Exercices du CH10 : Suites de fonctions

Exercices de la banque INP à étudier : 9, 10, 11 (exemples d'études de CVU), 12 (limite uniforme de fonctions continues), 48 (fonctions de moments nuls).

I Exemples concrets

Exercice 1 (Exemples d'étude)**
Étudier la convergence simple, uniforme, éventuellement uniforme sur certains segments, des suites de fonctions :

$$(a)\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{nx}{1+n^2x^2} \end{array} \right. , \quad (b)\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \end{array} \right. , \quad (c)\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{n(1+x^n)} \end{array} \right. ,$$

$$(d)\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^n-1}{x^n+1} \end{array} \right. , \quad (e)\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right) \end{array} \right. ,$$

$$(f)\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x^2\sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{array} \right. \end{array} \right. , \quad (g)\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \end{array} \right. .$$

Corrigé de l'exercice 1

Exercice 2 (*Fonctions définies en deux morceaux)
Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in \left[0\,;\frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) ?
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ avec $a>0$.

Corrigé de l'exercice 2

Exercice 3 (*Convergence uniforme et dérivation)
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.
2. Étudier la convergence de $(f_n')_{n\geq 1}$ sur $[-1,1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[-1,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$. Montrer que $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

Corrigé de l'exercice 3

Exercice 4 (Multiplication par x^n)**
Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(1)=0$.
On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions sur $[0,1]$ par $f_n : x \mapsto x^n f(x)$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

Corrigé de l'exercice 4

Exercice 5 (Fonctions définies en deux morceaux 2)**

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite des fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par : $f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$.

Le but de l'exercice est de montrer que (f_n) converge uniformément vers $x \mapsto e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$. Pour cela on définit, pour tout $n \geq 1$, $g_n : x \mapsto e^{-x} - f_n(x)$.

1. Montrer que les g_n sont positives.
2. Soit x_n un élément de $[0,n]$ qui annule g_n'. Montrer que : $g_n(x_n) = \frac{x_n e^{-x_n}}{n} \leq \frac{1}{en}$.
3. Conclure.

Corrigé de l'exercice 5

Exercice 6 (*Suite de fonctions définie par récurrence)**

Pour $t \geq 0$, on pose $f_0(t) = 0$ et $f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la limite simple, qu'on notera ℓ, de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.
2. A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
3. Démontrer : $\forall t > 0$, $|f_{n+1}(t) - \ell(t)| \leq \dfrac{|f_n(t) - \ell(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4. En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$ (remarquer que $f_n - \ell$ est bornée pour $n \geq 1$).

Corrigé de l'exercice 6

II Exercices théoriques

Exercice 7 (Approximation de la dérivée par différences finies)**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et de dérivée seconde bornée. Montrer que la suite des fonctions $g_n : x \mapsto n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$ converge uniformément vers f'.

Corrigé de l'exercice 7

Exercice 8 (Composition par une fonction uniformément continue)**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie et X une partie de E.

1. Soit une suite d'applications (f_n) de X vers E, $f : X \to E$ et $g : E \to F$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur X et que g est uniformément continue. Montrer que $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur X.
2. Le résultat précédent reste-t-il vrai en remplaçant l'hypothèse de continuité uniforme par la continuité ?

Corrigé de l'exercice 8

Exercice 9 (*Un exemple d'approximation de l'unité)**
On considère la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -\frac{1}{n} \\ n^2\left(x+\frac{1}{n}\right) & \text{si} \quad -\frac{1}{n} \leq x \leq 0 \\ n^2\left(-x+\frac{1}{n}\right) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

On peut alors définir, pour tout fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 1$, la fonction $f * h_n$ de la manière suivante :

$$f * h_n(x) = \int_{-1}^{1} h_n(t) f(x-t)dt,$$

que l'on appelle **produit de convolution de f par h_n.**

1. Calculer $\int_{-1}^{1} h_n$ pour tout $n \geq 1$.
   En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de $f * h_n(x) - f(x)$ comme une intégrale sur $[-1, 1]$.
2. On suppose dans cette question que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   Majorer alors $|f * h_n(x) - f(x)|$ à l'aide du résultat précédent. En déduire que $(f * h_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose dans cette question que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f * h_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.
4. On suppose dans cette question que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f * h_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 9

