongeables par continuité sur $[0,1]$), $(h_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction continue $h : x \mapsto \frac{1}{1+x}$, et $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$, $|h_n(x)| \leq \varphi(x) = \frac{1}{1+x}$, où la fonction $\varphi = h$ est intégrable sur $[0,1]$ car continue sur ce segment. On en déduit que $\int_0^1 h_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 h = \ln(2)$, et donc

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}.$$

Exercice 3 (*Lemme de Riemann-Lebesgue)**

Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue : pour $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{K})$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0$

Corrigé de l'exercice 3

On a déjà vu une preuve de ce résultat par IPP lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui ne s'applique évidemment pas ici.
L'idée est de procéder par densité, en approchant uniformément $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ par une fonction en escalier $e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$, qui est beaucoup plus simple à étudier.

- Le lemme de Riemann-Lebesgue est évident pour toute fonction constante c sur un intervalle borné quelconque $]\alpha,\beta[$, puisque

$$\left|\int_\alpha^\beta ce^{int}dt\right| = \left|\frac{c}{in}(e^{in\beta} - e^{in\alpha})\right| \leq \frac{c}{n}(|e^{in\beta}| + |e^{in\alpha}|) = \frac{2c}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

- Puisqu'une fonction en escalier est constante par morceaux, on en déduit par linéarité de l'intégrale que le lemme de Riemann-Lebesgue reste vrai pour toute fonction $e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$: en notant $(\alpha_0, \cdots, \alpha_K)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à e et c_k la valeur de e sur l'intervalle $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, on a

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt = \sum_{k=0}^{K-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} c_k e^{int}dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

d'après le cas précédent (puisque le nombre de termes de la somme est indépendant de la variable n).

- Passons au cas général : fixons une fonction $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ et un réel $\varepsilon > 0$. Par le théorème d'approximation uniforme, il existe une fonction $e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ telle que $\|f - e\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon$.
On en déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt = A_n + B_n,$$

où $A_n = \displaystyle\int_a^b e(t)e^{int}dt$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (d'après le cas précédent), et
$B_n = \displaystyle\int_a^b (f(t) - e(t))e^{int}dt$ vérifie la majoration :

$$|B_n| \leq \int_a^b |f(t) - e(t)|dt \leq (b-a)\varepsilon.$$

Donc il existe un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \implies |A_n| \leq \varepsilon \implies \left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| \leq (1+b-a)\varepsilon.$$

Quitte à remplacer dès le début ε par $\frac{\varepsilon}{1+b-a}$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies \left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien que $\displaystyle\int_a^b f(t)e^{int}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Le lemme de Riemann-Lebesgue est donc démontré.

Exercice 4 (*Expression intégrale de la constante d'Euler)**

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)e^{-x}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
2. Grâce au théorème de convergence dominée, démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x)dx.$$
3. Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}dx = -\gamma$, où $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$ est la constante d'Euler.

Corrigé de l'exercice 4

1. Arguments principaux : $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \ln(x)$ et $|f(x)| \leq xe^{-x}$ où $xe^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
2. On définit les fonctions $f_n : \left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x) & \text{si } 0 < x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{array}\right. \end{array}\right.$, qui sont continues.
On vérifie qu'on a $f_n \underset{s}{\longrightarrow} f$ sur $]0,+\infty[$.
En utilisant que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$, on montre que les f_n sont toutes dominées par $|f|$ sur $]0,+\infty[$. Comme f est bien continue et intégrable sur $]0,+\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée. D'où :
$$\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x)dx.$$
3. On note $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x)dx$. En effectuant le changement de variable (à justifier) $u = \frac{x}{n}$, on obtient :
$$\begin{aligned} I_n = \int_0^1 (1-u)^n \big(\ln(u) + \ln(n)\big)ndu &= n\int_0^1 (1-u)^n \ln(u)du + n\ln(n)\int_0^1 (1-u)^n du \\ &= n\int_0^1 (1-u)^n \ln(u)du + \frac{n\ln(n)}{n+1}. \end{aligned}$$
Ensuite, par IPP, en prenant $u \mapsto \frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}$ comme primitive (s'annulant en 0) de $u \mapsto (1-u)^n$, on obtient :
$$\int_0^1 (1-u)^n \ln(u)du = \left[n\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\ln(u)\right]_0^1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{1-(1-u)^{n+1}}{u}du$$

$$= -\frac{n}{n+1}\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(1-u)^p du = -\frac{n}{n+1}\sum_{p=0}^{n}\int_0^1 x^p dx = -\frac{n}{n+1}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p+1}.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p}\right) = -\gamma.$

II Permutations séries-intégrales

Exercice 5 (*)

Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}dx$ pour $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, puis, en appliquant judicieusement le théorème d'intégration terme à terme, montrer qu'on a : $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}$.

Corrigé de l'exercice 5

- **Existence de l'intégrale** : la fonction $S : x \mapsto \dfrac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}$ est continue sur $]0,+\infty[$ (puisque $\forall x > 0,\ 0 < e^{-bx} < 1$, le dénominateur de S ne s'annule pas), et vérifie :

$$S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x}{bx} = \frac{1}{b},$$

donc S se prolonge continûment en 0. De plus :

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} xe^{-ax} \underset{x\to+\infty}{=} o(1/x^2),$$

donc S est intégrable sur $]0,+\infty[$, ce qui montre l'existence de $I = \int_0^{+\infty} S(x)dx$.

