

Exercices du CH12 : Intersion limite-intégrale

Exercices de la banque INP à étudier : 25, 26 (utilisation du th. de convergence dominée), 27 (étude d'une suite d'intégrales), 29 (fonction Gamma), 30 (intégrale à paramètre et équa. diff.), 49 (utilisation du th. d'intégration terme à terme), 50 (continuité et équivalent d'une intégrale à paramètre).

I Suites d'intégrales

Exercice 1 (*)

Déterminer les limites pour $n \rightarrow +\infty$ des suites d'intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi \sqrt{\pi - x} \sin^n(x) dx, \quad J_n = \int_0^{\sqrt[n]{n}} \sqrt{1 + x^n} dx.$$

On pourra découper judicieusement J_n ...

Corrigé de l'exercice 1

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \sqrt{\pi - x} \sin^n(x)$ est continue par morceaux (car continue) sur $[0, \pi]$, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux

$$f : \begin{cases} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases},$$

et enfin, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi], \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x) = \sqrt{\pi - x},$$

avec φ intégrable sur $[0, \pi]$ (car continue sur ce segment).

Donc d'après le théorème de convergence dominée, $I_n = \int_0^\pi f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f = 0$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n : x \mapsto \sqrt{1 + x^n}$. Chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}^+$. On décompose $J_n = A_n + B_n$, avec

$$A_n = \int_0^1 g_n, \quad B_n = \int_1^{\sqrt[n]{n}} g_n.$$

Le théorème de convergence dominée s'applique à la suite d'intégrales (A_n) , puisque (g_n) converge simplement vers la fonction constante égale à 1 sur l'intervalle $[0, 1[$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1]$, $|g_n(x)| \leq \varphi(x)$, où $\varphi : x \mapsto \sqrt{2}$ est intégrable sur $[0, 1]$. Donc $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 dx = 1$.

Quant à B_n , il suffit de majorer :

$$|B_n| \leq (\sqrt[n]{n} - 1) \|g_n\|_{\infty, [1, \sqrt[n]{n}]} = (e^{\ln(n)/n} - 1) \sqrt{1 + n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc par somme, $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Exercice 2 (**De la forme $f(t^n)$)

- Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Étudier la limite de $\int_0^1 f(t^n) dt$ pour $n \rightarrow +\infty$.
- Chercher un équivalent pour $n \rightarrow +\infty$ de $\int_0^1 \frac{t^n}{1 + t^n} dt$.

Corrigé de l'exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n : t \mapsto f(t^n)$. Par continuité de f , les g_n sont continues sur $[0, 1]$, la suite (g_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction continue par morceaux
- $$g : t \mapsto \begin{cases} f(0) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ f(1) & \text{si } t = 1 \end{cases}, \text{ et pour tout } (n, t) \in \mathbb{N} \times [0, 1], |g_n(t)| \leq \varphi(t), \text{ où } \varphi \text{ est la fonction constante égale à } \|f\|_{\infty, [0, 1]}, \text{ donc } \varphi \text{ est intégrable sur } [0, 1]. \text{ On obtient donc par le théorème de convergence dominée que}$$

$$\int_0^1 f(t^n) dt = \int_0^1 g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g = f(0).$$

2. La première question appliquée à $f : t \mapsto \frac{t}{1+t}$ (qui est bien continue sur $[0, 1]$) donne $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0) = 0$, mais ne fournit pas d'équivalent.
Avec le changement de variable $x = t^n$, on peut réécrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{x^{1/n}}{1+x} dx.$$

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(h_n)_{n \geq 1}$ définie par $h_n : x \mapsto \frac{x^{1/n}}{1+x}$. Les h_n sont continues sur $]0, 1]$ (et prolongeables par continuité sur $[0, 1]$), $(h_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction continue $h : x \mapsto \frac{1}{1+x}$, et $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1], |h_n(x)| \leq \varphi(x) = \frac{1}{1+x}$, où la fonction $\varphi = h$ est intégrable sur $[0, 1]$ car continue sur ce segment. On en déduit que $\int_0^1 h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h = \ln(2)$, et donc

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}.$$

Exercice 3 (***) Lemme de Riemann-Lebesgue

Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue : pour $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0$

Corrigé de l'exercice 3

On a déjà vu une preuve de ce résultat par IPP lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui ne s'applique évidemment pas ici.

L'idée est de procéder par densité, en approchant uniformément $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$ par une fonction en escalier $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, qui est beaucoup plus simple à étudier.

- Le lemme de Riemann-Lebesgue est évident pour toute fonction constante c sur un intervalle borné quelconque $]\alpha, \beta[$, puisque

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} c e^{int} dt \right| = \left| \frac{c}{in} (e^{in\beta} - e^{in\alpha}) \right| \leq \frac{c}{n} (|e^{in\beta}| + |e^{in\alpha}|) = \frac{2c}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- Puisqu'une fonction en escalier est constante par morceaux, on en déduit par linéarité de l'intégrale que le lemme de Riemann-Lebesgue reste vrai pour toute fonction $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$: en notant $(\alpha_0, \dots, \alpha_K)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à e et c_k la valeur de e sur l'intervalle $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, on a

$$\int_a^b f(t) e^{int} dt = \sum_{k=0}^{K-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} c_k e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'après le cas précédent (puisque le nombre de termes de la somme est indépendant de la variable n).

- Passons au cas général : fixons une fonction $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$ et un réel $\varepsilon > 0$. Par le théorème d'approximation uniforme, il existe une fonction $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ telle que $\|f - e\|_{\infty, [a, b]} \leq \varepsilon$. On en déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b f(t) e^{int} dt = A_n + B_n,$$

où $A_n = \int_a^b e(t)e^{int} dt$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$ (d'après le cas précédent), et

$B_n = \int_a^b (f(t) - e(t))e^{int} dt$ vérifie la majoration :

$$|B_n| \leq \int_a^b |f(t) - e(t)| dt \leq (b-a)\varepsilon.$$

Donc il existe un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \implies |A_n| \leq \varepsilon \implies \left| \int_a^b f(t)e^{int} dt \right| \leq (1+b-a)\varepsilon.$$

Quitte à remplacer dès le début ε par $\frac{\varepsilon}{1+b-a}$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left| \int_a^b f(t)e^{int} dt \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien que $\int_a^b f(t)e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Le lemme de Riemann-Lebesgue est donc démontré.

Exercice 4 (***) Expression intégrale de la constante d'Euler

- Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)e^{-x}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.
- Grâce au théorème de convergence dominée, démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x) dx.$$

- Conclure que $\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x} dx = -\gamma$, où $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$ est la constante d'Euler.

Corrigé de l'exercice 4

- Arguments principaux : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$ et $|f(x)| \leq xe^{-x}$ où $xe^{-x} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

- On définit les fonctions $f_n : \begin{cases}]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x) & \text{si } 0 < x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases} \end{cases}$, qui sont continues.

On vérifie qu'on a $f_n \xrightarrow{s} f$ sur $]0, +\infty[$.

