Exercices du CH10 : Suites de fonctions

Exercices de la banque INP à étudier : 9, 10, 11 (exemples d'études de CVU), 12 (limite uniforme de fonctions continues), 48 (fonctions de moments nuls).

I Exemples concrets

Exercice 1 (Exemples d'étude)**
Étudier la convergence simple, uniforme, éventuellement uniforme sur certains segments, des suites de fonctions :

$$(a)\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{nx}{1+n^2x^2} \end{array} \right. ,\quad (b)\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \end{array} \right. ,\quad (c)\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{n(1+x^n)} \end{array} \right. ,$$

$$(d)\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^n-1}{x^n+1} \end{array} \right. ,\quad (e)\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right) \end{array} \right. ,$$

$$(f)\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x^2\sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{array} \right. \end{array} \right. ,\quad (g)\ f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \end{array} \right. .$$

Corrigé de l'exercice 1

(a) La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle $f : x \mapsto 0$ (puisque $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx}$).
Cette convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ car $|f_n(1/n) - f(1/n)| = \frac{1}{2} \not\to 0$.
Toutefois, la convergence est uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ donc sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geq a > 0, \qquad |f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{na},$$

donc $\|f_n - f\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{1}{na} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
Vu que les f_n sont des fonctions impaires, on en déduit qu'il y a également convergence uniforme sur tous les intervalles $] - \infty, -a]$ avec $a > 0$.

(b) La suite $(f_n)_{n\geq1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle $f : x \mapsto \ln(1) = 0$.
Vu que les f_n ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}^+$ (puisque $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$), la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
En revanche, il y a convergence uniforme sur tout segment $[0, a]$ avec $a > 0$ puisque par croissance et positivité des f_n, on a $\|f_n - f\|_{\infty,[0,a]} = f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

(c) La suite $(f_n)_{n\geq1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle $f : x \mapsto 0$ car $|f_n(x)| \leq \frac{x}{n}$.
De plus, cette convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$: en effet pour tout $n \geq 1$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n}$ si $x \in [0, 1]$ et $|f_n(x)| \leq \frac{x}{nx^n} = \frac{1}{nx^{n-1}} \leq \frac{1}{n}$ si $x \geq 1$, donc $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

(d) Si $x \in [0, 1[$, alors $f_n(x) = \frac{x^n-1}{x^n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} -1$, si $x = 1$, alors $f_n(x) = f_n(1) = 0 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et si $x > 1$, alors $f_n(x) = \frac{1-x^{-n}}{1+x^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, donc la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction en escalier $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$.
Puisque que les f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et pas f (discontinue en 1), la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Toutefois, il y a convergence uniforme sur tout segment $[0, a]$ avec $a < 1$, ainsi que sur tout segment $[b, +\infty[$ avec $b > 1$ car

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, a], \quad |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^n-1}{x^n+1} + 1\right| = \frac{2x^n}{x^n+1} \leq 2x^n \leq 2a^n,$$

donc $\|f_n - f\|_{\infty,[0,a]} \leq 2a^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, ainsi que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [b,+\infty[, \quad |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^n-1}{x^n+1} - 1\right| = \frac{2}{x^n+1} \leq \frac{2}{b^n},$$

donc $\|f_n - f\|_{\infty,[b,+\infty]} \leq 2b^{-n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, $f_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \cos(x)$, donc la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f = \cos$.
La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ car avec la suite réelle $(x_n) = ((n+1)\pi)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $|f_n(x_n) - f(x_n)| = |\cos(n\pi) - \cos((n+1)\pi)| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.
Toutefois, il y a convergence uniforme sur tous les segments $[-A, A]$ avec $A > 0$ (le problème "vient de l'infini" comme le montre la suite $(x_n) = ((n+1)\pi)$: en effet par l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-A, A], \qquad |f_n(x) - f(x)| = \left|\cos\left(\frac{nx}{n+1}\right) - \cos(x)\right| \leq \sup_{\mathbb{R}} |\cos'| \times \left|\frac{nx}{n+1} - x\right|,$$

et donc $\|f_n - f\|_{\infty,[-A,A]} \leq \dfrac{A}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

