Exercices du CH11 : Séries de fonctions

Exercices de la banque INP à étudier : ex 8 (utilisation du CSSA pour montrer la CVU), 14 (CVU et série d'intégrales), 16 (dérivabilité d'une série de fonctions), 17 (lien entre CVU série et CVU suite), 53 (continuité et limite en $+\infty$ d'une série de fonctions).

I Exemples concrets

Exercice 1 (**)
Étudier (convergences simple, absolue, normale, uniforme, éventuellement en restreignant le domaine - à des segments par exemple) les séries de fonctions $\sum\limits_n f_n$ ayant pour terme général :

$(a)\quad f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{nx^2}{1+n^3x} \end{array}\right., \ n \geq 0, \qquad (b)\quad f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{n^3+x^3} \end{array}\right., \ n \geq 1,$

$(c)\quad f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{-nx} \end{array}\right., \ n \geq 1, \qquad (d)\quad f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right) \end{array}\right., \ n \geq 1,$

$(e)\quad f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{n} \text{ si } n < x < n+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right. \end{array}\right., \ n \geq 1, \qquad (f)\quad f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^n}{1+nx} \end{array}\right., \ n \geq 0.$

Corrigé de l'exercice 1

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

Exercice 2 (*)
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On définit lors la fonction S sur $\mathbb{R}_+^*$ par $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n+n^2x}$.
   (a) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$.
   (b) Montrer que, pour tout $a > 0$, la fonction S est continue sur $[a, +\infty[$.
3. On rappelle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En examinant $xS(x)$, montrer qu'on a $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x}$.

Corrigé de l'exercice 2

1.
2.
3.

Exercice 3 (**)

Sur $I =]-1, +\infty[$, on pose $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

1. Montrer que S est définie et continue sur I.
2. Étudier la monotonie de S.
3. Calculer $S(x+1) - S(x)$.
4. Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+.
5. Établir $\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
6. En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 3

1.
2.
3.

Exercice 4 (**)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$.

1. Montrer que $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Établir qu'on a : $\forall x > 0$, $S'(x) = -\frac{1}{1+e^{-x}} + S(x)$. En déduire que S est C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
4. Quelle est la nature de la série $\sum u_n'(0)$? Commentaire ?

Corrigé de l'exercice 4

1.
2.
3.

Exercice 5 (*)

On note, pour $n \geq 1$, $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(n+x)}{n^2} \end{array} \right.$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$. On note S sa somme.
2. Montrer que S est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ et exprimer, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $S'(x)$ et $S''(x)$ sous forme de sommes de séries.
3. En déduire que S est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et que S est concave sur $[0, +\infty[$.
4. Retrouver, d'une façon plus simple, que S est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 5

1.
2.
3.

Exercice 6 (**)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de $\sum f_n$. On note S la somme de cette série de fonctions sur son domaine de convergence.
2. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer qu'on a $S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{x}$.

Corrigé de l'exercice 6

1.
2.
3.

Exercice 7 (*Un calcul de somme)

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ est bien définie, et en calculer la valeur.

Corrigé de l'exercice 7

1.
2.
3.

Exercice 8 (**)

1. Prouver la convergence simple de $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sur $]1\,;+\infty[$, où $f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \end{array}\right.$.

   On note $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que S est continue sur $]1\,;+\infty[$.
3. Montrer que $S(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

Corrigé de l'exercice 8

1.
2.
3.

Exercice 9 (*Oral Mines-Telecom)**

On considère la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, qu'on notera D_f.
2. Montrer que f est continue sur D_f.
3. Déterminer la limite, puis un équivalent de f en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent de f en 0^+.

Corrigé de l'exercice 9

1.
2.
3.

II Exercices théoriques

Exercice 10 (*Série trigonométrique)
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum_{n\geq 1} n^2 a_n^2$ converge. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ définie par $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a_n \sin(nx) \end{array} \right.$ converge normalement.

Corrigé de l'exercice 10

1.
2.
3.