- **Formule** : Puisque $e^{-bx} \in]0,1[\subset]-1,1[$ pour tout $x > 0$, on peut utiliser le développement en série géométrique :

$$\forall x > 0, \qquad S(x) = xe^{-ax}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-bx})^n = \sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x),$$

en posant $u_n : x \mapsto xe^{-(a+bn)x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ (donc sur $]0,+\infty[$), intégrables sur $]0,+\infty[$ (car continues sur $\mathbb{R}^+$ et négligeables devant $1/x^2$ en $+\infty$), la série $\sum u_n$ converge simplement vers la fonction continue (par morceaux) S, et les u_n sont positives, donc d'après le théorème d'intégration terme à terme "à la Fubini", on a la relation dans $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$:

$$\int_0^{+\infty} S(x)dx = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u_n(x)dx\right).$$

Par IPP, on obtient facilement que $\displaystyle\int_0^{+\infty}u_n(x)dx = \frac{1}{(a+nb)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre la formule voulue dans $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$, et en fait dans $\mathbb{R}^+$ puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u_n(x)dx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+nb)^2} < +\infty$ (par le critère des équivalents).

Exercice 6 (Développement en série de $\ln(2)$)**

1. Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

Corrigé de l'exercice 6

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto x^{2n}(1-x)$ est continue sur $[0,1]$ (car polynomiale), donc intégrable, la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction continue par morceaux

$$S : x \mapsto \begin{cases} \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases},$$

et les f_n sont à valeurs positives, donc d'après le théorème d'intégration terme à terme "à la Fubini", nous avons dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$:

$$\int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)dx\right).$$

Et en fait cette égalité a lieu dans $\mathbb{R}^+$ car

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)dx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} < +\infty$$

(vu que $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = O(1/n^2)$). On a bien montré l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)dx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx\right).$$

2. Considérons les sommes partielles de la série précédente :

$$(*) \qquad S_N = \sum_{n=0}^{N} \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx\right) = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2} = \sum_{k=1}^{2N+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

(par associativité de la somme finie).
Or, la série $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge (d'après le critère spécial des séries alternées), et (S_N) converge vers $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$ d'après la question précédente, donc en faisant tendre $N \to +\infty$ dans la relation $(*)$, on obtient

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Exercice 7 (Sans le théorème d'intégration terme à terme...)**
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. Pour $t \in]0\,;1[$, écrire $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ comme somme d'une série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(t)$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \int_0^1 |u_n(t)|dt$. Que peut-on en déduire ?
3. On pose $S_N(t) = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n(t)$. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt = \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(t)dt$.
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt$, puis la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Corrigé de l'exercice 7

1. Pour $t \in]0,1[$, on a $-t^b \in]-1,0[\subset]-1,1[$, donc on peut utiliser le développement en série géométrique :
$$\frac{t^{a-1}}{1+t^b} = t^{a-1} \times \frac{1}{1-(-t^b)} = t^{a-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-t^b)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t),$$
en posant $u_n(t) = (-1)^n t^{a-1+nb}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |u_n| = \int_0^1 t^{a-1+nb}dt = \left[\frac{t^{a+nb}}{a+nb}\right]_0^1 = \frac{1}{a+nb}$, donc $\sum_{n\geq 0}\int_0^1 |u_n|$ diverge, puisque $\frac{1}{a+nb} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1/b}{n}$. On en déduit que le théorème d'intégration terme à terme "à la Fubini" ne s'applique pas ici.

Remarque
Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ne s'applique pas non plus car la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur le segment $[0,1]$, étant donné qu'elle ne converge pas simplement (elle diverge grossièrement en $t=1$).

3. On peut calculer les sommes partielles :
$$\forall (N,t) \in \mathbb{N}\times]0,1[, \qquad S_N(t) = t^{a-1}\sum_{n=0}^{N}(-t^b)^n = \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\times(1-(-t^b)^{N+1}),$$
et on a la majoration :
$$\forall (N,t) \in \mathbb{N}\times]0,1[, \qquad |S_N(t)| \leq \varphi(t) = \frac{2t^{a-1}}{1+t^b},$$
avec la fonction φ intégrable sur $]0,1[$ car elle continue, se prolonge continûment en $t=1$ et vérifie $\varphi(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{2}{t^{1-a}}$ (avec $1-a<1$). De plus, chaque S_N est continue sur $]0,1[$ et la suite (S_N) converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction continue $S : t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ sur $]0,1[$ (d'après la première question), donc d'après le théorème de convergence dominée S est intégrable sur $]0,1[$, ainsi que les S_N, et
$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt = \int_0^1 S = \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N.$$
4. Par linéarité de l'intégrale, on a
$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^1 S_N = \sum_{n=0}^{N}\int_0^1 u_n = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{a+nb},$$
donc en faisant tendre $N\to+\infty$ et en utilisant la question précédente, on obtient
$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{a+nb} \underset{N\to+\infty}{\to} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt,$$
ce qui prouve la convergence de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{a+nb}$ et l'égalité :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt.$$

Remarque
On a donc finalement permuté la série et l'intégrale sans utiliser les théorèmes d'intégration terme à terme, mais en utilisant le théorème de convergence dominée avec les sommes partielles.