(f) On a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour $x > 0$, on a $f_n(x) = x^2 \sin(1/nx) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle $f : x \mapsto 0$.
La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$ car par exemple $|f_n(n)-f(n)| = n^2\sin(1/n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, donc $|f_n(n) - f(n)|$ ne tend pas vers 0.
Toutefois, il y a convergence uniforme sur tout segment $[0, a]$ avec $a > 0$ car en utilisant l'inégalité $|\sin(u)| \leq u$, on obtient

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in]0, a], \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{x^2}{nx} \leq \frac{x}{n} \leq \frac{a}{n},$$

et $|f_n(0) - f(0)| = 0$ donc $\|f_n - f\|_{\infty,[0,a]} \leq \dfrac{a}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

(g) La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto e^{-x}e^x = 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, étudions la fonction dérivable $g_n = f_n - f$ sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) - 1,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_n'(x) = e^{-x}\left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

Si n est pair, alors $g_n' \leq 0$ donc g_n est décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $g_n(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{n!}e^{-x} \underset{x\to-\infty}{\to} +\infty$ et par croissances comparées, $g_n(x) \underset{x\to+\infty}{\to} -1$.
Si n est impair, alors g_n' a le signe de $-x$, donc g_n est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, avec $g_n(x) \underset{x\to-\infty}{\to} -\infty$, $g_n(0) = 0$, et $g_n(x) \underset{x\to+\infty}{\to} -1$ (de même que précédemment).
Dans tous les cas, $\|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}} = \|g_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = +\infty$ donc (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. Toutefois, il y a quand même convergence uniforme sur tout segment $[-A, A]$ avec $A > 0$ car d'après les variations de g_n :

$$\|f_n - f\|_{\infty,[-A,A]} = \|g_n\|_{\infty,[-A,A]} = \max(|g_n(A)|, |g_n(-A)|) \leq g_n(A) + g_n(-A) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

(puisque g_n converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$).

Exercice 2 (*Fonctions définies en deux morceaux)
Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^2x(1 - nx)$ si $x \in \left[0\ ;\ \frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) ?
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$.

Corrigé de l'exercice 2

1. On a $f_n(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et pour tout $x > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_0} < x$, donc
$$n \geq n_0 \implies 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < x \implies f_n(x) = 0,$$
ce qui montre que $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle $f : x \mapsto 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque f_n est nulle sur $[\frac{1}{n}, 1]$, on a
$$\int_0^1 f_n = \int_0^{1/n} f_n = \int_0^{1/n} n^2 x(1-nx)dx = \left[n^2\frac{x^2}{2} - n^3\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/n} = \frac{1}{6}.$$
Si (f_n) convergeait uniformément sur $[0,1]$, ce serait vers sa limite simple $f = 0$, et d'après le théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment, on aurait $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f = 0$.
Mais ce n'est pas le cas, donc (f_n) ne converge pas uniformément.
3. Soit $0 < a \leq 1$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_0} < a$, donc
$$n \geq n_0 \implies [a,1] \subset \left[\frac{1}{n_0}, 1\right] \subset \left[\frac{1}{n}, 1\right] \implies \forall x \in [a,1],\ f_n(x) = 0.$$
Ainsi $\|f_n\|_{\infty,[a,1]} = 0$ à partir d'un certain rang, donc $\|f_n\|_{\infty,[a,1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

Exercice 3 (*Convergence uniforme et dérivation)
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.
1. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.
2. Étudier la convergence de $(f'_n)_{n\geq 1}$ sur $[-1,1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[-1,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$.
Montrer que $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

Corrigé de l'exercice 3

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{x}{1+n^2x^2}$ est impaire, dérivable sur $[-1,1]$, et on a
$$f'_n : x \mapsto \frac{1+n^2x^2 - x(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{(1-nx)(1+nx)}{(1+n^2x^2)^2},$$
donc f_n est croissante sur $[0,1/n]$, décroissante sur $[1/n,1]$, avec $f_n(0) = 0$, $f_n(1/n) = \frac{1}{2n}$ et $f_n(1) = \frac{1}{1+n^2}$. Donc $\|f_n\|_{\infty,[-1,1]} = \|f_n\|_{\infty,[0,1]} = \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-1,1]$.
2. On a $f'_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \neq 0$, $f'_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-n^2x^2}{n^4x^4} = -\frac{1}{n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la suite $(f'_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction $h : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,0[\cup]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$.
Vu que les f'_n sont continues sur $[-1,1]$ mais que h ne l'est pas (discontinue en 0), on en déduit que (f'_n) ne converge pas uniformément sur $[-1,1]$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$ est dérivable sur $[-1,1]$, et
$$g'_n : x \mapsto \frac{2n^2x}{2n^2(1+n^2x^2)} = \frac{x}{1+n^2x^2} = f_n(x),$$