Exercice 11 (*Conditions pour différents modes de convergence)**
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle décroissante et à valeurs positives.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, on pose : $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
2. Montrer que la convergence est normale sur $[0,1]$ ssi la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.
3. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$ ssi la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Corrigé de l'exercice 11

1.
2.
3.

III Utilisations de la convergence uniforme

Exercice 12 (*Solution d'une équation différentielle)
On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$.
3. Trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par f.

Corrigé de l'exercice 12

1.
2.
3.

Exercice 13 (Une sorte de point fixe)**
Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^x f_n(t)dt.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue f vérifiant :
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = g(x) + \int_0^x f(t)dt.$$

Corrigé de l'exercice 13

1.
2.
3.

Exercice 14 (Calcul d'une intégrale)**
Soit $a \in]-1\,;1[$.

1. On note $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n \cos(nx)}{n}$, où x est une variable réelle.
   Montrer que S est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $S'(x)$ en tant que somme d'une série.
2. On note $I = \displaystyle\int_0^\pi \ln\big(a^2 - 2a\cos(x) + 1\big)dx$. Montrer qu'on a $I = -2\displaystyle\int_0^\pi S(x)dx$.
3. En déduire la valeur de I.

Corrigé de l'exercice 14

1.
2.
3.

IV Autour de la fonction zeta de Riemann

Exercice 15 (Dérivabilité et comportement asymptotique de la fonction ζ)**
On rappelle qu'on appelle *fonction zeta de Riemann* la fonction $\zeta : \begin{cases}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{cases}$.

1. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer ses dérivées successives.
2. En utilisant à chaque fois une comparaison série-intégrale, établir les développements asymptotiques suivants :
   (a) $\zeta(x) = 1 + \dfrac{1}{2^x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{2^x}\right)$.
   (b) $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + \underset{x\to1^+}{o}(1)$, où γ désigne la constante d'Euler.

Corrigé de l'exercice 15

Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x\ln(n)}$ pour tout entier $n \geq 1$. Ainsi, on a $\zeta = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.

1. On utilise la version itérée du théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions :
   - Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, avec $f_n^{(k)} : x \mapsto (-1)^k \dfrac{\ln^k(n)}{n^x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   - Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n\geq1} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$.
     En effet, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout réel $a > 1$, nous avons :
     $$\forall n \geq 1,\ \forall x \in [a,+\infty[, \qquad |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{\ln^k(n)}{n^a},$$
     avec $\sum\limits_{n\geq1} \frac{\ln^k(n)}{n^a} < +\infty$ puisque $\frac{\ln^k(n)}{n^a} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}\right)$ avec $\frac{a+1}{2} > 1$. Donc $\sum\limits_{n\geq1} \|f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,+\infty[} < +\infty$, ce qui montre la convergence normale de la série $\sum\limits_{n\geq1} f_n^{(k)}$ sur tout intervalle $[a,+\infty[$, donc la convergence uniforme annoncée.

On conclut que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$, et que

$$\forall (k,x) \in \mathbb{N}\times]1,+\infty[, \qquad \zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^k(n)}{n^x}.$$

2. (a) En fait, on peut obtenir un développement asymptotique à tout ordre. On a :

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots + \frac{1}{n^x} + \frac{1}{(n+1)^x} + \cdots ,$$

donc chaque terme $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ est négligeable devant les termes précédents. On conjecture donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \zeta(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^x}\right).$$

Fixons $(n,x) \in \mathbb{N}^*\times]1,+\infty[$ et considérons le reste

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}.$$

Par comparaison série-intégrale (basée sur la décroissance de la fonction continue $g_x : t \mapsto \frac{1}{t^x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$), on a

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^x},$$

donc en sommant ces inégalités, on obtient l'encadrement :

$$\frac{(n+1)^{1-x}}{x-1} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq R_n(x) \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{n^{1-x}}{x-1},$$

qui prouve bien que $R_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^x}\right)$.