1. Le calcul de $\int_{-1}^{1} h_n$ est facile puisque h_n est affine sur $[-1/n, 0]$, sur $[0, 1/n]$ et nulle ailleurs.
   On obtient $\int_{-1}^{1} h_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Pour tout réel x, on en déduit
   $$f * h_n(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} (f(x-t) - f(x))h_n(t)dt.$$
2. Supposons qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$
   On a alors, pour tout réel x et tout entier $n \geq 1$:
   $$|f * h_n(x) - f(x)| \leq \int_{-1}^{1} |f(x-t) - f(x)|h_n(t)dt \leq \int_{-1}^{1} M|t|h_n(t)dt.$$
   puisque h_n est positive. Or h_n est également paire, donc
   $$|f * h_n(x) - f(x)| \leq 2M \int_{0}^{1} t h_n(t)dt = 2Mn^2 \int_{0}^{1/n} t\left(\frac{1}{n} - t\right)dt = \frac{M}{3n}.$$
   On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f * h_n - f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et
   $$\|f * h_n - f\|_\infty \leq \frac{M}{3n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$
   d'où la convergence uniforme de $(f * h_n)_n$ vers f sur $\mathbb{R}$.
3. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |f * h_n(x) - f(x)| \leq \int_{-1}^{1} |f(x-t) - f(x)|h_n(t)dt = \int_{-1/n}^{1/n} |f(x-t) - f(x)|h_n(t)dt.$$

Or, par continuité de f au point x, on a $f(x-t)-f(x) \underset{t\to 0}{\to} 0$, donc il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad t \in [-\delta, \delta] \implies |f(x-t)-f(x)| \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n > \lfloor 1/\delta \rfloor \implies \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \subset [-\delta, \delta] \implies |f * h_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{-1/n}^{1/n} h_n(t)dt = \varepsilon.$$

On a donc montré que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies |f * h_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f * h_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x).$$

Il s'agit donc bien de convergence simple sur $\mathbb{R}$ (et non pas uniforme, car le rang n_0 dépend du point x).

4. On fixe $\varepsilon > 0$ et on procède de même pour majorer $|f*h_n(x)-f(x)|$, mais cette fois, la continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}$ donne :

$$\exists \delta > 0,\ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad t \in [-\delta, \delta] \implies |f(x-t)-f(x)| \leq \varepsilon,$$

(le δ ne dépend pas de x).
De même qu'à la question précédente, on a donc, en posant $n_0 = \lfloor 1/\delta \rfloor + 1$:

$$n \geq n_0 \implies \forall x \in \mathbb{R},\ |f * h_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{-1/n}^{1/n} h_n(t)dt = \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$n \geq n_0 \implies \|f * h_n - f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien la convergence uniforme de $(f * h_n)_n$ vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 (*Un théorème de Dini)**
Soient des fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, la suite réelle $\big(f_n(x)\big)$ est décroissante. On désire montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme.

1. Justifier l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.
3. En observant que pour tout $p \leqslant n$, $f_n(x_n) \leqslant f_p(x_n)$, montrer que $\|f_n\|_\infty \to 0$ et conclure.

Corrigé de l'exercice 10

III Utilisations de la convergence uniforme

Exercice 11 (Limite d'une suite d'intégrales)**
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx$.

Corrigé de l'exercice 11

Exercice 12 (*Initiation aux séries de fonctions)**
On pose $\zeta_2 : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$. Montrer que la fonction ζ_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
Cet exercice sera beaucoup plus simple à traiter lorsqu'on disposera des théorèmes adaptés aux séries de fonctions.

Corrigé de l'exercice 12

Exercice 13 (*Méthode d'approximation d'une solution d'une équa diff)**
Soit $\gamma \in [0,1[$. On définit la suite (u_n) de fonctions de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(\gamma t)dt.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
2. En déduire que (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. On note u sa limite.
3. Montrer que cette convergence est même uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.
   En déduire que u est une fonction non nulle et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u'(x) = u(\gamma x)$.

Corrigé de l'exercice 13

IV Approximation polynomiale

Exercice 14 (*Autour du théorème de Weierstrass)

1. Soit I un intervalle réel, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur I, convergeant uniformément sur I vers une fonction f. Montrer que f est bornée sur I.
2. En déduire un contre-exemple au théorème de Weierstrass sur un intervalle non fermé.