donc g_n est une primitive de f_n. De plus, $g_n(0) = 0$, donc

$$\forall x \in [-1,1], \qquad g_n(x) = \int_0^x f_n.$$

On en déduit la majoration

$$\forall x \in [-1,1], \qquad |g_n(x)| \leq |x - 0| \times \|f_n\|_{\infty,[0,x]} \leq \|f_n\|_{\infty,[-1,1]}.$$

Donc $\|g_n\|_{\infty,[-1,1]} \leq \|f_n\|_{\infty,[-1,1]} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, ce qui montre que (g_n) converge uniformément vers 0 sur $[-1,1]$.

Exercice 4 (Multiplication par x^n)**
Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$.
On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions sur $[0,1]$ par $f_n : x \mapsto x^n f(x)$.
Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

Corrigé de l'exercice 4
On a $f_n(1) = f(1) = 0 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, et pour tout $x \in [0,1[$, $f_n(x) = x^n f(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$.
Pour établir la convergence uniforme, on utilise l'idée suivante : au voisinage de 1, $f_n(x)$ est petit car f étant continue, $f(x)$ est proche de $f(1) = 0$, et sur tout segment $[0,a]$ avec $a < 1$, $f_n(x)$ est petit lorsque n est grand car $|x^n| \leq a^n \to 0$.
Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en 1, il existe $a \in]0,1[$ tel que

$$x \in [a,1] \implies |f(x)| = |f(x) - f(1)| \leq \varepsilon \implies \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| = x^n|f(x)| \leq |f(x)| \leq \varepsilon,$$

donc

$$\forall x \in [a,1],\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x)| \leq \varepsilon$$

En outre, on a la majoration

$$\forall x \in [0,a],\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x)| = x^n|f(x)| \leq a^n\|f\|_\infty.$$

Enfin, $a^n\|f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (puisque $0 < a < 1$) donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que ($n \geq n_0 \implies a^n\|f\|_\infty \leq \varepsilon$), donc

$$n \geq n_0 \implies (\forall x \in [0,1], \quad |f_n(x)| \leq \varepsilon) \implies \|f_n\|_{\infty,[0,1]} \leq \varepsilon.$$

Finalement, $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, ce qui montre la convergence uniforme de (f_n) vers 0 sur $[0,1]$.

Exercice 5 (Fonctions définies en deux morceaux 2)**
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite des fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par : $f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$.
Le but de l'exercice est de montrer que (f_n) converge uniformément vers $x \mapsto e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$. Pour cela on définit, pour tout $n \geq 1$, $g_n : x \mapsto e^{-x} - f_n(x)$.

1. Montrer que les g_n sont positives.
2. Soit x_n un élément de $[0,n]$ qui annule g_n'. Montrer que : $g_n(x_n) = \frac{x_n e^{-x_n}}{n} \leq \frac{1}{en}$.
3. Conclure.

Corrigé de l'exercice 5

1. Par concavité de $t \mapsto \ln(1+t)$, on a l'inégalité $\forall t > -1,\ \ln(1+t) \leq t$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in [0,n[, \qquad \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n},$$

donc par croissance de l'exponentielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,n[, \qquad f_n(x) = e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} \leq e^{-x},$$

et cela reste vrai pour les $x \in [n,+\infty[$, puisque $f_n(x) = 0$, donc finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+$, $g_n(x) = e^{-x} - f_n(x) \geq 0$.

2. Si $x_n \in [0, n]$ avec $g_n'(x_n) = 0$ (ce qui suppose que g_n est dérivable en x_n, donc f_n aussi), alors

$$0 = -e^{-x_n} - f_n'(x_n) = -e^{-x_n} + \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1},$$

donc

$$g_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{x_n}{n}\right) = e^{-x_n} - e^{-x_n}\left(1 - \frac{x_n}{n}\right) = \frac{x_n e^{-x_n}}{n}.$$

En étudiant ensuite $t \mapsto te^{-t}$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient facilement que cette fonction atteint son maximum en $t = 1$, donc $g_n(x_n) = \frac{x_n e^{-x_n}}{n} \leq \frac{1e^{-1}}{n} = \frac{1}{en}$.