Finalement, on a donc le développement asymptotique suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \cdots + \frac{1}{n^x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^x}\right).$$

(b)
- **Pour l'équivalent en 1^+** : Fixons $x > 1$. Par comparaison série-intégrale, à partir des inégalités :

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^x},$$

on obtient l'encadrement :

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$$

c'est-à-dire

$$\frac{2^{1-x}}{x-1} \leq \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1},$$

ce qui prouve que $\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

- **Pour le développement asymptotique** : on étudie la différence $\zeta(x) - \frac{1}{x-1}$, encore par comparaison série-intégrale. Pour $x > 1$ fixé :

$$\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^x} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \right).$$

En posant $u_k(x) = \dfrac{1}{k^x} - \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x}$, on a donc

$$\forall x > 1, \qquad \zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x),$$

et on va étudier cette série de fonctions au voisinage de 1^+.

* Tout d'abord, chaque fonction u_k possède une limite finie lorsque $x \to 1^+$, puisque

$$\begin{aligned} u_k(x) &= \frac{1}{k^x} - \frac{(k+1)^{1-x} - k^{1-x}}{1-x} = e^{-x\ln(k)} + \frac{1}{x-1}\left(e^{(1-x)\ln(k+1)} - e^{(1-x)\ln(k)}\right) \\ &= \frac{1}{k} + \underset{x\to 1^+}{o(1)} + \frac{1}{x-1}\left(1 + (1-x)\ln(k+1) - 1 - (1-x)\ln(k) + \underset{x\to 1^+}{o(x-1)}\right) \\ &= \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) + \underset{x\to 1^+}{o(1)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $u_k(x) \underset{x\to 1^+}{\to} \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$.

* La série $\sum u_k$ converge uniformément au voisinage de 1^+ car en étudiant les restes :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^x} - \int_k^{k+1}\frac{dt}{t^x}\right),$$

on dispose de l'encadrement :

$$\forall (x,n) \in]1,+\infty[\times\mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq R_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}\right) = \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{n+1},$$

donc $\|R_n\|_{\infty,]1,+\infty[} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, ce qui montre la convergence uniforme des restes vers 0, et donc la convergence uniforme de la série $\sum u_n$.

D'après le théorème de la double-limite, on a donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \underset{x\to 1^+}{\to} S = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right).$$

Enfin, en utilisant le fait que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o(1)},$$

on obtient

$$S = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \gamma.$$

Donc finalement :

$$\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \gamma + \underset{x\to 1^+}{o(1)},$$

c'est-à-dire

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + \underset{x\to 1^+}{o(1)}.$$

Exercice 16 (*Un prolongement complexe de ζ)

On définit, pour $n \geq 1$, $f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{n^z} \end{array}\right.$, où l'on rappelle que $n^z = e^{z\ln(n)}$.

On note, lorsque la série est convergente, $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$.

Montrer que la fonction ζ est définie et continue sur $H = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

Corrigé de l'exercice 16

1.

2.
3.

Exercice 17 (*Lien entre ζ et les nombres premiers)**
Pour tout réel $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant. Montrer alors que

$$\forall x > 1, \qquad \frac{1}{\zeta(x)} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right).$$

2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Corrigé de l'exercice 17

1. Fixons $x > 1$. L'idée est de décomposer chaque entier naturel non nul en facteurs premiers : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ et des entiers $(\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ tels que

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_N^{\alpha_N}.$$

Travaillons d'abord avec un nombre fini de décompositions en facteurs premiers : pour tout $(Q, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note

$$A_{Q,N} = \{p_1^{\alpha_1} \cdots p_N^{\alpha_N},\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in [\![0, Q]\!]^N\}.$$

Chaque ensemble $A_{Q,N}$ est fini de cardinal $(Q+1)^N$ (par unicité de la décomposition en facteurs premiers) et on a

$$\bigcup_{(Q,N)\in(\mathbb{N}^*)^2} A_{Q,N} = \mathbb{N}^*.$$

Pour chaque couple $(Q, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a

$$\sum_{n\in A_{Q,N}} \frac{1}{n^x} = \sum_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)\in[0,Q]^N} (p_1^{-x})^{\alpha_1} \cdots (p_N^{-x})^{\alpha_N} = \left(\sum_{\alpha_1=0}^{Q} (p_1^{-x})^{\alpha_1}\right) \cdots \left(\sum_{\alpha_N=0}^{Q} (p_N^{-x})^{\alpha_N}\right),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n\in A_{Q,N}} \frac{1}{n^x} = \prod_{n=1}^{N}\left(\frac{1-(p_n^{-x})^{Q+1}}{1-p_n^{-x}}\right).$$

Passons maintenant à la limite lorsque Q et N tendent vers $+\infty$ (**c'est le point délicat**).