Application : dans le cas particulier où $(a,b)=(1,3)$, on obtient
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)(1-t+t^2)}.$$

On décompose en éléments simples : puisque le facteur $1-t+t^2$ est irréductible sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{\alpha}{1+t} + \frac{\beta t + \gamma}{1-t+t^2},$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
En multipliant par $1+t$ et en évaluant en $t=-1$, on obtient $\alpha = \frac{1}{3}$.
En multipliant par t et en faisant tendre $t \to +\infty$, on obtient $\alpha + \beta = 0$, donc $\beta = -\frac{1}{3}$.
Enfin, en évaluant en $t = 0$, on obtient $1 = \alpha + \gamma$, donc $\gamma = \frac{2}{3}$.
On a donc

$$\frac{1}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{1-t+t^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\left(\frac{2t-1}{t^2-t+1}\right) + \frac{3/2}{t^2-t+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\left(\frac{2t-1}{t^2-t+1}\right) + \frac{2}{\frac{4}{3}(t-\frac{1}{2})^2+1}\right).$$

En primitivant, on obtient

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{1}{3}\left[\ln(1+t) - \frac{1}{2}\ln(t^2-t+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

donc finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 8 (Fonction θ de Jacobi)**
On pose $\theta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi x}$.
On pose, pour $s \in \mathbb{C}$, $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$.

1. Montrer que si $\mathrm{Re}(s) > 1$, alors $\zeta(s)$ est défini.
   Montrer que si $\mathrm{Re}(s) > 0$, alors $\Gamma(s)$ est défini.
2. Déterminer l'intervalle de définition de la fonction θ, et montrer qu'elle est C^∞ sur cet intervalle.
3. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \theta(t) t^{\frac{s}{2}-1} dt = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$.

Corrigé de l'exercice 8

1. Notons $s = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{1}{n^s}\right| = |e^{-(x+iy)\ln(n)}| = |e^{-x\ln(n)} e^{-iy\ln(n)}| = e^{-x\ln(n)} = \frac{1}{n^x},$$

   donc la série $\zeta(s)$ converge absolument si $x = Re(s) > 1$.
   En outre, pour tout réel $t > 0$, on obtient de la même façon

$$|e^{-t} t^{s-1}| = e^{-t} t^{x-1},$$

   et la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ lorsque $x > 0$, puisqu'elle est continue, elle est équivalente à $\frac{1}{t^{1-x}}$ en 0^+ (avec $1 - x < 1$), et elle est négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$. Donc $t \mapsto e^{-t} t^{s-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ lorsque $x = Re(s) > 0$, ce qui montre que l'intégrale $\Gamma(s)$ est bien définie.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \leq 0$, alors la suite $(e^{-n^2\pi x})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0, donc la série $\theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi x}$ diverge. Si $x > 0$, on a $e^{-n^2\pi x} \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n^2)$ donc la série $\theta(x)$ converge.
   L'intervalle de définition de la fonction θ est donc $]0, +\infty[$.
   On utilise ensuite le théorème de dérivation terme à terme itéré pour une série de fonctions.

Les fonctions $u_n : x \mapsto e^{-n^2\pi x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ (car elles le sont sur $\mathbb{R}$), et $\forall (k,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $u_n^{(k)} : x \mapsto (-1)^k\pi^k n^{2k} e^{-n^2\pi x}$. De plus, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$ (vu la majoration $|u_n^{(k)}(x)| \leq \pi^k n^{2k} e^{-n^2\pi a} = o(1/n^2)$), donc on en déduit que $\theta = \sum_{n=1}^\infty u_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\forall (k,x) \in \mathbb{N}\times]0,+\infty[, \qquad \theta^{(k)}(x) = (-1)^k\pi^k \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2k} e^{-n^2\pi x}.$$

3. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) = x > 1$. On a

$$\forall t > 0, \qquad \theta(t)t^{\frac{s}{2}-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t),$$

avec $f_n(t) = e^{-n^2\pi t} t^{\frac{s}{2}-1}$.
Les f_n sont des fonctions continues sur $]0,+\infty[$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $t \mapsto \theta(t)t^{\frac{s}{2}-1}$ qui est bien continue par morceaux (car continue), et on a par changement de variable linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} e^{-n^2\pi t} t^{\frac{x}{2}-1} dt = \frac{1}{(\pi n^2)^{x/2}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{x}{2}-1} du = \frac{\pi^{-x/2}\Gamma(x/2)}{n^x},$$

donc les f_n sont intégrables et on a

$$\sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n| = \pi^{-x/2}\Gamma(x/2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} < +\infty.$$

Donc d'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n : t \mapsto \theta(t)t^{\frac{s}{2}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \theta(t)t^{\frac{s}{2}-1} dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)}{n^s} = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

(par les mêmes calculs qu'auparavant, avec le nombre complexe s à la place du réel x).

III Intégrales à paramètre

Exercice 9 (**)
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$.

Corrigé de l'exercice 9
Notons $f(x,t) = \frac{1-t^x}{1-t} = \frac{1-e^{x\ln(t)}}{1-t}$ pour tout $t \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$.
On utilise la version continue du théorème de convergence dominée.

* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1[$ (car continue).
* Pour tout $t \in]0,1[$, la fonction $f(x,t) \underset{x\to 0^+}{\to} \ell(t) = 0$, et la fonction ℓ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
* Pour tout $t \in]0,1[$ et pour tout $x \in [0,A]$ (avec $A > 0$), on a

$$|f(x,t)| \leq \varphi_A(t) = \frac{1-e^{A\ln(t)}}{1-t} = \frac{1-t^A}{1-t},$$

et φ_A est intégrable sur $]0,1[$ car continue, prolongeable par continuité en 0, mais aussi en 1 (faire un DL_1, on obtient $\varphi_A(t) \underset{t\to 1^-}{\to} A$).

On en déduit que $x \mapsto \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (mais aussi en 0) et $\lim_{x\to 0^+}\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}dt = \int_0^1 \ell(t)dt = 0$ (en fait il y a continuité en 0 de l'intégrale à paramètre).

Exercice 10 (**)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}f(0)$.

Corrigé de l'exercice 10

Notons, pour $h > 0$,

$$F(h) = \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx$$

(cette intégrale à paramètre est bien définie car on intègre une fonction continue sur un segment). L'idée est bien sûr d'appliquer la version continue du théorème de convergence dominée lorsque $h \to 0^+$, mais ça ne marche pas car on ne peut pas dominer $\frac{h}{h^2+x^2}f(x)$ pour h au voisinage de 0^+par une fonction intégrable sur $]0,1[$, vu que

$$\forall x > 0, \quad \sup_{h\in\mathbb{R}^+} \frac{h}{h^2+x^2} = \frac{1}{2x}$$

(faire une étude de fonction), et on ne sait pas si $x \mapsto \frac{f(x)}{2x}$ est intégrable sur $]0,1[$ (c'est faux si $f(0) \neq 0$ d'ailleurs).

Pour $h > 0$ fixé, effectuons d'abord le changement de variable linéaire $x = hu$ pour homogénéiser le dénominateur :

$$F(h) = \int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx = \int_0^{1/h} \frac{f(hu)}{1+u^2}du.$$

On peut ensuite enlever la dépendance en h des bornes de l'intégrale afin de réécrire ceci comme une intégrale à paramètre :

$$F(h) = \int_0^{+\infty} g(h,u)du, \text{ avec } g(h,u) = \begin{cases} \frac{f(hu)}{1+u^2} & \text{si } 0 \leq u \leq \frac{1}{h} \\ 0 & \text{si } u > \frac{1}{h} \end{cases}.$$

Réessayons maintenant d'appliquer la version continue du théorème de convergence dominée :

* Pour tout $h > 0$, la fonction $u \mapsto g(h,u)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ (car elle est continue sur $[0,1/h[$, sur $]1/h,+\infty[$ et possède des limites finies à gauche et à droite en $1/h$).

* Pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, $g(h,u) \underset{h\to 0^+}{\to} \ell(u) = \frac{f(0)}{1+u^2}$ (car pour h assez petit, on a $1/h \geq u$, donc $g(h,u) = \frac{f(hu)}{1+u^2}$, et $f(hu) \underset{h\to 0^+}{\to} f(0)$ par continuité de f en 0). La fonction limite ℓ est bien continue par morceaux (car continue) sur $[0,+\infty[$.

* On a la domination :

$$\forall (h,u) \in]0,+\infty[\times[0,+\infty[, \qquad |g(h,u)| \leq \varphi(u) = \frac{\|f\|_{\infty,[0,1]}}{1+u^2},$$

avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$ (c'est un multiple de la dérivée de arctan).

Donc le théorème s'applique et on obtient :

$$F(h) \underset{h\to 0^+}{\to} \int_0^{+\infty} \ell(u)du = \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}f(0).$$

Exercice 11 (**)

Pour $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \int_0^1 e^{-\frac{x}{t}}dt$.

1. Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $\varphi''(x)$.

Corrigé de l'exercice 11

Exercice 12 (**)

On note (lorsque cette intégrale converge) $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2} e^{-t}\, dt$.

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(tx)\, dt$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(tx)\, dt = \frac{1}{1+x^2}$.
3. Démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $\varphi'(x)$ et de $\varphi''(x)$ sous la forme d'intégrales, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Calculer la valeur de $\varphi(0)$ et de $\varphi'(0)$.
5. Déduire des 2 questions précédentes la valeur explicite de $\varphi(x)$.

Corrigé de l'exercice 12

Exercice 13 (*)

Soit I un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n s'annulant en 0, où $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ par $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ si $t \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)dt$.
2. Montrer que g est de classe C^{n-1} et calculer $g^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Corrigé de l'exercice 13

Exercice 14 (Intégrale de Gauss)**

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Justifier que cette intégrale converge.

   On introduit les fonction f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.
2. Montrer que f et g sont dérivables, et qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = -2f'(x)f(x)$.
3. Montrer qu'on a $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4. En déduire enfin la valeur de I.

Corrigé de l'exercice 14

Exercice 15 (Fonction Gamma d'Euler)**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que Γ a pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer : $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   Que vaut $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$?
3. Montrer que Γ est continue.
4. En déduire un équivalent de Γ en 0^+.
5. Montrer que Γ est C^∞ et calculer ses dérivées successives.
6. Montrer que Γ est convexe.