3. Montrons que la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers 0 en majorant $\|g_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :
   - Sur l'intervalle $[n, +\infty[$: on a
   $$0 \leq g_n(x) = e^{-x} - f_n(x) = e^{-x} \leq e^{-n}.$$
   - Sur le segment $[0, n]$, la fonction positive g_n est continue, donc bornée et atteint son maximum en un point $x_n \in [0, n]$. Si $x_n \in]0, n[$, alors (puisque g_n est dérivable sur $]0, n[$ par opérations), on a nécessairement $g_n'(x_n) = 0$, et donc d'après la question précédente $g_n(x_n) \leq \frac{1}{ne}$. Sinon, $g_n(x_n) \in \{g_n(0), g_n(n)\} = \{0, e^{-n}\}$.

   Ceci montre que g_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et que $\|g_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \max\left(e^{-n}, \frac{1}{en}\right) \leq e^{-n} + \frac{1}{en} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, d'où la convergence uniforme de (g_n) vers 0, et donc la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ de (f_n) vers f.

Exercice 6 (*Suite de fonctions définie par récurrence)**
Pour $t \geq 0$, on pose $f_0(t) = 0$ et $f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la limite simple, qu'on notera ℓ, de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.
2. A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
3. Démontrer : $\forall t > 0$, $|f_{n+1}(t) - \ell(t)| \leq \dfrac{|f_n(t) - \ell(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4. En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a\,; +\infty[$ avec $a > 0$ (remarquer que $f_n - \ell$ est bornée pour $n \geq 1$).

Corrigé de l'exercice 6

1. Fixons $t \in \mathbb{R}^+$ considérons la fonction $\phi_t : x \mapsto \sqrt{t + x}$, qui est continue sur $\mathbb{R}^+$, croissante, et vérifie $\phi_t(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. Etudions la suite numérique $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$, qui vérifie les relations :
$$f_0(t) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(t) = \phi_t(f_n(t)).$$
Les propriétés de ϕ_t donnent immédiatement que la suite $(f_n(t))_n$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Or ϕ_t est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et
$$f_1(t) = \phi_t(f_0(t)) = \phi_t(0) = \sqrt{t} \geq f_0(t),$$
donc on obtient par récurrence immédiate que $f_{n+1}(t) \geq f_n(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $(f_n(t))_n$ est croissante.
Examinons maintenant la convergence : si $f_n(t) \underset{n \to +\infty}{\to} \ell(t)$, alors $\ell(t) \in \mathbb{R}^+$ et en passant à la limite dans la relation $f_{n+1}(t) = \phi_t(f_n(t))$, on obtient par continuité de Φ_t :
$$\ell(t) = \phi_t(\ell(t)) = \sqrt{t + \ell(t)},$$
donc $\ell^2(t) - \ell(t) - t = 0$, ce qui impose $\ell(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1+4t}}{2}$. Il y a donc deux limites possibles. Voyons maintenant si $(f_n(t))_n$ converge.

- Si $t > 0$, alors une seule limite est possible, celle qui est positive : $\ell(t) = \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$.
  La suite $(f_n(t))$ converge vers $\ell(t)$ si et seulement si elle est majorée par $\ell(t)$ (dans le cas d'une suite monotone, la limite est la borne sup), ce que l'on vérifie facilement par récurrence :
  $$f_0(t) = 0 \in [0, \ell(t)],$$
  et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $$f_n(t) \in [0, \ell(t)] \implies f_{n+1}(t) \in [\phi_t(0), \phi_t(\ell(t))] = [\sqrt{t}, \ell(t)]$$
  (par croissance de ϕ_t).
  Etant croissante et majorée, la suite $(f_n(t))_n$ converge, vers l'unique point fixe positif $\ell(t) = \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$.
- Si $t = 0$, alors puisque $f_0(0) = 0$ et $f_{n+1}(0) = \phi_0(f_n(0)) = \sqrt{f_n(0)}$, la suite $(f_n(0))_n$ est constante égale à 0, donc converge vers $\ell(0) = 0$ (qui est bien un des deux points fixes précédemment déterminés).