Corrigé de l'exercice 14

1. Si (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors les fonctions $f - f_n$ sont bornées sur I à partir d'un certain rang, et puisque les f_n sont bornées sur I, on en déduit par somme que $f = (f - f_n) + f_n$ est bornée sur I.

2. La fonction $f : x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0,1]$ mais pas limite uniforme de polynômes. En effet, si on avait une suite (f_n) de polynômes qui convergeait uniformément vers f sur $]0,1]$, alors puisque les f_n sont bornées sur $]0,1]$ (car prolongeables continûment sur $[0,1]$ en tant que polynômes), f serait bornée sur $]0,1]$ (d'après la question précédente). Mais f est non bornée sur $]0,1]$, donc une telle suite (f_n) n'existe pas.

Exercice 15 (Autour du théorème de Weierstrass 2)**
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.

1. Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout n supérieur ou égal à N, on ait pour tout réel x, $|P_n(x) - P_N(x)| \leqslant 1$.
   Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_N$ lorsque $n \geqslant N$?
2. Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.
   Qu'a-t-on ainsi mis en évidence concernant le théorème de Weierstrass ?

Corrigé de l'exercice 15

Exercice 16 (*Démonstration du th. de Weierstrass par les polynômes de Bernstein)**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x)$, $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x)$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x)$.
   Une méthode consiste à introduire, pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $g : x \mapsto (x+y)^n$ et à en considérer les dérivées...
2. Soient $\alpha > 0$ et $x \in [0,1]$. On forme les ensembles :
$$A = \left\{ k \in [\![0,n]\!] \ / \left| \frac{k}{n} - x \right| \geqslant \alpha \right\} \text{ et } B = \left\{ k \in [\![0,n]\!] \ / \left| \frac{k}{n} - x \right| < \alpha \right\}.$$
   Montrer que $\sum_{k \in A} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$.
3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ continue. On pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$.
   Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
4. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass.

Corrigé de l'exercice 16

1. Par la formule du binôme, on a
$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = (x + (1-x))^n = 1.$$
   En suivant la méthode de dérivation indiquée, on obtient
$$\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) = nx, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) = nx + n(n-1)x^2.$$
2. Si $k \in A$, on a $\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \geq \alpha^2$ donc
$$\sum_{k \in A} B_{n,k}(x) \leq \sum_{k \in A} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 B_{n,k}(x).$$
   Par positivité des polynômes $B_{n,k}$ sur $[0,1]$ et d'après les calculs de la question précédente, on obtient la majoration :
$$\sum_{k \in A} B_{n,k}(x) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{1}{n^2\alpha^2} \sum_{k=0}^{n} \left(k^2 - 2nxk + n^2x^2\right) B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}.$$
   Enfin, $\forall x \in [0,1],\ x(1-x) \leq 1/4$, donc
$$\sum_{k \in A} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$
3. On a, pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$:
$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} f(x) B_{n,k}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x).$$
   Utilisons alors la continuité uniforme de f sur le segment $[0,1]$ (qui résulte du théorème de Heine) pour majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$. On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que
$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \qquad |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Introduisons alors les ensembles A et B associés à ce α, comme dans la question précédente. Puisque $A \cup B = [\![0, n]\!]$, et $A \cap B = \emptyset$, on a, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq \sum_{k \in A} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x) + \sum_{k \in B} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x) \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2} + \sum_{k \in B} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x). \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in B$, on a $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha$, donc $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$. D'où

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2} + \sum_{k \in B} \varepsilon B_{n,k}(x) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2} + \varepsilon.$$

Enfin, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2} = 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n \geq n_0 \implies \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2} \leq \varepsilon.$$

Donc :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in [0,1], \quad |f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci montre que $\|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4. Puisque les (f_n) sont polynomiales, on a prouvé le théorème de Weierstrass sur le segment $[0,1]$. Passons maintenant au cas d'un segment $[a,b]$ quelconque (avec $a < b$).
Etant donnée $g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$, on se ramène au cas précédent en posant

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & f(t) = g((1-t)a + tb) \end{array} \right. .$$

Par composition, f est continue sur $[0,1]$ donc il existe une suite de polynômes (f_n) telle que $\|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Introduisons alors les polynômes

$$g_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \end{array} \right. .$$

On a :

$$\forall x \in [a,b], \qquad |g_n(x) - g(x)| \leq \|f_n - f\|_{\infty,[0,1]},$$

donc

$$\|g_n - g\|_{\infty,[a,b]} \leq \|f_n - f\|_{\infty,[0,1]}$$

(on a même égalité en fait). On en déduit $\|g_n - g\|_{\infty,[a,b]} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que (g_n) converge uniformément vers g sur $[a,b]$.