Corrigé de l'exercice 15

Notons $f(x,t) = t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t) - t}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0, +\infty[$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   De plus, $f(x,t) \underset{t \to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$, donc $\int_0^1 f(x,t)dt$ converge si et seulement si $1 - x < 1$, c'est-à-dire $x > 0$. Ensuite on a $f(x,t) = \underset{t \to +\infty}{o}(1/t^2)$, donc $\int_1^{+\infty} f(x,t)dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Donc finalement, l'intégrale impropre $\Gamma(x)$ converge si et seulement si $x > 0$.

   Remarque
   Vu que $f(x,t) \geq 0$, on a en fait montré que $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x > 0$.

2. Soit $x > 0$. Par intégration par parties généralisée, on obtient
   $$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$
   (ce calcul est valable car $t \mapsto t^x e^{-t}$ possède des limites finies en 0^+ et en $+\infty$).
   Par récurrence, on en déduit simplement que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
   * Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ (car continue).
   * Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (donc sur $]0, +\infty[$).
   * Hypothèse de domination sur tout segment : pour tout segment $[a,b] \subset]0, +\infty[$, on a pour tout $(x,t) \in [a,b] \times]0, +\infty[$:
     $$|f(x,t)| \leq \begin{cases} e^{(a-1)\ln(t) - t} = t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t < 1 \\ e^{(b-1)\ln(t) - t} = t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases},$$
     donc *a fortiori* :
     $$|f(x,t)| \leq \varphi_{a,b}(t) = f(a,t) + f(b,t),$$
     avec $\varphi_{a,b}$ intégrable sur $]0, +\infty[$ (comme somme de deux fonctions intégrables d'après la question 1.).

   Donc d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
4. On utilise la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, valable pour tout $x > 0$. Puisque Γ est continue en 1, on a $\Gamma(x+1) \underset{x \to 0^+}{\to} \Gamma(1) = 0! = 1$, donc $x\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\to} 1$, c'est-à-dire $\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.
5. On utilise le théorème de dérivation itérée des intégrales à paramètre.
   * Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (donc sur $]0, +\infty[$), avec
     $$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall (x,t) \in]0, +\infty[^2, \qquad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t}.$$

* Toutes ces dérivées partielles $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$ par rapport à la variable d'intégration t (car continues). On montrera leur intégrabilité par domination au point suivant.
* Toutes ces dérivées partielles $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ peuvent se dominer localement en x par des fonctions intégrables sur $]0,+\infty[$ (**c'est le point délicat**).
La majoration est différente selon que $t\in]0,1[$ ou $t\in[1,+\infty[$. Etant donné un segment $[a,b]\subset]0,+\infty[$, on a, pour tout $(k,x,t)\in\mathbb{N}\times[a,b]\times]0,+\infty[$:

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln(t)|^k e^{(x-1)\ln(t)-t} \leq \varphi_{k,a,b}(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^k e^{(a-1)\ln(t)-t} & \text{si } t<1 \\ |\ln(t)|^k e^{(b-1)\ln(t)-t} & \text{si } t\geq 1\end{cases}$$

Reste à montrer que la fonction

$$\varphi_{k,a,b} : t\mapsto \begin{cases} |\ln(t)|^k t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t<1 \\ |\ln(t)|^k t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t\geq 1\end{cases}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$. Tout d'abord, elle est continue sur $]0,+\infty[$ (limites identiques en 1^+ et 1^-). Ensuite, on a

$$\varphi_{k,a,b}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} |\ln(t)|^k t^{b-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2),$$

ce qui montre que $\varphi_{k,a,b}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Enfin :

$$\varphi_{k,a,b}(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} |\ln(t)|^k t^{a-1} \underset{t\to 0^+}{=} o(1/t^\beta)$$

pour tout réel β tel que $\beta+a-1>0$. En choisissant $\beta\in]1-a,1[$ (possible car $1-a<1$, par exemple $\beta=1-a/2$), cela montre que $\varphi_{k,a,b}$ est intégrable au voisinage de 0^+.
En définitive, $\varphi_{k,a,b}\in L^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$.

On en déduit d'après le théorème de dérivation itérée d'une intégrale à paramètre que $\Gamma\in\mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\forall (x,t)\in]0,+\infty[^2, \qquad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t)t^{x-1}e^{-t}dt.$$

6. En particulier $\Gamma'' : x\mapsto \int_0^{+\infty}\ln^2(t)t^{x-1}e^{-t}dt$ est positive donc Γ est convexe.

Exercice 16 (*Transformée de Laplace)**
Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{C}$ une fonction continue. On pose, pour $p\in\mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(f) : p\mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

(lorsque cette intégrale converge). C'est la **transformée de Laplace** de f.
On note $C(f)$ l'ensemble des $p\in\mathbb{R}$ tels que $\mathcal{L}(f)(p)$ converge, et $A(f)$ l'ensemble des $p\in\mathbb{R}$ tels que $\mathcal{L}(f)(p)$ converge absolument.

1. Montrer que s'ils ne sont pas vides, $C(f)$ et $A(f)$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ non majorés.
2. Si f est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, montrer que $\mathcal{L}(f)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{L}(f)^{(n)}(p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue en 0.
4. Application : calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$.

Corrigé de l'exercice 16
Remarquons que la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$ entraîne celle de $t\mapsto f(t)e^{-pt}$ pour tout réel p.
L'intégrale $\mathcal{L}(f)(p)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$ est donc une intégrale impropre en $+\infty$.