Finalement, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction

$$\ell : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2} & \text{si } t > 0 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

2. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$ (facile par récurrence), mais leur limite simple ℓ ne l'est pas (discontinue en 0), donc (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
3. Soit $t > 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$|f_{n+1}(t) - \ell(t)| = |\phi_t(f_n(t)) - \phi_t(\ell(t))| = \left|\sqrt{t + f_n(t)} - \sqrt{t + \ell(t)}\right|$$
   $$= \frac{|t + f_n(t) - t - \ell(t)|}{\underbrace{\sqrt{t + f_n(t)}}_{>0} + \underbrace{\sqrt{t + \ell(t)}}_{>0}} = \frac{|f_n(t) - \ell(t)|}{\sqrt{t + f_n(t)} + \sqrt{t + \ell(t)}} \leq \frac{|f_n(t) - \ell(t)|}{2\sqrt{t + f_n(t)}}$$
   (puisque $0 \leq f_n(t) \leq \ell(t)$), donc finalement $|f_{n+1}(t) - \ell(t)| \leq \dfrac{|f_n(t) - \ell(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4. Soit $a > 0$. Pour tout réel $t \geq a$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par itération de l'inégalité précédente :
   $$|f_n(t) - \ell(t)| \leq \frac{|f_{n-1}(t) - \ell(t)|}{2f_n(t)} \leq \frac{|f_{n-2}(t) - \ell(t)|}{2^2 f_n(t) f_{n-1}(t)} \leq \cdots \leq \frac{|f_1(t) - \ell(t)|}{2^{n-1} f_n(t) f_{n-1}(t) \cdots f_2(t)}.$$
   Or,
   $$|f_1(t) - \ell(t)| = \ell(t) - f_1(t) = \frac{1 + \sqrt{1+4t}}{2} - \sqrt{t} \leq \frac{1 + 1 + \sqrt{4t}}{2} - \sqrt{t} \leq 1,$$
   et chaque fonction f_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$ (facile par récurrence), donc
   $$|f_n(t) - \ell(t)| \leq \frac{1}{2^{n-1} f_n(t) f_{n-1}(t) \cdots f_2(t)} \leq \frac{1}{2^{n-1} \underbrace{f_n(a) f_{n-1}(a) \cdots f_2(a)}_{>0}}.$$
   Terminons en minorant le dénominateur : puisque $f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\to} \ell(a) > 1$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ **(qui dépend seulement de a, mais pas de t)** à partir duquel on a $f_n(a) \geq 1$, donc
   $$\forall n \geq n_0,\ \forall t \geq a, \qquad |f_n(t) - \ell(t)| \leq \frac{1}{2^{n-1} f_{n_0}(a) f_{n_0-1}(a) \cdots f_2(a)}.$$
   Ainsi, pour $n \geq n_0$, on a $\|f_n - \ell\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{1}{2^{n-1} f_{n_0}(a) f_{n_0-1}(a) \cdots f_2(a)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, ce qui montre que (f_n) converge uniformément vers ℓ sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

II Exercices théoriques

Exercice 7 (Approximation de la dérivée par différences finies)**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et de dérivée seconde bornée. Montrer que la suite des fonctions $g_n : x \mapsto n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$ converge uniformément vers f'.

Corrigé de l'exercice 7
Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque f est dérivable en x, on a $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$, donc par composition de limites :

$$g_n(x) = \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} f'(x),$$

ce qui montre que (g_n) converge simplement vers f' sur $\mathbb{R}$.
Majorons ensuite l'écart entre g_n et f' : pour tout réel x et tout entier $n \geq 1$:

$$g_n(x) - f'(x) = n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right) - f'(x) = n\int_x^{x+\frac{1}{n}} (f'(t) - f'(x))dt,$$

donc

$$|g_n(x) - f'(x)| \leq n\int_x^{x+\frac{1}{n}} |f'(t) - f'(x)|dt.$$

Or, puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ et f'' est bornée sur $\mathbb{R}$:

$$|f'(t) - f'(x)| = \left|\int_x^t f''(u)du\right| \leq \left|\int_x^t |f''(u)|du\right| \leq \|f''\|_\infty |t-x|,$$

donc

$$|g_n(x) - f'(x)| \leq n\|f''\|_\infty \int_x^{x+\frac{1}{n}} |t-x|dt = n\|f''\|_\infty \int_x^{x+\frac{1}{n}} (t-x)dt = \frac{\|f''\|_\infty}{2n}.$$

Ainsi, $\|g_n - f'\|_\infty \leq \dfrac{\|f''\|_\infty}{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc (g_n) converge uniformément vers f' sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (Composition par une fonction uniformément continue)**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie et X une partie de E.