- Pour tout couple $(Q, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'ensemble $A_{Q,N}$ est une partie finie de $\mathbb{N}^*$, donc il existe un entier M tel que $A_{Q,N} \subset [\![1, M]\!]$. Il s'ensuit :

$$\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{1-(p_n^{-x})^{Q+1}}{1-p_n^{-x}}\right) = \sum_{n\in A_{Q,N}} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x).$$

En faisant tendre $Q \to +\infty$, on obtient :

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-p_n^{-x}} \leq \zeta(x).$$

Enfin, la suite $(T_N(x))_{N\geq 1}$ définie par $T_N(x) = \displaystyle\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-p_n^{-x}} > 0$ est convergente, car croissante ($\frac{T_{N+1}(x)}{T_N(x)} = \frac{1}{1-p_{N+1}^{-x}} > 1$) et majorée par $\zeta(x)$.

En faisant tendre $N \to +\infty$, on obtient finalement

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-x}} \leq \zeta(x).$$

- Pour tout entier $M \in \mathbb{N}^*$, il existe $(Q, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $[\![1, M]\!] \subset A_{Q,N}$ (N est le maximum des indices des nombres premiers intervenant dans les décompositions de $1, 2, \cdots, M$ et Q est le maximum des exposants de toutes ces décompositions). Il s'ensuit :

$$\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n \in A_{Q,N}} \frac{1}{n^x} = \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{1 - (p_n^{-x})^{Q+1}}{1 - p_n^{-x}} \right) \leq \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - p_n^{-x}} \leq \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-x}}.$$

(la dernière inégalité résultant de la croissance de $(T_N(x))_{N \geq 1}$).
En faisant tendre $M \to +\infty$, on obtient finalement

$$\zeta(x) \leq \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-x}}.$$

Tout ceci montre que

$$\forall x > 1, \qquad \zeta(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-x}},$$

ou encore (puisque $\zeta(x) \neq 0$) :

$$\forall x > 1, \qquad \frac{1}{\zeta(x)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right).$$

2. Puisque $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p_n} > 0$, on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n} \text{ CV} \iff \sum_{n \geq 1} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \text{ CV} \implies \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-1}} \text{ CV}$$

(par continuité de l'exponentielle).
Si la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ converge, on a donc d'après la question précédente :

$$\forall x > 1, \qquad \zeta(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-x}} \leq \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-1}} < +\infty,$$

ce qui est absurde car la fonction ζ n'est pas majorée (elle tend vers $+\infty$ lorsque $x \to 1^+$). Donc $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

V Fonctions bizarres

Exercice 18 (Fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{Q}$)**
Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération des rationnels. Considérons :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N},\ r_n < x} \frac{1}{2^n}.$$

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Montrer que f est discontinue sur $\mathbb{Q}$.
3. Montrer que f est continue à gauche en tout point de $\mathbb{R}$, et continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Corrigé de l'exercice 18
Tout d'abord, f est bien définie car $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2^n} & \text{si } r_n < x \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. ,$$

on a $0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$, ce qui prouve la convergence (normale) de la série sur $\mathbb{R}$.