1. * Soit $p_0 \in A(f)$. Pour tout réel $p > p_0$, on a $p \in A(f)$. Cela vient du fait que
$$\forall t > 0,\ \forall p > p_0, \qquad |f(t)e^{-pt}| \leq |f(t)|e^{-p_0 t},$$
donc la convergence absolue de l'intégrale $\mathcal{L}(f)(p_0)$ entraîne celle de $\mathcal{L}(f)(p)$.
   * Soit maintenant $p_0 \in C(f)$, c'est-à-dire que l'intégrale $\mathcal{L}(f)(p_0)$ converge (pas nécessairement absolument). Montrons que pour tout réel $p > p_0$, on a $p \in C(f)$.
On procède en intégrant par parties : par hypothèse, la primitive $G : x \mapsto \int_0^x f(t)e^{-p_0 t}dt$ possède une limite finie $L \in \mathbb{C}$ lorsque $x \to +\infty$, donc pour tout réel $x \geq 0$:
$$\int_0^x f(t)e^{-pt}dt = \int_0^x f(t)e^{-p_0 t}e^{(p_0-p)t}dt = \Big[G(t)e^{(p_0-p)t}\Big]_0^x + (p-p_0)\int_0^x G(t)e^{(p_0-p)t}dt,$$
c'est-à-dire (puisque $G(0) = 0$) :
$$\int_0^x f(t)e^{-pt}dt = G(x)e^{(p_0-p)x} + (p-p_0)\int_0^x G(t)e^{(p_0-p)t}dt.$$
Or, G est bornée sur $\mathbb{R}^+$ (car elle est continue et possède une limite finie en $+\infty$), et $p_0 - p < 0$ donc $G(x)e^{(p_0-p)x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En outre, l'intégrale $\int_0^{+\infty} G(t)e^{(p_0-p)t}dt$ est absolument convergente donc convergente car
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad |G(t)e^{(p_0-p)t}| \leq \|G\|_{\infty,\mathbb{R}^+}e^{(p_0-p)t},$$
et $t \mapsto e^{(p_0-p)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc par somme, $\int_0^x f(t)e^{-pt}dt$ possède une limite finie lorsque $x \to +\infty$, c'est-à-dire $p \in C(f)$.

   Ceci montre que $A(f)$ et $C(f)$ sont des intervalles réels non majorés, lorsqu'ils ne sont pas vides.
2. Utilisons le théorème de dérivation itérée d'une intégrale à paramètre.
Notons $h(p,t) = f(t)e^{-pt}$ pour $(p,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.
   * Pour tout réel $t \geq 0$, la fonction $p \mapsto h(p,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (donc sur $]0,+\infty[$), et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall (p,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \qquad \frac{\partial^n h}{\partial p^n}(p,t) = (-t)^n f(t)e^{-pt}.$$
   * Toutes ces dérivées partielles $\frac{\partial^n h}{\partial p^n}$ sont continues par morceaux (car continues) sur $\mathbb{R}^+$ par rapport à t. Elles sont également intégrables sur $\mathbb{R}^+$ comme le montre la domination au point suivant.
   * Toutes ces dérivées partielles $\frac{\partial^n h}{\partial p^n}$ sont dominées localement en x par des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^+$ car pour tout réel $a > 0$:
$$\forall (n,p,t) \in \mathbb{N} \times [a,+\infty[\times\mathbb{R}^+, \qquad \left|\frac{\partial^n h}{\partial p^n}(p,t)\right| = t^n|f(t)|e^{-pt} \leq \|f\|_{\infty,\mathbb{R}^+}t^n e^{-at} = \varphi_{n,a}(t),$$
(puisque f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par hypothèse) et la fonction $\varphi_{n,a}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$).

   On en déduit que l'intégrale à paramètre $\mathcal{L}(f)$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$. De plus, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}\times]0,+\infty[$:
$$\mathcal{L}(f)^{(n)}(p) = (-1)^n\int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-pt}dt = \frac{(-1)^n}{p^{n+1}}\int_0^{+\infty} f(y/p)y^n e^{-y}dy$$
(par changement de variable linéaire), donc
$$\left|\mathcal{L}(f)^{(n)}(p)\right| \leq \frac{\|f\|_{\infty,\mathbb{R}^+}}{p^{n+1}}\underbrace{\int_0^{+\infty} y^n e^{-y}}_{=\Gamma(n+1)} = \frac{n!\|f\|_{\infty,\mathbb{R}^+}}{p^{n+1}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
(l'intégrale $\Gamma(n+1)$ se calcule facilement par récurrence).