En utilisant que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$, on montre que les f_n sont toutes dominées par $|f|$ sur $]0, +\infty[$. Comme f est bien continue et intégrable sur $]0, +\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée. D'où :

$$\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x) dx.$$

- On note $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x) dx$. En effectuant le changement de variable (à justifier) $u = \frac{x}{n}$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-u)^n (\ln(u) + \ln(n)) n du = n \int_0^1 (1-u)^n \ln(u) du + n \ln(n) \int_0^1 (1-u)^n du \\ &= n \int_0^1 (1-u)^n \ln(u) du + \frac{n \ln(n)}{n+1}. \end{aligned}$$

Ensuite, par IPP, en prenant $u \mapsto \frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}$ comme primitive (s'annulant en 0) de $u \mapsto (1-u)^n$, on obtient :

$$\int_0^1 (1-u)^n \ln(u) du = \left[n \frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1} \ln(u) \right]_0^1 - \frac{n}{n+1} \int_0^1 \frac{1-(1-u)^{n+1}}{u} du$$

$$= -\frac{n}{n+1} \int_0^1 \sum_{p=0}^n (1-u)^p du = -\frac{n}{n+1} \sum_{p=0}^n \int_0^1 x^p dx = -\frac{n}{n+1} \sum_{p=0}^n \frac{1}{p+1}.$$

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} \ln(x) e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln(n) - \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} \right) = -\gamma.$$

II Permutations séries-intégrales

Exercice 5 (*)

Justifier l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} dx$ pour $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, puis, en appliquant judicieusement le théorème d'intégration terme à terme, montrer qu'on a : $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$.

Corrigé de l'exercice 5

- **Existence de l'intégrale** : la fonction $S : x \mapsto \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (puisque $\forall x > 0, 0 < e^{-bx} < 1$, le dénominateur de S ne s'annule pas), et vérifie :

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x}{bx} = \frac{1}{b},$$

donc S se prolonge continûment en 0. De plus :

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} xe^{-ax} = o(1/x^2),$$

donc S est intégrable sur $]0, +\infty[$, ce qui montre l'existence de $I = \int_0^{+\infty} S(x) dx$.

- **Formule** : Puisque $e^{-bx} \in]0, 1[- 1, 1[$ pour tout $x > 0$, on peut utiliser le développement en série géométrique :

$$\forall x > 0, \quad S(x) = xe^{-ax} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-bx})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x),$$

en posant $u_n : x \mapsto xe^{-(a+bn)x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ (donc sur $]0, +\infty[$), intégrables sur $]0, +\infty[$ (car continues sur $\mathbb{R}^+$ et négligeables devant $1/x^2$ en $+\infty$), la série $\sum u_n$ converge simplement vers la fonction continue (par morceaux) S , et les u_n sont positives, donc d'après le théorème d'intégration terme à terme "à la Fubini", on a la relation dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$:

$$\int_0^{+\infty} S(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(x) dx \right).$$

Par IPP, on obtient facilement que $\int_0^{+\infty} u_n(x) dx = \frac{1}{(a+nb)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre la

formule voulue dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, et en fait dans $\mathbb{R}^+$ puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(x) dx \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2} < +\infty$ (par le critère des équivalents).

Exercice 6 (**Développement en série de $\ln(2)$)

1. Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n} (1-x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

Corrigé de l'exercice 6

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto x^{2n}(1-x)$ est continue sur $[0, 1]$ (car polynomiale), donc intégrable, la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction continue par morceaux

$$S : x \mapsto \begin{cases} \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases},$$

et les f_n sont à valeurs positives, donc d'après le théorème d'intégration terme à terme "à la Fubini", nous avons dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$:

$$\int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right).$$

Et en fait cette égalité a lieu dans $\mathbb{R}^+$ car

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} < +\infty$$

(vu que $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = O(1/n^2)$). On a bien montré l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x) dx \right).$$

2. Considérons les sommes partielles de la série précédente :

$$\begin{aligned} (*) \quad S_N &= \sum_{n=0}^N \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x) dx \right) = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2} = \sum_{k=1}^{2N+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

(par associativité de la somme finie).

Or, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge (d'après le critère spécial des séries alternées), et (S_N) converge vers $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$ d'après la question précédente, donc en faisant tendre $N \rightarrow +\infty$ dans la relation (*), on obtient

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Exercice 7 (Sans le théorème d'intégration terme à terme...)**

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

- Pour $t \in]0, 1[$, écrire $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ comme somme d'une série $\sum_{n \geq 0} u_n(t)$.
- Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |u_n(t)| dt$. Que peut-on en déduire ?
- On pose $S_N(t) = \sum_{n=0}^N u_n(t)$. Démontrer que : $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(t) dt$.
- En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$, puis la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Corrigé de l'exercice 7

1. Pour $t \in]0, 1[$, on a $-t^b \in]-1, 0[\subset]-1, 1[$, donc on peut utiliser le développement en série géométrique :

$$\frac{t^{a-1}}{1+t^b} = t^{a-1} \times \frac{1}{1-(-t^b)} = t^{a-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^b)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t),$$

en posant $u_n(t) = (-1)^n t^{a-1+nb}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, 1[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |u_n| = \int_0^1 t^{a-1+nb} dt = \left[\frac{t^{a+nb}}{a+nb} \right]_0^1 = \frac{1}{a+nb}$, donc $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |u_n|$ diverge, puisque $\frac{1}{a+nb} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1/b}{n}$. On en déduit que le théorème d'intégration terme à terme "à la Fubini" ne s'applique pas ici.

Remarque

Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment ne s'applique pas non plus car la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur le segment $[0, 1]$, étant donné qu'elle ne converge pas simplement (elle diverge grossièrement en $t = 1$).

3. On peut calculer les sommes partielles :

$$\forall (N, t) \in \mathbb{N} \times]0, 1[, \quad S_N(t) = t^{a-1} \sum_{n=0}^N (-t^b)^n = \frac{t^{a-1}}{1+t^b} \times (1 - (-t^b)^{N+1}),$$

et on a la majoration :

$$\forall (N, t) \in \mathbb{N} \times]0, 1[, \quad |S_N(t)| \leq \varphi(t) = \frac{2t^{a-1}}{1+t^b},$$

avec la fonction φ intégrable sur $]0, 1[$ car elle continue, se prolonge continûment en $t = 1$ et vérifie $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{t^{1-a}}$ (avec $1 - a < 1$). De plus, chaque S_N est continue sur $]0, 1[$ et la suite (S_N) converge simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction continue $S : t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ sur $]0, 1[$ (d'après la première question), donc d'après le théorème de convergence dominée S est intégrable sur $]0, 1[$, ainsi que les S_N , et

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \int_0^1 S = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N.$$

4. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 S_N = \sum_{n=0}^N \int_0^1 u_n = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{a+nb},$$

donc en faisant tendre $N \rightarrow +\infty$ et en utilisant la question précédente, on obtient

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{a+nb} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt,$$

ce qui prouve la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{a+nb}$ et l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt.$$

Remarque

On a donc finalement permuté la série et l'intégrale sans utiliser les théorèmes d'intégration terme à terme, mais en utilisant le théorème de convergence dominée avec les sommes partielles.

Application : dans le cas particulier où $(a, b) = (1, 3)$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)(1-t+t^2)}.$$

On décompose en éléments simples : puisque le facteur $1 - t + t^2$ est irréductible sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{\alpha}{1+t} + \frac{\beta t + \gamma}{1-t+t^2},$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

En multipliant par $1+t$ et en évaluant en $t = -1$, on obtient $\alpha = \frac{1}{3}$.