1. Soit deux réels $x < y$. Il existe au moins un rationnel r_{n_0} dans l'intervalle $]x;y[$, donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ r_n < x\}$ est strictement inclus dans $\{n \in \mathbb{N},\ r_n < y\}$ (le second contient n_0 alors que le premier non), ce qui entraîne
$$f(y) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ r_n<y}} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\setminus\{n_0\}\\ r_n<y}} \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\setminus\{n_0\}\\ r_n<x}} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_0}} + f(x) > f(x)$$
(puisque la série définissant f est à termes positifs).
2. Soit r_{n_0} un rationnel. Pour tout réel $y > r_{n_0}$, on a (en reprenant le calcul précédent) :
$$f(y) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ r_n<y}} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\setminus\{n_0\}\\ r_n<y}} \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\setminus\{n_0\}\\ r_n<r_{n_0}}} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_0}} + f(r_{n_0}),$$
ce qui montre que f n'est pas continue (à droite) en r_{n_0} (par monotonie, la limite à droite en r_{n_0} existe et vérifie $f(r_{n_0}^+) \geq \frac{1}{2^{n_0}} + f(r_{n_0}) > f(r_{n_0})$).
3. Chaque fonction u_n est continue à gauche sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elle est nulle sur $]-\infty, r_n]$ et constante égale à $\frac{1}{2^n}$ sur $]r_n;+\infty[$), donc par convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est continue à gauche sur $\mathbb{R}$.
Si on considère un point $a \notin \mathbb{Q}$, alors chaque fonction u_n est continue au point a, donc par convergence normale, f est continue en a.

Exercice 19 (*Une fonction continue nulle part dérivable)**
On considère la fonction 2-périodique $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [-1;1],\ g(x) = |x|$.
On pose, pour $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (3/4)^n\, g(4^n x).$$

1. Montrer que f est continue.
2. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$. Montrer que l'on peut choisir un réel h tel que $]4^m x; 4^m(x+h)[\cap\mathbb{Z} = \emptyset$.
3. Montrer que pour un certain choix de h, la somme $|f(x+h)-f(x)|$ est finie et en la minorant, en déduire que f n'est dérivable en aucun point $x \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 19

1. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ (faire un dessin), donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (3/4)^n\, g(4^n x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Or g est bornée par 1, donc $|\,(3/4)^n\, g(4^n x)| \leq (3/4)^n$ pour tout réel x, ce qui montre la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série définissant f, et donc la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Notons $n = E(4^m x) \in \mathbb{Z}$. On a $n \leq 4^m x < n+1$.
Si $n \leq 4^m x < n+\frac{1}{2}$, alors il suffit de choisir h tel que $4^m(x+h) = 4^m x + \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $h = \frac{1}{2*4^m}$.
Si $n+\frac{1}{2} \leq 4^m x < n+1$, alors il suffit de choisir h tel que $4^m(x+h) = 4^m x - \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $h = -\frac{1}{2*4^m}$.
3. On a
$$f(x+h) - f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (3/4)^n * [g(4^n(x+h)) - g(4^n x)]$$
Les termes d'indice $n > m$ de cette somme sont nuls, car si $n \geq m+1$, on a
$$4^n h = \pm 4^{n-m} * \frac{1}{2} = 2 * 4^{n-(m+1)}$$

entier pair, donc par 2-périodicité de g :

$$g(4^n(x+h)) - g(4^n x) = g(4^n x + 4^n h) - g(4^n x) = 0.$$

Ensuite, étudions les autres termes :

- Pour $n = m$: la fonction g est affine sur $[4^m x; 4^m(x+h)]$ de pente ± 1, ce qui amène

$$|g(4^m(x+h)) - g(4^m x)| = 4^m |h|.$$

- Pour $n < m$: la fonction g étant 1-lipschitzienne (dérivée bornée par 1 sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$), on a

$$|g(4^n(x+h)) - g(4^n x)| \leq 4^n |h|.$$

Donc en posant $a_n = (3/4)^n * [g(4^n(x+h)) - g(4^n x)]$, on a

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{m} a_n\right| \geq |a_m| - \left|\sum_{n=0}^{m-1} a_n\right| \geq |a_m| - \sum_{n=0}^{m-1} |a_n| \\ &\geq (3/4)^m 4^m |h| - \sum_{n=0}^{m-1} (3/4)^n 4^n |h|, \end{aligned}$$

d'où la minoration :

$$\left|\frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m}\right| \geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{3^m + 1}{2} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

avec $h_m = \pm \frac{1}{2 * 4^m} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre que f n'est pas dérivable en x.