Exercice 17 (Approximation polynomiale améliorée)**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que $\|f - P_n\|_\infty \to 0$ et $\|f' - P_n'\|_\infty \to 0$.

Corrigé de l'exercice 17

Exercice 18 (Avec interpolation de Lagrange)**
Soit $m \geq 1$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_m[X]$ convergeant simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f. En utilisant l'interpolation de Lagrange sur $m+1$ points distincts de $[a,b]$, montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à m et que la convergence est uniforme.

Corrigé de l'exercice 18

Exercice 19 (Un contre-exemple)**
On considère la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } x = \frac{1}{k} \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. La fonction f est-elle continue par morceaux ?
2. Montrer que f est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier (on dit que f *est réglée*).
3. La limite uniforme d'une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux est-elle continue par morceaux ? Quelle remarque topologique peut-on faire sur $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ en tant que partie de l'evn $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$?

Corrigé de l'exercice 19 1. Non car elle possède une infinité de discontinuités.

2. Prendre (pour $n \in \mathbb{N}^*$) $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = f(x)$ si $\frac{1}{n} < x \leq 1$ et $f_n(x) = 0$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$. La subdivision $\left(\frac{1}{k}\right)_{1\leq k\leq n}$ est alors adaptée à f_n, qui est donc une fonction en escalier, et on a convergence uniforme vers f car $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \in [0;1]$.
3. Non comme le montre l'exemple de la suite (f_n) définie à la question précédente. On en déduit que $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ n'est pas une partie fermée de $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$.

Exercice 20 (*Un résultat plus fin de densité (théorème de Chudnovsky))**
Soient I un segment inclus dans $]0,1[$ et $E = C(I,\mathbb{R})$, muni de $\|.\|_\infty$.

1. On définit $f : x \mapsto 2x(1-x)$. Étudier les convergences simple et uniforme sur I de la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n = f \circ \cdots \circ f$ (composée n fois).
2. En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans E.

Corrigé de l'exercice 20

1. • **Convergence simple de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $]0,1[$**
Fixons $x \in]0,1[$. La suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ vérifie les relations de récurrence :
$$f_1(x) = f(x), \qquad \forall n \geq 1,\ f_{n+1}(x) = f(f_n(x)).$$
Une étude rapide de la fonction $f : x \mapsto 2x(1-x)$ montre que f croît strictement sur $]0,1/2]$ et décroît strictement sur $[1/2,1[$ avec $f(]0,1/2]) = f([1/2,1[) =]0,1/2]$. On en déduit par récurrence :
$$\forall n \geq 1, \qquad f_n(x) \in]0,1/2].$$
Ceci permet de montrer que $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante car
$$\forall n \geq 1, \qquad f_{n+1}(x) - f_n(x) = f(f_n(x)) - f_n(x) \geq 0,$$
puisque $f(t) - t = t(1-2t) \geq 0$ pour tout $t \in]0,1/2]$.
Etant croissante et majorée par $1/2$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers $\ell \in [0,1/2]$. Mais par continuité de f, la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$, donc $\ell \in \{0,1/2\}$. La croissance et la stricte positivité des termes empêche $\ell = 0$, donc $\ell = 1/2$.
Finalement, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $]0,1[$, donc sur I, vers la fonction constante égale à $1/2$.

   • **Convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur I**
Notons $I = [a,b]$ avec $0 < a < b < 1$, et étudions $\|f_n - 1/2\|_{\infty,I}$. Nous avons la relation de récurrence :
$$\forall x \in I,\ \forall n \geq 1, \qquad \left|f_{n+1}(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|2f_n(x)(1-f_n(x)) - \frac{1}{2}\right| = 2\left|f_n(x) - \frac{1}{2}\right|^2,$$
donc par récurrence on obtient :
$$\forall x \in I, \qquad \forall n \geq 1, \qquad \left|f_n(x) - \frac{1}{2}\right| = 2^{1+2+\cdots+2^{n-2}}\left|f_1(x) - \frac{1}{2}\right|^{2^{n-1}} = 2^{2^{n-1}-1}\left|f_1(x) - \frac{1}{2}\right|^{2^{n-1}},$$

et $\left|f_1(x)-\frac{1}{2}\right| = \left|2x(1-x)-\frac{1}{2}\right| = 2\left|x-\frac{1}{2}\right|^2$, donc finalement

$$\forall x \in I, \qquad \forall n \geq 1, \qquad \left|f_n(x)-\frac{1}{2}\right| = 2^{2^n-1}\left|x-\frac{1}{2}\right|^{2^n}.$$