En multipliant par t et en faisant tendre $t \rightarrow +\infty$, on obtient $\alpha + \beta = 0$, donc $\beta = -\frac{1}{3}$.

Enfin, en évaluant en $t = 0$, on obtient $1 = \alpha + \gamma$, donc $\gamma = \frac{2}{3}$.

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+t)(1-t+t^2)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{1-t+t^2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2} \left(\frac{2t-1}{t^2-t+1} \right) + \frac{3/2}{t^2-t+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2} \left(\frac{2t-1}{t^2-t+1} \right) + \frac{2}{\frac{4}{3}(t-\frac{1}{2})^2+1} \right). \end{aligned}$$

En primitivant, on obtient

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{1}{3} \left[\ln(1+t) - \frac{1}{2} \ln(t^2-t+1) + \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

donc finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 8 (**Fonction θ de Jacobi)

On pose $\theta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x}$.

On pose, pour $s \in \mathbb{C}$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$.

1. Montrer que si $\operatorname{Re}(s) > 1$, alors $\zeta(s)$ est défini.
Montrer que si $\operatorname{Re}(s) > 0$, alors $\Gamma(s)$ est défini.
2. Déterminer l'intervalle de définition de la fonction θ , et montrer qu'elle est C^∞ sur cet intervalle.
3. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$, on a : $\int_0^{+\infty} \theta(t) t^{\frac{s}{2}-1} dt = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$.

Corrigé de l'exercice 8

1. Notons $s = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{1}{n^s} \right| = |e^{-(x+iy) \ln(n)}| = |e^{-x \ln(n)} e^{-iy \ln(n)}| = e^{-x \ln(n)} = \frac{1}{n^x},$$

donc la série $\zeta(s)$ converge absolument si $x = \operatorname{Re}(s) > 1$.

En outre, pour tout réel $t > 0$, on obtient de la même façon

$$|e^{-t} t^{s-1}| = e^{-t} t^{x-1},$$

et la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ lorsque $x > 0$, puisqu'elle est continue, elle est équivalente à $\frac{1}{t^{1-x}}$ en 0^+ (avec $1-x < 1$), et elle est négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$. Donc $t \mapsto e^{-t} t^{s-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ lorsque $x = \operatorname{Re}(s) > 0$, ce qui montre que l'intégrale $\Gamma(s)$ est bien définie.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \leq 0$, alors la suite $(e^{-n^2 \pi x})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0, donc la série $\theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x}$ diverge. Si $x > 0$, on a $e^{-n^2 \pi x} = o(1/n^2)$ donc la série $\theta(x)$ converge.

L'intervalle de définition de la fonction θ est donc $]0, +\infty[$.

On utilise ensuite le théorème de dérivation terme à terme itéré pour une série de fonctions.

Les fonctions $u_n : x \mapsto e^{-n^2\pi x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ (car elles le sont sur $\mathbb{R}$), et $\forall (k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $u_n^{(k)} : x \mapsto (-1)^k \pi^k n^{2k} e^{-n^2\pi x}$. De plus, la série $\sum_{n \geq 1} u_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ (vu la majoration $|u_n^{(k)}(x)| \leq \pi^k n^{2k} e^{-n^2\pi a} = o(1/n^2)$), donc on en déduit que $\theta = \sum_{n=1}^\infty u_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall (k, x) \in \mathbb{N} \times]0, +\infty[, \quad \theta^{(k)}(x) = (-1)^k \pi^k \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2k} e^{-n^2\pi x}.$$

3. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) = x > 1$. On a

$$\forall t > 0, \quad \theta(t) t^{\frac{s}{2}-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t),$$

avec $f_n(t) = e^{-n^2\pi t} t^{\frac{s}{2}-1}$.

Les f_n sont des fonctions continues sur $]0, +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto \theta(t) t^{\frac{s}{2}-1}$ qui est bien continue par morceaux (car continue), et on a par changement de variable linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} e^{-n^2\pi t} t^{\frac{s}{2}-1} dt = \frac{1}{(\pi n^2)^{x/2}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{x}{2}-1} du = \frac{\pi^{-x/2} \Gamma(x/2)}{n^x},$$

donc les f_n sont intégrables et on a

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n| = \pi^{-x/2} \Gamma(x/2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} < +\infty.$$

Donc d'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n : t \mapsto \theta(t) t^{\frac{s}{2}-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \theta(t) t^{\frac{s}{2}-1} dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^{-s/2} \Gamma(s/2)}{n^s} = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s).$$

(par les mêmes calculs qu'auparavant, avec le nombre complexe s à la place du réel x).

III Intégrales à paramètre

Exercice 9 (**)

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$.

Corrigé de l'exercice 9

Notons $f(x, t) = \frac{1-t^x}{1-t} = \frac{1-e^{x \ln(t)}}{1-t}$ pour tout $t \in]0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$.

On utilise la version continue du théorème de convergence dominée.

- * Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$ (car continue).
- * Pour tout $t \in]0, 1[$, la fonction $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell(t) = 0$, et la fonction ℓ est continue par morceaux sur $]0, 1[$.
- * Pour tout $t \in]0, 1[$ et pour tout $x \in [0, A]$ (avec $A > 0$), on a

$$|f(x, t)| \leq \varphi_A(t) = \frac{1-e^{A \ln(t)}}{1-t} = \frac{1-t^A}{1-t},$$

et φ_A est intégrable sur $]0, 1[$ car continue, prolongeable par continuité en 0, mais aussi en 1 (faire un DL_1 , on obtient $\varphi_A(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} A$).

On en déduit que $x \mapsto \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (mais aussi en 0) et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt = \int_0^1 \ell(t) dt = 0$ (en fait il y a continuité en 0 de l'intégrale à paramètre).

Exercice 10 ()**

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2} f(0)$.

Corrigé de l'exercice 10

Notons, pour $h > 0$,

$$F(h) = \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx$$

(cette intégrale à paramètre est bien définie car on intègre une fonction continue sur un segment). L'idée est bien sûr d'appliquer la version continue du théorème de convergence dominée lorsque $h \rightarrow 0^+$, mais ça ne marche pas car on ne peut pas dominer $\frac{h}{h^2 + x^2} f(x)$ pour h au voisinage de 0^+ par une fonction intégrable sur $]0, 1[$, vu que

$$\forall x > 0, \quad \sup_{h \in \mathbb{R}^+} \frac{h}{h^2 + x^2} = \frac{1}{2x}$$

(faire une étude de fonction), et on ne sait pas si $x \mapsto \frac{f(x)}{2x}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (c'est faux si $f(0) \neq 0$ d'ailleurs).