3. Ici, on suppose que $0 \in C(f)$, donc d'après la question 1., l'intégrale $\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ converge pour tout réel $p \geq 0$.
Notons $F : x \mapsto \int_0^x f$ la primitive de f nulle en 0. Par hypothèse de convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$, il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $F(x) \underset{x \to +\infty}{\to} \ell$.
Montrons que $\mathcal{L}(f)(p)$ tend vers $\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f = \ell$ lorsque $p \to 0^+$.
Pour tout réel $p > 0$, on a en intégrant par parties :
$$|\mathcal{L}(f)(p) - \mathcal{L}(f)(0)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt - \int_0^{+\infty} f(t)dt \right| = \left| \underbrace{\left[F(t)e^{-pt}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + p\int_0^{+\infty} F(t)e^{-pt}dt - \ell \right|$$
$$= \left| p\int_0^{+\infty} F(t)e^{-pt}dt - \ell \underbrace{\int_0^{+\infty} pe^{-pt}dt}_{=1} \right| \leq p\int_0^{+\infty} |F(t) - \ell|e^{-pt}dt.$$
(cette dernière intégrale converge bien car $F - \ell$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, puisque continue et de limite nulle en $+\infty$). Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un réel $A > 0$ tel que
$$t \geq A \implies |F(t) - \ell| \leq \varepsilon.$$
En découpant l'intégrale et en notant $M = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |F(t) - \ell|$, on a donc, pour tout réel $p > 0$:
$$|\mathcal{L}(f)(p) - \mathcal{L}(f)(0)| \leq p\int_0^A \underbrace{|F(t) - \ell|}_{\leq M} e^{-pt}dt + p\int_A^{+\infty} \underbrace{|F(t) - \ell|}_{\leq \varepsilon} e^{-pt}dt$$
$$\leq pM\int_0^A \underbrace{e^{-pt}}_{\leq 1}dt + \varepsilon\int_A^{+\infty} pe^{-pt}dt \leq pMA + \varepsilon \underbrace{\int_0^{+\infty} pe^{-pt}dt}_{=1} = pMA + \varepsilon.$$
Il reste à faire tendre $p \to 0^+$: puisque $pMA \underset{p \to 0^+}{\to} 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$0 < p < \delta \implies pMA \leq \varepsilon \implies |\mathcal{L}(f)(p) - \mathcal{L}(f)(0)| \leq 2\varepsilon.$$
Ceci montre bien que $\mathcal{L}(f)(p) \underset{p \to 0^+}{\to} \mathcal{L}(f)(0)$, et donc $\mathcal{L}(f)$ est continue en 0.

4. On sait déjà que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ converge (en procédant par IPP, voir les autres exercices). D'après ce qui précède, I est donc la limite lorsque $p \to 0^+$ de la transformée de Laplace
$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-pt}dt,$$
définie pour tout réel $p > 0$. L'idée est de calculer explicitement cette intégrale à paramètre, en passant par sa dérivée. D'après la question 2., $\mathcal{L}(f)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et en dérivant sous le signe intégral, on a
$$\mathcal{L}(f)'(p) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-pt}dt = -Im\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-p)t}dt\right) = -Im\left(\frac{1}{i-p}\right) = -\frac{1}{1+p^2}.$$
Donc en primitivant, on en déduit qu'il existe une constante réelle K telle que
$$\forall p > 0, \quad \mathcal{L}(f)(p) = K - \arctan(p).$$
En outre, on sait (toujours d'après la question 2.), que $\mathcal{L}(f)$ possède une limite nulle en $+\infty$, donc $K = \frac{\pi}{2}$ et finalement l'intégrale cherchée vaut :
$$I = \lim_{p \to 0^+} \mathcal{L}(f)(p) = \lim_{p \to 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(p)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 17 (Transformée de Fourier)**
Pour $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, c'est-à-dire pour f continue par morceaux et intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on définit sa **transformée de Fourier** :

$$\hat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt.$$

1. Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire de $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
2. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\hat{f}$ est de classe C^∞, et donner l'expression de ses dérivées successives.
3. En dérivant une fois, en déduire la transformée de Fourier de la fonction $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Corrigé de l'exercice 17

Exercice 18 (***)
Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}}$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $F(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
3. (a) On sait que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note argsh sa réciproque. Déterminer une expression (à l'aide d'un logarithme) de argsh.
   (b) Calculer argsh$'$.
   (c) En déduire, pour $\alpha > 0$ et $x > 0$, la valeur de $I_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{t^2+x^2}}$.
   (d) Calculer un équivalent de $I_\alpha(x)$ lorsque $x \to 0$.
4. En déduire un équivalent de F en 0.
5. Grâce à un changement de variable, calculer un équivalent de F en $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 18

Exercice 19 (*Equivalent d'intégrale de type affine)**

1. Déterminer un équivalent de $\Phi(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x+x^2)^t}$ lorsque $t \to +\infty$.
   Pour cela, on utilisera une approximation affine de $x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$ en 0 (DL d'ordre 1) et un découpage d'intégrale adéquat.
2. Généralisation : soit $f \in \mathcal{C}^0([0;a];\mathbb{R})$ avec $a > 0$ réel.
   On suppose que $f(0) = 1$, f est dérivable en 0 avec $f'(0) = k < 0$, et $\forall x \in]0;a]$, $|f(x)| < 1$.
   Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^a f(x)^n dx$.

