Exercices du CH12 : Interversion limite-intégrale

Exercices de la banque INP à étudier : ex 19 (utilisation du th. d'intégration terme à terme), 25, 26, 27 (utilisation du th. de convergence dominée), 29 (fonction Gamma), 30 (intégrale à paramètre et équa. diff.), 49 (utilisation du th. d'intégration terme à terme), 50 (continuité et équivalent d'une intégrale à paramètre).

I Suites d'intégrales

Exercice 1 (*)
Déterminer les limites pour $n \to +\infty$ des suites d'intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \sqrt{\pi - x}\sin^n(x)dx, \quad J_n = \int_0^{\sqrt[n]{n}} \sqrt{1+x^n}dx.$$

On pourra découper judicieusement J_n...

Exercice 2 (De la forme $f(t^n)$)**

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Étudier la limite de $\int_0^1 f(t^n)dt$ pour $n \to +\infty$.
2. Chercher un équivalent pour $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt$.

Exercice 3 (*Lemme de Riemann-Lebesgue)**
Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue : pour $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{K})$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{int}dt = 0$

Exercice 4 (*Expression intégrale de la constante d'Euler)**

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)e^{-x}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
2. Grâce au théorème de convergence dominée, démontrer la relation :
$$\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)dx.$$
3. Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(x)e^{-x}dx = -\gamma$, où $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$ est la constante d'Euler.

II Permutations séries-intégrales

Exercice 5 (*)
Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}dx$ pour $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, puis, en appliquant judicieusement le théorème d'intégration terme à terme, montrer qu'on a : $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}$.

Exercice 6 (Développement en série de $\ln(2)$)**

1. Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

Exercice 7 (Sans le théorème d'intégration terme à terme...)**
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. Pour $t \in]0\,;1[$, écrire $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ comme somme d'une série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(t)$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^1 |u_n(t)|dt$. Que peut-on en déduire ?
3. On pose $S_N(t) = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n(t)$. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt = \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(t)dt$.
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt$, puis la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 8 (Fonction θ de Jacobi)**
On pose $\theta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi x}$.
On pose, pour $s \in \mathbb{C}$, $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^s}$ et $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$.

1. Montrer que si $\mathrm{Re}(s) > 1$, alors $\zeta(s)$ est défini.
   Montrer que si $\mathrm{Re}(s) > 0$, alors $\Gamma(s)$ est défini.
2. Déterminer l'intervalle de définition de la fonction θ, et montrer qu'elle est C^∞ sur cet intervalle.
3. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\theta(t)t^{\frac{s}{2}-1}dt = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$.

III Intégrales à paramètre

Exercice 9 (**)
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}dt$.

Exercice 10 (**)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}f(0)$.

Exercice 11 (**)
Pour $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x}{t}}\,dt$.

1. Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $\varphi''(x)$.

Exercice 12 (**)
On note (lorsque cette intégrale converge) $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(tx)}{t^2}e^{-t}\,dt$.

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(tx)\,dt$ converge et que
   $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(tx)\,dt = \frac{1}{1+x^2}$.
3. Démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $\varphi'(x)$ et de $\varphi''(x)$ sous la forme d'intégrales, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Calculer la valeur de $\varphi(0)$ et de $\varphi'(0)$.
5. Déduire des 2 questions précédentes la valeur explicite de $\varphi(x)$.

Exercice 13 (*)
Soit I un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n s'annulant en 0, où $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ par $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ si $t \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)dt$.
2. Montrer que g est de classe C^{n-1} et calculer $g^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Exercice 14 (Intégrale de Gauss)**
Le but de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Justifier que cette intégrale converge.
   On introduit les fonction f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.
2. Montrer que f et g sont dérivables, et qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = -2f'(x)f(x)$.
3. Montrer qu'on a $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
4. En déduire enfin la valeur de I.

Exercice 15 (Fonction Gamma d'Euler)**
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que Γ a pour domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer : $\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   Que vaut $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$?
3. Montrer que Γ est continue.
4. En déduire un équivalent de Γ en 0^+.
5. Montrer que Γ est C^∞ et calculer ses dérivées successives.
6. Montrer que Γ est convexe.

Exercice 16 (*Transformée de Laplace)**
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On pose, pour $p \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(f) : p \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

(lorsque cette intégrale converge). C'est la **transformée de Laplace** de f.
On note $C(f)$ l'ensemble des $p \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{L}(f)(p)$ converge, et $A(f)$ l'ensemble des $p \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{L}(f)(p)$ converge absolument.

1. Montrer que s'ils ne sont pas vides, $C(f)$ et $A(f)$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ non majorés.
2. Si f est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, montrer que $\mathcal{L}(f)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(f)^{(n)}(p) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue en 0.
4. Application : calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice 17 (Transformée de Fourier)**
Pour $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, c'est-à-dire pour f continue par morceaux et intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on définit sa **transformée de Fourier** :

$$\hat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt.$$

1. Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\hat{f}$ est de classe C^∞, et donner l'expression de ses dérivées successives.
3. En dérivant une fois, en déduire la transformée de Fourier de la fonction $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Exercice 18 (***)
Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+x^2}}$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $F(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
3. (a) On sait que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note argsh sa réciproque. Déterminer une expression (à l'aide d'un logarithme) de argsh.
   (b) Calculer argsh'.
   (c) En déduire, pour $\alpha > 0$ et $x > 0$, la valeur de $I_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{t^2+x^2}}$.
   (d) Calculer un équivalent de $I_\alpha(x)$ lorsque $x \to 0$.
4. En déduire un équivalent de F en 0.
5. Grâce à un changement de variable, calculer un équivalent de F en $+\infty$.

Exercice 19 (*Equivalent d'intégrale de type affine)**

1. Déterminer un équivalent de $\Phi(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x+x^2)^t}$ lorsque $t \to +\infty$.
   Pour cela, on utilisera une approximation affine de $x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$ en 0 (DL d'ordre 1) et un découpage d'intégrale adéquat.
2. Généralisation : soit $f \in \mathcal{C}^0([0;a];\mathbb{R})$ avec $a > 0$ réel.
   On suppose que $f(0) = 1$, f est dérivable en 0 avec $f'(0) = k < 0$, et $\forall x \in]0;a],\ |f(x)| < 1$.
   Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^a f(x)^n dx$.