Pour $h > 0$ fixé, effectuons d'abord le changement de variable linéaire $x = hu$ pour homogénéiser le dénominateur :

$$F(h) = \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx = \int_0^{1/h} \frac{f(hu)}{1 + u^2} du.$$

On peut ensuite enlever la dépendance en h des bornes de l'intégrale afin de réécrire ceci comme une intégrale à paramètre :

$$F(h) = \int_0^{+\infty} g(h, u) du, \text{ avec } g(h, u) = \begin{cases} \frac{f(hu)}{1 + u^2} & \text{si } 0 \leq u \leq \frac{1}{h} \\ 0 & \text{si } u > \frac{1}{h} \end{cases}.$$

Réessayons maintenant d'appliquer la version continue du théorème de convergence dominée :

* Pour tout $h > 0$, la fonction $u \mapsto g(h, u)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ (car elle est continue sur $[0, 1/h[$, sur $]1/h, +\infty[$ et possède des limites finies à gauche et à droite en $1/h$).

* Pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, $g(h, u) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \ell(u) = \frac{f(0)}{1 + u^2}$ (car pour h assez petit, on a $1/h \geq u$, donc $g(h, u) = \frac{f(hu)}{1 + u^2}$, et $f(hu) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} f(0)$ par continuité de f en 0). La fonction limite ℓ est bien continue par morceaux (car continue) sur $[0, +\infty[$.

* On a la domination :

$$\forall (h, u) \in]0, +\infty[\times [0, +\infty[, \quad |g(h, u)| \leq \varphi(u) = \frac{\|f\|_{\infty, [0, 1]}}{1 + u^2},$$

avec φ intégrable sur $[0, +\infty[$ (c'est un multiple de la dérivée de arctan).

Donc le théorème s'applique et on obtient :

$$F(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \ell(u) du = \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1 + u^2} du = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Exercice 11 ()**

Pour $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \int_0^1 e^{-\frac{x}{t}} dt$.

1. Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $\varphi''(x)$.

Corrigé de l'exercice 11

1. On applique la version $\mathcal{C}^k$ du théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

Posons $f(x, t) = e^{-\frac{x}{t}}$:

- pour tout $t \in]0, 1]$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = \frac{(-1)^k}{t^k} e^{-\frac{x}{t}}.$$

- pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux et on a la domination sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$\forall x \in [a, b], \forall t > 0, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \frac{1}{t^k} e^{-\frac{a}{t}} = \varphi_a(t),$$

avec φ_a intégrable sur $]0, 1]$ car continue et prolongeable par continuité en 0, puisque

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi_a(t) = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^k e^{-ay} = 0.$$

Ces hypothèses impliquent notamment que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ sont intégrables sur $]0, 1]$ pour $j < k$ et la "dernière dérivée" $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment. Donc le théorème s'applique : φ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k , donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

2. Le théorème précédemment appliqué donne également :

$$\forall x > 0, \quad \varphi''(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dt = \int_0^1 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{x}{t}} dt = \left[\frac{1}{x} e^{-\frac{x}{t}} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Exercice 12 ()**

On note (lorsque cette intégrale converge) $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt$.

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(tx) dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(tx) dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. Démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $\varphi'(x)$ et de $\varphi''(x)$ sous la forme d'intégrales, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Calculer la valeur de $\varphi(0)$ et de $\varphi'(0)$.

5. Dédurre des 2 questions précédentes la valeur explicite de $\varphi(x)$.

Corrigé de l'exercice 12

1. Notons $f(x, t) = \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t}$.

Fixons $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x^2}{2}$ (vrai même si $x = 0$ car f est nulle dans ce cas) donc $t \mapsto f(x, t)$ se prolonge continûment en 0.

Enfin, pour $t \geq 1$, on a $|f(x, t)| \leq \frac{2}{t^2} e^{-t} \leq 2e^{-t}$, avec $t \mapsto 2e^{-t}$ intégrable au voisinage de $+\infty$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc $\varphi(x)$ est bien défini.

Remarque

φ est également paire et positive car $f \geq 0$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto e^{-t} \cos(tx)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^+$ et $|e^{-t} \cos(tx)| \leq e^{-t}$ donc $t \mapsto e^{-t} \cos(tx)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, ce qui implique la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t} \cos(tx) dt$. De plus, par continuité de la partie réelle :

$$\int_0^\infty e^{-t} \cos(tx) dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty e^{(ix-1)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - e^{(ix-1)T}}{ix - 1} \right) \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{ix - 1} \right) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

3. On applique la version $\mathcal{C}^2$ du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre :

- Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \cos(tx) e^{-t}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (montré à la question 1.), mais aussi $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ car elle est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable continûment en $t = 0$ (vu que $\frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} x$), et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)$ est continue par morceaux (car continue) sur $]0, +\infty[$.
- On a la domination :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq e^{-t},$$

avec $t \mapsto e^{-t}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et indépendante de x .

On en conclut que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, ainsi que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} dt,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t} dt.$$

4. D'après les expressions précédentes, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

5. D'après la question 2. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t} dt = \frac{1}{1+x^2},$$

donc en intégrant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \varphi'(0) + \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \arctan(t) dt = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

(obtenu avec une IPP).

Exercice 13 (*)

Soit I un intervalle contenant 0 et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en 0, où $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ si $t \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et calculer $g^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Corrigé de l'exercice 13

Le fait que l'intervalle I contienne 0 assure que

$$\forall x \in I, \forall t \in [0, 1], \quad tx \in [0, x] \subset I,$$

et donc $f(tx)$ est bien défini.

1. Fixons $x \in I \setminus \{0\}$. Puisque $f'(tx) = \frac{d}{dt} \left(\frac{f(tx)}{x} \right)$ (avec $t \mapsto \frac{f(tx)}{x}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (car $n \geq 1$), on a

$$\int_0^1 f'(tx) dt = \left[\frac{f(tx)}{x} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{f(x) - f(0)}{x} = g(x),$$

et cela reste vrai pour $x = 0$ car $\int_0^1 f'(0) dt = f'(0) = g(0)$.

2. On applique la version $\mathcal{C}^{n-1}$ du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, en notant

$$g(x) = \int_0^1 h(x, t) dt, \quad h(x, t) = f'(tx).$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I (comme f' , par composition), et $\forall k \in [0, n-1]$, $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) = t^k f^{(k+1)}(tx)$. De plus, toutes ces dérivées sont continues par morceaux par rapport à t et on peut les dominer indépendamment de x sur tout segment de I . En effet, si $x \in [a, b] \subset I$ et si $t \in [0, 1]$, alors $tx \in [0, x] \subset S$ où S est un segment de I qui contient 0 et $[a, b]$, ce qui donne :

$$\left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq t^k \|f^{(k+1)}\|_{\infty, S},$$

et la fonction $t \mapsto t^k \|f^{(k+1)}\|_{\infty, S}$ est intégrable sur le segment $[0, 1]$ car continue.

Ainsi, le théorème s'applique, on conclut que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et

$$\forall k \in [0, n-1], \quad g^{(k)}(0) = \int_0^1 \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(0, t) dt = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(0) dt = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}.$$

Exercice 14 (**Intégrale de Gauss)

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Justifier que cette intégrale converge.

On introduit les fonction f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ et

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

2. Montrer que f et g sont dérivables, et qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = -2f'(x)f(x)$.

3. Montrer qu'on a $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4. En déduire enfin la valeur de I .

Corrigé de l'exercice 14

1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire et négligeable devant $1/t^2$ en $\pm\infty$ donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que l'intégrale $I = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

2. Par le théorème fondamental de l'analyse, $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f' : x \mapsto e^{-x^2}$.