Corrigé de l'exercice 19

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$ est continue et strictement positive sur $[0,1]$, et vérifie $f(x) = 1 - x + o(x)$ au voisinage de 0.
   Conjecturons un équivalent de $\Phi(t) = \int_0^1 f(x)^t dx$ lorsque $t \to +\infty$.
   Si $\alpha > 0$ est voisin de 0, alors

$$\int_0^\alpha f(x)^t dx \simeq \int_0^\alpha (1-x)^t dx = \frac{1}{t+1} - \frac{(1-\alpha)^{t+1}}{t+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}.$$

   De plus :

$$\int_\alpha^1 f(x)^t dx \leq \int_\alpha^1 \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^t dx = \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^t (1-\alpha) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t}\right),$$

donc il semble que $\Phi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$.
Prouvons cela rigoureusement : fixons un réel $\varepsilon > 0$. Vu que $f(x) = 1 - x + o(x)$ au voisinage de 0, il existe un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$x \in [0, \alpha] \implies |f(x) - 1 + x| \leq \varepsilon x \implies 1 - (1+\varepsilon)x \leq f(x) \leq 1 - (1-\varepsilon)x.$$

Quitte à diminuer α, on a $1 - (1+\varepsilon)\alpha > 0$, et donc pour tout réel $t > 0$:

$$x \in [0, \alpha] \implies 0 \leq (1 - (1+\varepsilon)x)^t \leq f(x)^t \leq (1 - (1-\varepsilon)x)^t,$$

ce qui entraîne par croissance de l'intégrale :

$$\forall t > 0, \qquad \frac{1 - (1 - (1+\varepsilon)\alpha)^{t+1}}{(1+\varepsilon)(t+1)} \leq \int_0^\alpha f(x)^t dx \leq \frac{1 - (1 - (1-\varepsilon)\alpha)^{t+1}}{(1-\varepsilon)(t+1)}.$$

Lorsque $t \to +\infty$, le membre de gauche est équivalent à $\frac{1}{1+\varepsilon} \times \frac{1}{t}$, alors que celui de droite est équivalent à $\frac{1}{1-\varepsilon} \times \frac{1}{t}$. Donc il existe $T_0 > 0$ tel que

$$t \geq T_0 \implies \frac{1}{1+\varepsilon} - \varepsilon \leq t \int_0^\alpha f(x)^t dx \leq \frac{1}{1-\varepsilon} + \varepsilon.$$

En outre,

$$0 \leq t \int_\alpha^1 f(x)^t dx \leq t \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^t (1-\alpha) \underset{t\to+\infty}{\to} 0,$$

donc il existe $T_1 > 0$ tel que

$$t \geq T_1 \implies 0 \leq t \int_\alpha^1 f(x)^t dx \leq \varepsilon.$$

Ainsi

$$t \geq \max(T_0, T_1) \implies \frac{1}{1+\varepsilon} - \varepsilon \leq t\Phi(t) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} + 2\varepsilon.$$

Enfin, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{1+\varepsilon} - \varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{1-\varepsilon} + 2\varepsilon = 1$, donc pour tout réel $\varepsilon' > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \implies \left(1 - \varepsilon' \leq \frac{1}{1+\varepsilon} - \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-\varepsilon} + 2\varepsilon \leq 1 + \varepsilon'\right).$$

On a donc prouvé que pour tout réel $\varepsilon' > 0$, il existe $T_2 > 0$ tel que

$$t \geq T_2 \implies 1 - \varepsilon' \leq t\Phi(t) \leq 1 + \varepsilon',$$

et donc $t\Phi(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 1$, c'est-à-dire $\Phi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$.

2. On procède de même à partir du DL :

$$f(x) = 1 + kx + \underset{x\to 0^+}{o(x)}.$$

Etant donné un réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $0 < \alpha < a$ tel que

$$x \in [0, \alpha] \implies \int_0^\alpha (1 + (k-\varepsilon)x)^n dx \leq \int_0^\alpha f(x)^n dx \leq \int_0^\alpha (1 + (k+\varepsilon)x)^n dx,$$

c'est-à-dire

$$x \in [0, \alpha] \implies \frac{-1 + (1 + (k-\varepsilon)\alpha)^{n+1}}{(k-\varepsilon)(n+1)} \leq \int_0^\alpha f(x)^n dx \leq \frac{-1 + (1 + (k+\varepsilon)\alpha)^{n+1}}{(k+\varepsilon)(n+1)}.$$

Puisque $k < 0$, on a $0 \leq 1 + (k-\varepsilon)\alpha \leq 1 + (k+\varepsilon)\alpha < 1$ quitte à diminuer α, et donc

$$\frac{-1 + (1 + (k-\varepsilon)\alpha)^{n+1}}{(k-\varepsilon)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{(k-\varepsilon)n},$$

$$\frac{-1+(1+(k+\varepsilon)\alpha)^{n+1}}{(k+\varepsilon)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{(k+\varepsilon)n}.$$

Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n \geq n_0 \implies -\frac{1}{k-\varepsilon} - \varepsilon \leq n\int_0^\alpha f(x)^n dx \leq -\frac{1}{k+\varepsilon} + \varepsilon.$$

En outre,

$$\left|\int_\alpha^a f(x)^n dx\right| \leq \|f\|_{\infty,[\alpha,a]}^n (a-\alpha),$$

avec $\|f\|_{\infty,[\alpha,a]} < 1$ (par hypothèse sur f, car ce sup est atteint en un point de $[\alpha,a] \subset]0,a]$ par continuité de f sur le segment $[\alpha,a]$), donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n \geq n_1 \implies \left|n\int_\alpha^a f(x)^n dx\right| \leq \varepsilon.$$

Donc en sommant les deux intégrales :

$$n \geq \max(n_0,n_1) \implies -\frac{1}{k-\varepsilon} - 2\varepsilon \leq nI_n \leq -\frac{1}{k+\varepsilon} + 2\varepsilon,$$

et on conclut de la même façon qu'à la question précédente que :

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = -\frac{1}{k},$$

c'est-à-dire $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{f'(0)n}$.