Puisque $0 < a \leq x \leq b < 1$, on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \qquad \left\|f_n - \frac{1}{2}\right\|_{\infty,I} = \frac{1}{2}(2c)^{2n},$$

où $c = \max\left(|a-1/2|, |b-1/2|\right) < 1/2$, donc $\left\|f_n-\frac{1}{2}\right\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (vu que $0 \leq 2c < 1$), ce qui montre que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $1/2$ sur le segment I.

2. Une récurrence simple montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est polynomiale à coefficients entiers relatifs.
   - La question précédente montre donc que la fonction constante égale à $1/2$ est limite uniforme sur I des fonctions polynomiales $f_n \in \mathbb{Z}[X]$.
   - Vu que $E = \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre et que la norme $\|.\|_\infty$ est sous-multiplicative ($\forall (f,g) \in E^2,\ \forall x \in I,\ |(fg)(x)| = |f(x)| \times |g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ donc $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty\|g\|_\infty$), on en déduit que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n^k)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur I vers la fonction constante égale à $(1/2)^k$ (par passage à la limite dans un produit dans l'algèbre normée $(E, \|.\|_\infty)$.
   - Par somme et multiplication par -1, on obtient que toutes les fonctions constantes du type $x \mapsto \frac{a}{2^k}$ (avec $(a,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$) sont limites uniformes sur I de fonctions de $\mathbb{Z}[X]$.
   - On en déduit facilement que toute fonction polynomiale de $A[X]$ est limite uniforme sur I de fonctions de $\mathbb{Z}[X]$ où $A = \{\frac{a}{2^k},\ (a,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\}$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ formé des *nombres dyadiques*.
   En effet, si $p : x \mapsto \sum_{j=0}^m c_j x^j$ avec $c_j \in A$ pour tout j, alors chaque coefficient c_j est (en tant que fonction constante dyadique) limite uniforme sur I d'une suite de fonctions $(c_j^{(n)})_n$ de $\mathbb{Z}[X]$, donc la suite de fonctions
   $$p_n : x \mapsto \sum_{j=1}^m c_j^{(n)}(x)x^j$$
   vérifie bien $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \in \mathbb{Z}[X]$ et (p_n) converge uniformément vers p sur I (encore par passage à la limite dans des produits et combinaisons linéaires dans l'algèbre normée $(E, \|.\|_\infty)$.
   A ce stade, on a donc montré que $\overline{\mathbb{Z}[X]} \supset A[X]$ (où l'adhérence est au sens de la norme infinie dans E).
   - Enfin, A est dense dans $\mathbb{R}$ (exercice classique, ça marche comme la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$), donc $\overline{A[X]} \supset \mathbb{R}[X]$. En effet, si $q : x \mapsto \sum_{j=0}^m \lambda_j x^j$ est une fonction polynomiale à coefficients réels, alors chaque λ_j est limite d'une suite $(\lambda_j^{(n)})_n \in A^{\mathbb{N}}$, donc la suite de fonctions
   $$q_n : x \mapsto \sum_{j=0}^m \lambda_j^{(n)} x^j$$
   est une suite de $A[X]$ et converge uniformément vers q sur I par opérations algébriques.
   - On conclut par le théorème de Weierstrass : vu que $\overline{\mathbb{R}[X]} = E$, on déduit des questions précédentes que
   $$\overline{\mathbb{Z}[X]} \supset \overline{A[X]} \supset \overline{\mathbb{R}[X]} = E,$$
   donc $\overline{\mathbb{Z}[X]} \supset E$, et l'inclusion réciproque est vraie car $\mathbb{Z}[X] \subset E$.
   Donc $\overline{\mathbb{Z}[X]} = E$, ce qui prouve la densité de $\mathbb{Z}[X]$ dans E.