Pour justifier la dérivabilité de g , on applique le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre : en notant $h(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$, on a $g : x \mapsto \int_0^1 h(x, t) dt$. Vérifions alors les hypothèses du théorème :

- pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

- pour tout $x \in [0, 1]$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $[0, 1]$ car continue.
- pour tout $x \in [0, 1]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$
- pour tout segment $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, on a la domination :

$$\forall x \in [-a, a], \quad \forall t \in [0, 1], \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2a,$$

et la fonction constante $t \mapsto 2a$ est intégrable sur $[0, 1]$.

Ainsi, le théorème s'applique, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt.$$

(donc a fortiori pour tout $x \in \mathbb{R}^+$). En faisant le changement de variable $u = xt$ dans cette dernière intégrale (pour $x \neq 0$), on obtient

$$g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2f'(x)f(x),$$

et cela reste vrai pour $x = 0$ car $g'(0) = 0 = -2f'(0)f(0)$ puisque $f(0) = 0$.

3. On applique la version continue du théorème de convergence dominée à l'intégrale $g(x)$:

- pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$;
- pour tout $t \in [0, 1]$, $h(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in [0, 1]$, $|h(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ intégrable sur $[0, 1]$ (car continue).

Donc le théorème s'applique et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 0 dt = 0$.

En outre, $g'(x) = -(f^2)'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ (d'après la question précédente), donc il existe une constante réelle C telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad g(x) = C - f^2(x).$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient $C = g(0) + f^2(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

En faisant tendre $x \rightarrow +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = C = \frac{\pi}{4}$, donc par continuité de la racine

carrée et positivité de f sur $\mathbb{R}^+$, on obtient finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{C} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Enfin, $I = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 15 (**Fonction Gamma d'Euler)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que Γ a pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer : $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
Que vaut $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$?
3. Montrer que Γ est continue.
4. En déduire un équivalent de Γ en 0^+ .
5. Montrer que Γ est C^∞ et calculer ses dérivées successives.
6. Montrer que Γ est convexe.

Corrigé de l'exercice 15

Notons $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)-t}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0, +\infty[$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
De plus, $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$, donc $\int_0^1 f(x, t) dt$ converge si et seulement si $1-x < 1$, c'est-à-dire $x > 0$. Ensuite on a $f(x, t) = o(1/t^2)$, donc $\int_1^{+\infty} f(x, t) dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc finalement, l'intégrale impropre $\Gamma(x)$ converge si et seulement si $x > 0$.

Remarque

Vu que $f(x, t) \geq 0$, on a en fait montré que $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x > 0$.

2. Soit $x > 0$. Par intégration par parties généralisée, on obtient

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x)$$

(ce calcul est valable car $t \mapsto t^x e^{-t}$ possède des limites finies en 0^+ et en $+\infty$).

Par récurrence, on en déduit simplement que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

- * Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ (car continue).
- * Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (donc sur $]0, +\infty[$).
- * Hypothèse de domination sur tout segment : pour tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, on a pour tout $(x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$:

$$|f(x, t)| \leq \begin{cases} e^{(a-1)\ln(t)-t} = t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t < 1 \\ e^{(b-1)\ln(t)-t} = t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases},$$

donc *a fortiori* :

$$|f(x, t)| \leq \varphi_{a,b}(t) = f(a, t) + f(b, t),$$

avec $\varphi_{a,b}$ intégrable sur $]0, +\infty[$ (comme somme de deux fonctions intégrables d'après la question 1.).

Donc d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

4. On utilise la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, valable pour tout $x > 0$. Puisque Γ est continue en 1, on a $\Gamma(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \Gamma(1) = 0! = 1$, donc $x\Gamma(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$, c'est-à-dire $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

5. On utilise le théorème de dérivation itérée des intégrales à paramètre.

- * Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (donc sur $]0, +\infty[$), avec

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in]0, +\infty[^2, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t}.$$

- * Toutes ces dérivées partielles $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$ par rapport à la variable d'intégration t (car continues). On montrera leur intégrabilité par domination au point suivant.

- * Toutes ces dérivées partielles $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ peuvent se dominer localement en x par des fonctions intégrables sur $]0, +\infty[$ (**c'est le point délicat**).

La majoration est différente selon que $t \in]0, 1[$ ou $t \in [1, +\infty[$. Etant donné un segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, on a, pour tout $(k, x, t) \in \mathbb{N} \times [a, b] \times]0, +\infty[$:

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| = |\ln(t)|^k e^{(x-1)\ln(t)-t} \leq \varphi_{k,a,b}(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^k e^{(a-1)\ln(t)-t} & \text{si } t < 1 \\ |\ln(t)|^k e^{(b-1)\ln(t)-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Reste à montrer que la fonction

$$\varphi_{k,a,b} : t \mapsto \begin{cases} |\ln(t)|^k t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t < 1 \\ |\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$. Tout d'abord, elle est continue sur $]0, +\infty[$ (limites identiques en 1^+ et 1^-). Ensuite, on a

$$\varphi_{k,a,b}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} |\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t} = o(1/t^2),$$

ce qui montre que $\varphi_{k,a,b}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Enfin :

$$\varphi_{k,a,b}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} |\ln(t)|^k t^{a-1} = o(1/t^\beta)$$

pour tout réel β tel que $\beta + a - 1 > 0$. En choisissant $\beta \in]1-a, 1[$ (possible car $1-a < 1$, par exemple $\beta = 1-a/2$), cela montre que $\varphi_{k,a,b}$ est intégrable au voisinage de 0^+ .

En définitive, $\varphi_{k,a,b} \in L^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

On en déduit d'après le théorème de dérivation itérée d'une intégrale à paramètre que $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall (x, t) \in]0, +\infty[^2, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t) t^{x-1} e^{-t} dt.$$

6. En particulier $\Gamma'' : x \mapsto \int_0^{+\infty} \ln^2(t) t^{x-1} e^{-t} dt$ est positive donc Γ est convexe.

Exercice 16 (***) Transformée de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On pose, pour $p \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(f) : p \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

(lorsque cette intégrale converge). C'est la **transformée de Laplace** de f .

On note $C(f)$ l'ensemble des $p \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{L}(f)(p)$ converge, et $A(f)$ l'ensemble des $p \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{L}(f)(p)$ converge absolument.

1. Montrer que s'ils ne sont pas vides, $C(f)$ et $A(f)$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ non majorés.
2. Si f est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, montrer que $\mathcal{L}(f)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(f)^{(n)}(p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.
3. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue en 0.
4. Application : calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Corrigé de l'exercice 16

Remarquons que la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$ entraîne celle de $t \mapsto f(t)e^{-pt}$ pour tout réel p .

L'intégrale $\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ est donc une intégrale impropre en $+\infty$.

1. * Soit $p_0 \in A(f)$. Pour tout réel $p > p_0$, on a $p \in A(f)$. Cela vient du fait que

$$\forall t > 0, \forall p > p_0, \quad |f(t)e^{-pt}| \leq |f(t)|e^{-p_0 t},$$

donc la convergence absolue de l'intégrale $\mathcal{L}(f)(p_0)$ entraîne celle de $\mathcal{L}(f)(p)$.

- * Soit maintenant $p_0 \in C(f)$, c'est-à-dire que l'intégrale $\mathcal{L}(f)(p_0)$ converge (pas nécessairement absolument). Montrons que pour tout réel $p > p_0$, on a $p \in C(f)$.

