Exercices du CH11 : Séries de fonctions

Exercices de la banque INP à étudier : ex 8 (utilisation du CSSA pour montrer la CVU), 14 (CVU et série d'intégrales), 16 (dérivabilité d'une série de fonctions), 17 (lien entre CVU série et CVU suite), 53 (continuité et limite en $+\infty$ d'une série de fonctions).

I Exemples concrets

Exercice 1 (**)
Étudier (convergences simple, absolue, normale, uniforme, éventuellement en restreignant le domaine - à des segments par exemple) les séries de fonctions $\sum_n f_n$ ayant pour terme général :

$$(a)\quad f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{nx^2}{1+n^3x} \end{array}\right., \ n \geq 0, \qquad (b)\quad f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{n^3+x^3} \end{array}\right., \ n \geq 1,$$

$$(c)\quad f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{-nx} \end{array}\right., \ n \geq 1, \qquad (d)\quad f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right) \end{array}\right., \ n \geq 1,$$

$$(e)\quad f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{n} \text{ si } n < x < n+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right. \end{array}\right., \ n \geq 1, \qquad (f)\quad f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^n}{1+nx} \end{array}\right., \ n \geq 0.$$

Exercice 2 (*)
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On définit lors la fonction S sur $\mathbb{R}_+^*$ par $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n+n^2x}$.
   (a) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$.
   (b) Montrer que, pour tout $a > 0$, la fonction S est continue sur $[a, +\infty[$.
3. On rappelle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En examinant $xS(x)$, montrer qu'on a $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x}$.

Exercice 3 (**)
Sur $I =]-1, +\infty[$, on pose $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

1. Montrer que S est définie et continue sur I.
2. Étudier la monotonie de S.
3. Calculer $S(x+1) - S(x)$.
4. Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+.
5. Établir $\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
6. En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

Exercice 4 (**)
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$.

1. Montrer que $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Établir qu'on a : $\forall x > 0$, $S'(x) = -\frac{1}{1+e^{-x}} + S(x)$. En déduire que S est C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
4. Quelle est la nature de la série $\sum u_n'(0)$? Commentaire ?

Exercice 5 (*)

On note, pour $n \geq 1$, $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(n+x)}{n^2} \end{array} \right.$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$. On note S sa somme.
2. Montrer que S est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ et exprimer, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $S'(x)$ et $S''(x)$ sous forme de sommes de séries.
3. En déduire que S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et que S est concave sur $[0,+\infty[$.
4. Retrouver, d'une façon plus simple, que S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Exercice 6 (**)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de $\sum f_n$. On note S la somme de cette série de fonctions sur son domaine de convergence.
2. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer qu'on a $S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{x}$.

Exercice 7 (*Un calcul de somme)

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ est bien définie, et en calculer la valeur.

Exercice 8 (**)

1. Prouver la convergence simple de $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sur $]1\,;+\infty[$, où $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \end{array} \right.$.

   On note $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que S est continue sur $]1\,;+\infty[$.
3. Montrer que $S(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 9 (*Oral Mines-Telecom)**

On considère la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, qu'on notera D_f.
2. Montrer que f est continue sur D_f.
3. Déterminer la limite, puis un équivalent de f en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent de f en 0^+.

II Exercices théoriques

Exercice 10 (*Série trigonométrique)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum\limits_{n\geq 1} n^2 a_n^2$ converge. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ définie par $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a_n \sin(nx) \end{array} \right.$ converge normalement.

Exercice 11 (*Conditions pour différents modes de convergence)**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle décroissante et à valeurs positives.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, on pose : $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
2. Montrer que la convergence est normale sur $[0,1]$ ssi la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.
3. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$ ssi la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

III Utilisations de la convergence uniforme

Exercice 12 (*Solution d'une équation différentielle)
On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$.
3. Trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par f.

Exercice 13 (Une sorte de point fixe)**
Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^x f_n(t)dt.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue f vérifiant :
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = g(x) + \int_0^x f(t)dt.$$

Exercice 14 (Calcul d'une intégrale)**
Soit $a \in]-1\,;1[$.

1. On note $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n \cos(nx)}{n}$, où x est une variable réelle.
Montrer que S est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $S'(x)$ en tant que somme d'une série.
2. On note $I = \int_0^\pi \ln\left(a^2 - 2a\cos(x) + 1\right)dx$. Montrer qu'on a $I = -2\int_0^\pi S(x)dx$.
3. En déduire la valeur de I.

IV Autour de la fonction zeta de Riemann

Exercice 15 (Dérivabilité et comportement asymptotique de la fonction ζ)**
On rappelle qu'on appelle *fonction zeta de Riemann* la fonction $\zeta : \begin{cases}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{cases}$.

1. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer ses dérivées successives.
2. En utilisant à chaque fois une comparaison série-intégrale, établir les développements asymptotiques suivants :
   (a) $\zeta(x) = 1 + \dfrac{1}{2^x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{2^x}\right)$.
   (b) $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + \underset{x\to1^+}{o}(1)$, où γ désigne la constante d'Euler.

Exercice 16 (*Un prolongement complexe de ζ)
On définit, pour $n \geq 1$, $f_n : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{n^z} \end{cases}$, où l'on rappelle que $n^z = e^{z\ln(n)}$.
On note, lorsque la série est convergente, $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$.
Montrer que la fonction ζ est définie et continue sur $H = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

Exercice 17 (*Lien entre ζ et les nombres premiers)**
Pour tout réel $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant. Montrer alors que

$$\forall x > 1, \qquad \frac{1}{\zeta(x)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right).$$

2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

V Fonctions bizarres

Exercice 18 (Fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{Q}$)**
Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des rationnels. Considérons :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N},\ r_n<x} \frac{1}{2^n}.$$

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Montrer que f est discontinue sur $\mathbb{Q}$.
3. Montrer que f est continue à gauche en tout point de $\mathbb{R}$, et continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 19 (*Une fonction continue nulle part dérivable)**
On considère la fonction 2-périodique $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [-1; 1],\ g(x) = |x|$.
On pose, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (3/4)^n\, g(4^n x).$$

1. Montrer que f est continue.
2. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$. Montrer que l'on peut choisir un réel h tel que $]4^m x; 4^m(x+h)[\cap \mathbb{Z} = \emptyset$.
3. Montrer que pour un certain choix de h, la somme $|f(x+h)-f(x)|$ est finie et en la minorant, en déduire que f n'est dérivable en aucun point $x \in \mathbb{R}$.