On procède en intégrant par parties : par hypothèse, la primitive $G : x \mapsto \int_0^x f(t)e^{-p_0 t} dt$ possède une limite finie $L \in \mathbb{C}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, donc pour tout réel $x \geq 0$:

$$\int_0^x f(t)e^{-pt} dt = \int_0^x f(t)e^{-p_0 t} e^{(p_0-p)t} dt = \left[G(t)e^{(p_0-p)t} \right]_0^x + (p-p_0) \int_0^x G(t)e^{(p_0-p)t} dt,$$

c'est-à-dire (puisque $G(0) = 0$) :

$$\int_0^x f(t)e^{-pt} dt = G(x)e^{(p_0-p)x} + (p-p_0) \int_0^x G(t)e^{(p_0-p)t} dt.$$

Or, G est bornée sur $\mathbb{R}^+$ (car elle est continue et possède une limite finie en $+\infty$), et $p_0 - p < 0$ donc $G(x)e^{(p_0-p)x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

En outre, l'intégrale $\int_0^{+\infty} G(t)e^{(p_0-p)t} dt$ est absolument convergente donc convergente car

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |G(t)e^{(p_0-p)t}| \leq \|G\|_{\infty, \mathbb{R}^+} e^{(p_0-p)t},$$

et $t \mapsto e^{(p_0-p)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc par somme, $\int_0^x f(t)e^{-pt} dt$ possède une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire $p \in C(f)$.

Ceci montre que $A(f)$ et $C(f)$ sont des intervalles réels non majorés, lorsqu'ils ne sont pas vides.

2. Utilisons le théorème de dérivation itérée d'une intégrale à paramètre.

Notons $h(p, t) = f(t)e^{-pt}$ pour $(p, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

* Pour tout réel $t \geq 0$, la fonction $p \mapsto h(p, t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (donc sur $]0, +\infty[$), et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall (p, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \frac{\partial^n h}{\partial p^n}(p, t) = (-t)^n f(t) e^{-pt}.$$

* Toutes ces dérivées partielles $\frac{\partial^n h}{\partial p^n}$ sont continues par morceaux (car continues) sur $\mathbb{R}^+$ par rapport à t . Elles sont également intégrables sur $\mathbb{R}^+$ comme le montre la domination au point suivant.

* Toutes ces dérivées partielles $\frac{\partial^n h}{\partial p^n}$ sont dominées localement en x par des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^+$ car pour tout réel $a > 0$:

$$\forall (n, p, t) \in \mathbb{N} \times [a, +\infty[\times \mathbb{R}^+, \quad \left| \frac{\partial^n h}{\partial p^n}(p, t) \right| = t^n |f(t)| e^{-pt} \leq \|f\|_{\infty, \mathbb{R}^+} t^n e^{-at} = \varphi_{n,a}(t),$$

(puisque f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par hypothèse) et la fonction $\varphi_{n,a}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$).

On en déduit que l'intégrale à paramètre $\mathcal{L}(f)$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times]0, +\infty[$:

$$\mathcal{L}(f)^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-pt} dt = \frac{(-1)^n}{p^{n+1}} \int_0^{+\infty} f(y/p) y^n e^{-y} dy$$

(par changement de variable linéaire), donc

$$\left| \mathcal{L}(f)^{(n)}(p) \right| \leq \frac{\|f\|_{\infty, \mathbb{R}^+}}{p^{n+1}} \underbrace{\int_0^{+\infty} y^n e^{-y} dy}_{=\Gamma(n+1)} = \frac{n! \|f\|_{\infty, \mathbb{R}^+}}{p^{n+1}} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

(l'intégrale $\Gamma(n+1)$ se calcule facilement par récurrence).

3. Ici, on suppose que $0 \in C(f)$, donc d'après la question 1., l'intégrale $\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ converge pour tout réel $p \geq 0$.

Notons $F : x \mapsto \int_0^x f$ la primitive de f nulle en 0. Par hypothèse de convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$, il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Montrons que $\mathcal{L}(f)(p)$ tend vers $\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f = \ell$ lorsque $p \rightarrow 0^+$.

Pour tout réel $p > 0$, on a en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(f)(p) - \mathcal{L}(f)(0)| &= \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt - \int_0^{+\infty} f(t) dt \right| = \left| \underbrace{[F(t) e^{-pt}]_0^{+\infty}}_{=0} + p \int_0^{+\infty} F(t) e^{-pt} dt - \ell \right| \\ &= \left| p \int_0^{+\infty} F(t) e^{-pt} dt - \underbrace{\ell \int_0^{+\infty} p e^{-pt} dt}_{=1} \right| \leq p \int_0^{+\infty} |F(t) - \ell| e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

(cette dernière intégrale converge bien car $F - \ell$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, puisque continue et de limite nulle en $+\infty$). Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un réel $A > 0$ tel que

$$t \geq A \implies |F(t) - \ell| \leq \varepsilon.$$

En découpant l'intégrale et en notant $M = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |F(t) - \ell|$, on a donc, pour tout réel $p > 0$:

$$|\mathcal{L}(f)(p) - \mathcal{L}(f)(0)| \leq p \int_0^A \underbrace{|F(t) - \ell|}_{\leq M} e^{-pt} dt + p \int_A^{+\infty} \underbrace{|F(t) - \ell|}_{\leq \varepsilon} e^{-pt} dt$$

$$\leq pM \int_0^A \underbrace{e^{-pt}}_{\leq 1} dt + \varepsilon \int_A^{+\infty} pe^{-pt} dt \leq pMA + \varepsilon \underbrace{\int_0^{+\infty} pe^{-pt} dt}_{=1} = pMA + \varepsilon.$$

Il reste à faire tendre $p \rightarrow 0^+$: puisque $pMA \xrightarrow{p \rightarrow 0^+} 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < p < \delta \implies pMA \leq \varepsilon \implies |\mathcal{L}(f)(p) - \mathcal{L}(f)(0)| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci montre bien que $\mathcal{L}(f)(p) \xrightarrow{p \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(0)$, et donc $\mathcal{L}(f)$ est continue en 0.

4. On sait déjà que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge (en procédant par IPP, voir les autres exercices). D'après ce qui précède, I est donc la limite lorsque $p \rightarrow 0^+$ de la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-pt} dt,$$

définie pour tout réel $p > 0$. L'idée est de calculer explicitement cette intégrale à paramètre, en passant par sa dérivée. D'après la question 2., $\mathcal{L}(f)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et en dérivant sous le signe intégral, on a

$$\mathcal{L}(f)'(p) = - \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-pt} dt = -\operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-p)t} dt \right) = -\operatorname{Im} \left(\frac{1}{i-p} \right) = -\frac{1}{1+p^2}.$$

Donc en primitivant, on en déduit qu'il existe une constante réelle K telle que

$$\forall p > 0, \quad \mathcal{L}(f)(p) = K - \arctan(p).$$

En outre, on sait (toujours d'après la question 2.), que $\mathcal{L}(f)$ possède une limite nulle en $+\infty$, donc $K = \frac{\pi}{2}$ et finalement l'intégrale cherchée vaut :

$$I = \lim_{p \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(p) \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 17 (**Transformée de Fourier)

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, c'est-à-dire pour f continue par morceaux et intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on définit sa **transformée de Fourier** :

$$\hat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt.$$

1. Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\hat{f}$ est de classe C^∞ , et donner l'expression de ses dérivées successives.
3. En dérivant une fois, en déduire la transformée de Fourier de la fonction $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Corrigé de l'exercice 17

1. Si $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est bien définie car pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (puisque continue par morceaux comme f et $|f(t)e^{-ixt}| = |f(t)|$ intégrable). De plus, la fonction $\hat{f}$ est bornée puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f|$. L'application $f \mapsto \hat{f}$ est donc bien définie de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Enfin, cette application est linéaire par linéarité de l'intégrale sur $\mathbb{R}$.
2. On applique le théorème de dérivation $\mathcal{C}^k$ des intégrales à paramètres, en posant

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad g(x, t) = f(t) e^{-ixt}.$$

Pour tout réel t , la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) = (-it)^k f(t) e^{-ixt}.$$

Toutes ces dérivées sont continues par morceaux par rapport à t et dominées indépendamment de x par des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, puisque

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) \right| = t^k |f(t)|.$$

Ainsi, la fonction $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} (-it)^k f(t) e^{-ixt} dt.$$

3. La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ainsi que $t \mapsto t^k f(t)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (elles sont continues et négligeables devant $1/t^2$ en $\pm\infty$).

Donc (d'après la question précédente) $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}'(x) = -i \int_{\mathbb{R}} t e^{-t^2/2} e^{-ixt} dt.$$

En faisant une IPP généralisée, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}'(x) = \left[i e^{-t^2/2} e^{-ixt} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} i(-ix) e^{-t^2/2} e^{-ixt} dt = -x \hat{f}(x).$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x) = \hat{f}(0) e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2},$$

puisque d'après l'exercice 14 :

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{2} \sqrt{\pi}.$$

Exercice 18 (***)

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2} \sqrt{t^2+x^2}}$.

- Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Montrer que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.
- On sait que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note argsh sa réciproque. Déterminer une expression (à l'aide d'un logarithme) de argsh .
 - Calculer argsh' .
 - En déduire, pour $\alpha > 0$ et $x > 0$, la valeur de $I_\alpha(x) = \int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{t^2+x^2}}$.
 - Calculer un équivalent de $I_\alpha(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.
- En déduire un équivalent de F en 0.
- Grâce à un changement de variable, calculer un équivalent de F en $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 18

- On montre facilement (avec les technique de comparaison habituelles) que pour tout $x > 0$, $t \mapsto \dots$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Ainsi, $F(x)$ est bien défini dès que $x > 0$.
- Idée : on constate que $\frac{1}{\sqrt{1+t^2} \sqrt{t^2+x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ell(t) = \frac{1}{t} \sqrt{1+t^2}$ mais ℓ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car équivalente à $\frac{1}{t}$ en 0. **Il est donc impossible d'appliquer le théorème de convergence dominée.**

Mais cela donne aussi l'idée que si $F(x)$ a une limite en 0, ce doit être $+\infty$.

On minore donc $F(x)$ par une intégrale à laquelle on peut appliquer le théorème de convergence dominée (il faut donc enlever un voisinage de 0) tout en expliquant qu'on peut choisir une telle

intégrale aussi grande que l'on veut. Pour faire tout cela proprement, il est nécessaire de revenir à la définition de la limite.

Soit donc $A > 0$. Comme ℓ est positive, sa non intégrabilité signifie que $\int_x^{+\infty} \ell(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$.

Par conséquent il existe $a > 0$ tel que $\int_a^{+\infty} \ell \geq 2A$.

On vérifie aisément que, par convergence dominée, on a $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_a^{+\infty} \ell(t)dt$.
Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0, \eta], \int_a^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} \geq \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \ell(t)dt.$$

Comme la fonction intégrée est positive, on a alors :

$$\forall x \in]0, \eta], F(x) \geq \int_a^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}} \geq \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \ell(t)dt \geq \frac{1}{2} \times 2A = A,$$

ce qui prouve que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$.

3. (a) Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout $sh(x) = y$, i.e. $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$, avec le changement de variable $X = e^x$.
On obtient $Argsh(y) = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.
- (b) Avec $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$, on trouve $Argsh'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.
- (c) On obtient $I_\alpha(x) = Argsh\left(\frac{\alpha}{x}\right) = \ln(\alpha + \sqrt{x^2 + \alpha^2}) - \ln(x)$.
- (d) D'où $I_\alpha(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$.

4. Question délicate!

Visiblement il s'agit d'utiliser ce qui précède. Fait intéressant : l'équivalent en 0 de $I_\alpha(x)$ ne dépend pas de α . On pourra donc le prendre de manière à nous arranger.

Pour $\alpha > 0$, on découpe donc : $F(x) = G_\alpha(x) + H_\alpha(x)$, où on note $G_\alpha(x) = \int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}}$

et $H_\alpha(x) = \int_\alpha^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}}$.

On a $0 \leq H_\alpha(x) \leq \int_\alpha^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2}\sqrt{t^2}} = \int_\alpha^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\alpha}$.

et, pour $t \in]0, \alpha]$, $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq 1$, ce qui permet d'encadrer :

$$\frac{I_\alpha(x)}{\sqrt{1+\alpha^2}} \leq G_\alpha(x) \leq I_\alpha(x).$$

On en déduit par somme

$$\forall \alpha > 0, \forall x > 0, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} I_\alpha(x) \leq F(x) \leq I_\alpha(x) + \frac{1}{\alpha}.$$

On essaie alors, grâce à ces encadrements, de prouver que $\frac{F(x)}{-\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. On ne peut le faire proprement qu'en revenant à la définition "en ε " de la limite : on fixe $\varepsilon \in]0, 1[$.

Puisque $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 1$ (en croissant), il existe $\alpha_0 > 0$ tel que

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_0^2}} \leq 1.$$

On reprend alors l'encadrement précédent de $F(x)$ avec $\alpha = \alpha_0$:

$$\forall x > 0, \quad (1 - \varepsilon) I_{\alpha_0}(x) \leq \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_0^2}} I_{\alpha_0}(x) \leq F(x) \leq I_{\alpha_0}(x) + \frac{1}{\alpha_0}.$$

Utilisons maintenant l'équivalence $I_{\alpha_0}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x) = |\ln(x)|$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < x < \delta \implies (1 - \varepsilon)|\ln(x)| \leq I_{\alpha_0}(x) \leq (1 + \varepsilon)|\ln(x)|,$$

donc (en combinant cet encadrement avec le précédent) :

$$\begin{aligned} 0 < x < \delta &\implies (1 - \varepsilon)^2 |\ln(x)| \leq F(x) \leq (1 + \varepsilon)|\ln(x)| + \frac{1}{\alpha_0} \\ &\implies 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \leq \frac{F(x)}{|\ln(x)|} \leq 1 + \varepsilon + \frac{1}{\alpha_0 |\ln(x)|}. \end{aligned}$$

Enfin, $\frac{1}{\alpha_0 |\ln(x)|} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, donc il existe $\delta' \in]0, \delta[$ tel que

$$0 < x < \delta' \implies \frac{1}{\alpha_0 |\ln(x)|} \leq \varepsilon \implies 1 - 2\varepsilon \leq \frac{F(x)}{|\ln(x)|} \leq 1 + 2\varepsilon,$$

ce qui prouve bien que $\frac{F(x)}{|\ln(x)|} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$, et donc $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

5. Tester $t = ux$. On obtient $F(x) = \frac{1}{x} F\left(\frac{1}{x}\right)$ et comme $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, l'équivalent de la question 4 donne :

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \left(-\ln\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

Exercice 19 (***)Equivalent d'intégrale de type affine)

1. Déterminer un équivalent de $\Phi(t) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x+x^2)^t}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Pour cela, on utilisera une approximation affine de $x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$ en 0 (DL d'ordre 1) et un découpage d'intégrale adéquat.

2. Généralisation : soit $f \in \mathcal{C}^0([0; a]; \mathbb{R})$ avec $a > 0$ réel.

On suppose que $f(0) = 1$, f est dérivable en 0 avec $f'(0) = k < 0$, et $\forall x \in]0; a]$, $|f(x)| < 1$.

Déterminer un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$ de la suite définie par $I_n = \int_0^a f(x)^n dx$.

Corrigé de l'exercice 19

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$ est continue et strictement positive sur $[0, 1]$, et vérifie $f(x) = 1 - x + o(x)$ au voisinage de 0.

Conjeturons un équivalent de $\Phi(t) = \int_0^1 f(x)^t dx$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Si $\alpha > 0$ est voisin de 0, alors

$$\int_0^\alpha f(x)^t dx \simeq \int_0^\alpha (1-x)^t dx = \frac{1}{t+1} - \frac{(1-\alpha)^{t+1}}{t+1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}.$$

De plus :

$$\int_\alpha^1 f(x)^t dx \leq \int_\alpha^1 \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^t dx = \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^t (1-\alpha) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t}\right),$$

donc il semble que $\Phi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$.

Prouvons cela rigoureusement : fixons un réel $\varepsilon > 0$. Vu que $f(x) = 1 - x + o(x)$ au voisinage de 0, il existe un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$x \in [0, \alpha] \implies |f(x) - 1 + x| \leq \varepsilon x \implies 1 - (1 + \varepsilon)x \leq f(x) \leq 1 - (1 - \varepsilon)x.$$

Quitte à diminuer α , on a $1 - (1 + \varepsilon)\alpha > 0$, et donc pour tout réel $t > 0$:

$$x \in [0, \alpha] \implies 0 \leq (1 - (1 + \varepsilon)x)^t \leq f(x)^t \leq (1 - (1 - \varepsilon)x)^t,$$

ce qui entraîne par croissance de l'intégrale :

$$\forall t > 0, \quad \frac{1 - (1 - (1 + \varepsilon)\alpha)^{t+1}}{(1 + \varepsilon)(t + 1)} \leq \int_0^\alpha f(x)^t dx \leq \frac{1 - (1 - (1 - \varepsilon)\alpha)^{t+1}}{(1 - \varepsilon)(t + 1)}.$$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, le membre de gauche est équivalent à $\frac{1}{1+\varepsilon} \times \frac{1}{t}$, alors que celui de droite est équivalent à $\frac{1}{1-\varepsilon} \times \frac{1}{t}$. Donc il existe $T_0 > 0$ tel que

$$t \geq T_0 \implies \frac{1}{1+\varepsilon} - \varepsilon \leq t \int_0^\alpha f(x)^t dx \leq \frac{1}{1-\varepsilon} + \varepsilon.$$

En outre,

$$0 \leq t \int_\alpha^1 f(x)^t dx \leq t \left(\frac{1}{1+\alpha} \right)^t (1-\alpha) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

donc il existe $T_1 > 0$ tel que

$$t \geq T_1 \implies 0 \leq t \int_\alpha^1 f(x)^t dx \leq \varepsilon.$$

Ainsi

$$t \geq \max(T_0, T_1) \implies \frac{1}{1+\varepsilon} - \varepsilon \leq t\Phi(t) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} + 2\varepsilon.$$

Enfin, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+\varepsilon} - \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\varepsilon} + 2\varepsilon = 1$, donc pour tout réel $\varepsilon' > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \implies \left(1 - \varepsilon' \leq \frac{1}{1+\varepsilon} - \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-\varepsilon} + 2\varepsilon \leq 1 + \varepsilon' \right).$$

On a donc prouvé que pour tout réel $\varepsilon' > 0$, il existe $T_2 > 0$ tel que

$$t \geq T_2 \implies 1 - \varepsilon' \leq t\Phi(t) \leq 1 + \varepsilon',$$

et donc $t\Phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$, c'est-à-dire $\Phi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$.

2. On procède de même à partir du DL :

$$f(x) = 1 + kx + o(x)_{x \rightarrow 0^+}.$$

Etant donné un réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $0 < \alpha < a$ tel que

$$x \in [0, \alpha] \implies \int_0^\alpha (1 + (k - \varepsilon)x)^n dx \leq \int_0^\alpha f(x)^n dx \leq \int_0^\alpha (1 + (k + \varepsilon)x)^n dx,$$

c'est-à-dire

$$x \in [0, \alpha] \implies \frac{-1 + (1 + (k - \varepsilon)\alpha)^{n+1}}{(k - \varepsilon)(n + 1)} \leq \int_0^\alpha f(x)^n dx \leq \frac{-1 + (1 + (k + \varepsilon)\alpha)^{n+1}}{(k + \varepsilon)(n + 1)}.$$

Puisque $k < 0$, on a $0 \leq 1 + (k - \varepsilon)\alpha \leq 1 + (k + \varepsilon)\alpha < 1$ quitte à diminuer α , et donc

$$\begin{aligned} \frac{-1 + (1 + (k - \varepsilon)\alpha)^{n+1}}{(k - \varepsilon)(n + 1)} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{(k - \varepsilon)n}, \\ \frac{-1 + (1 + (k + \varepsilon)\alpha)^{n+1}}{(k + \varepsilon)(n + 1)} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{(k + \varepsilon)n}. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n \geq n_0 \implies -\frac{1}{k - \varepsilon} - \varepsilon \leq n \int_0^\alpha f(x)^n dx \leq -\frac{1}{k + \varepsilon} + \varepsilon.$$

En outre,

$$\left| \int_\alpha^a f(x)^n dx \right| \leq \|f\|_{\infty, [\alpha, a]}^n (a - \alpha),$$

avec $\|f\|_{\infty, [\alpha, a]} < 1$ (par hypothèse sur f , car ce sup est atteint en un point de $[\alpha, a] \subset]0, a]$ par continuité de f sur le segment $[\alpha, a]$), donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n \geq n_1 \implies \left| n \int_{\alpha}^a f(x)^n dx \right| \leq \varepsilon.$$

Donc en sommant les deux intégrales :

$$n \geq \max(n_0, n_1) \implies -\frac{1}{k - \varepsilon} - 2\varepsilon \leq nI_n \leq -\frac{1}{k + \varepsilon} + 2\varepsilon,$$

et on conclut de la même façon qu'à la question précédente que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = -\frac{1}{k},$$

c'est-à-dire $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{f'(0)n}$.