1. Soit une suite d'applications (f_n) de X vers E, $f : X \to E$ et $g : E \to F$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur X et que g est uniformément continue. Montrer que $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur X.
2. Le résultat précédent reste-t-il vrai en remplaçant l'hypothèse de continuité uniforme par la continuité ?

Corrigé de l'exercice 8

Remarque
Dans le CH10, la convergence uniforme n'a été définie que pour des suites de fonctions à valeurs réelles ou complexes, mais cette notion se généralise aux fonctions à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie F, en remplaçant la valeur absolue par la norme choisie sur F.

1. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. La fonction $g : E \to F$ étant uniformément continue, il existe un réel $\delta > 0$ tel que
$$\forall (y,z) \in E^2, \quad \|y - z\|_E \leq \delta \implies \|g(y) - g(z)\|_F \leq \varepsilon.$$
En outre, la convergence uniforme de (f_n) vers f se traduit par
$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\|_E \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$
donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq n_0 \implies (\forall x \in X,\ \|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \delta).$$

Ainsi, pour $n \geq n_0$, on a $(\forall x \in X,\ \|g(f_n(x)) - g(f(x))\|_F \leq \varepsilon)$, ce qui montre que $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$.

2. Si (f_n) converge uniformément vers f et si g est continue, alors $(g \circ f_n)$ converge simplement vers $g \circ f$ (par composition de limites), mais ne converge pas toujours uniformément. Par exemple, si $g : x \mapsto x^2$ (qui n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$), alors la suite $f_n : x \mapsto x + \frac{1}{n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto x$ (puisque $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n}$), mais (f_n^2) converge simplement et non uniformément vers f^2 puisque :

$$|f_n^2(x) - f^2(x)| = \left|\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2\right| = \left|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right|,$$

donc les fonctions $(f_n^2 - f^2)$ ne sont même pas bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 (*Un exemple d'approximation de l'unité)**

On considère la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -\frac{1}{n} \\ n^2\left(x + \frac{1}{n}\right) & \text{si} \quad -\frac{1}{n} \leq x \leq 0 \\ n^2\left(-x + \frac{1}{n}\right) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

On peut alors définir, pour tout fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 1$, la fonction $f * h_n$ de la manière suivante :

$$f * h_n(x) = \int_{-1}^{1} h_n(t) f(x-t) dt,$$

que l'on appelle **produit de convolution de f par h_n.**

1. Calculer $\int_{-1}^{1} h_n$ pour tout $n \geq 1$.
   En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de $f * h_n(x) - f(x)$ comme une intégrale sur $[-1, 1]$.
2. On suppose dans cette question que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   Majorer alors $|f * h_n(x) - f(x)|$ à l'aide du résultat précédent. En déduire que $(f * h_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose dans cette question que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f * h_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.
4. On suppose dans cette question que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f * h_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 9

1. Le calcul de $\int_{-1}^{1} h_n$ est facile puisque h_n est affine sur $[-1/n, 0]$, sur $[0, 1/n]$ et nulle ailleurs.
   On obtient $\int_{-1}^{1} h_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Pour tout réel x, on en déduit

$$f * h_n(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} (f(x-t) - f(x)) h_n(t) dt.$$

2. Supposons qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

   On a alors, pour tout réel x et tout entier $n \geq 1$:

$$|f * h_n(x) - f(x)| \leq \int_{-1}^{1} |f(x-t) - f(x)| h_n(t) dt \leq \int_{-1}^{1} M|t| h_n(t) dt.$$

   puisque h_n est positive. Or h_n est également paire, donc

$$|f * h_n(x) - f(x)| \leq 2M \int_{0}^{1} t h_n(t) dt = 2Mn^2 \int_{0}^{1/n} t\left(\frac{1}{n} - t\right) dt = \frac{M}{3n}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f * h_n - f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et

$$\|f * h_n - f\|_\infty \leq \frac{M}{3n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

d'où la convergence uniforme de $(f * h_n)_n$ vers f sur $\mathbb{R}$.

3. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |f * h_n(x) - f(x)| \leq \int_{-1}^{1} |f(x-t) - f(x)| h_n(t)dt = \int_{-1/n}^{1/n} |f(x-t) - f(x)| h_n(t)dt.$$

Or, par continuité de f au point x, on a $f(x-t) - f(x) \underset{t\to 0}{\to} 0$, donc il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad t \in [-\delta, \delta] \implies |f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n > \lfloor 1/\delta \rfloor \implies \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \subset [-\delta, \delta] \implies |f * h_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{-1/n}^{1/n} h_n(t)dt = \varepsilon.$$

On a donc montré que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies |f * h_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f * h_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x).$$

Il s'agit donc bien de convergence simple sur $\mathbb{R}$ (et non pas uniforme, car le rang n_0 dépend du point x).

4. On fixe $\varepsilon > 0$ et on procède de même pour majorer $|f*h_n(x) - f(x)|$, mais cette fois, la continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}$ donne :

$$\exists \delta > 0,\ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad t \in [-\delta, \delta] \implies |f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

(le δ ne dépend pas de x).
De même qu'à la question précédente, on a donc, en posant $n_0 = \lfloor 1/\delta \rfloor + 1$:

$$n \geq n_0 \implies \forall x \in \mathbb{R},\ |f * h_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{-1/n}^{1/n} h_n(t)dt = \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$n \geq n_0 \implies \|f * h_n - f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien la convergence uniforme de $(f * h_n)_n$ vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 (*Un théorème de Dini)**
Soient des fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, la suite réelle $\big(f_n(x)\big)$ est décroissante. On désire montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme.

1. Justifier l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.
3. En observant que pour tout $p \leqslant n$, $f_n(x_n) \leqslant f_p(x_n)$, montrer que $\|f_n\|_\infty \to 0$ et conclure.

Corrigé de l'exercice 10

1. Par hypothèse, pour tout réel $x \in [a,b]$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ décroît vers 0, donc en particulier $f_n(x) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, les f_n sont positives et continues sur le segment $[a,b]$, donc en particulier bornées. Or, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [a,b], \quad 0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \leq \|f_n\|_\infty,$$

donc
$$\|f_{n+1}\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f_{n+1}(x)| = \sup_{x\in[a,b]} f_{n+1}(x) \leq \|f_n\|_\infty.$$
La suite numérique $(\|f_n\|_\infty)$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

2. Chaque f_n est continue sur le compact $[a,b]$ donc elle est bornée et atteint son maximum : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que
$$f_n(x_n) = \sup_{x\in[a,b]} f_n(x) = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = \|f_n\|_\infty.$$

3. Fixons $p \in \mathbb{N}$. Par décroissance de la suite $(f_k(x_n))_{k\in\mathbb{N}}$, on a
$$n \geq p \implies f_n(x_n) \leq f_p(x_n).$$
Essayons maintenant de passer à la limite : la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (formée des points où les f_n atteignent leur maximum) est à valeurs dans le compact $[a,b]$, donc d'après la propriété de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $x^* \in [a,b]$.
Or, pour tout $n \geq p$, on a $\varphi(n) \geq n \geq p$ donc
$$n \geq p \implies f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \leq f_p(x_{\varphi(n)}) \implies \|f_{\varphi(n)}\|_\infty \leq f_p(x_{\varphi(n)}).$$
Puisque $\|f_{\varphi(n)}\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$ et puisque $f_p(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\to} f_p(x^*)$ (par continuite de f_p), on obtient par passage à la limite l'inégalité $\ell \leq f_p(x^*)$.
Enfin, le point x^* ne dépend pas de p, donc par convergence simple, on a $f_p(x^*) \underset{p\to+\infty}{\to} 0$, ce qui entraîne $\ell \leq 0$, donc $\ell = 0$.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = \ell = 0$, donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a,b]$.

III Utilisations de la convergence uniforme

Exercice 11 (Limite d'une suite d'intégrales)**
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx$.

Corrigé de l'exercice 11
La suite de fonctions continues $f_n : \left\{\begin{array}{ccc} [0,\pi/4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan^n(x)\end{array}\right.$ converge simplement vers la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} [0,\pi/4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } 0 \leq x < \pi/4 \\ 1 & \text{si } x = \pi/4\end{array}\right.\end{array}\right.$, qui est discontinue, donc (f_n) ne converge pas uniformément sur le segment $[0,\pi/4]$. On ne peut donc pas appliquer le théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment. Pour contourner ce problème, on peut procéder de plusieurs manières :

- **Par une méthode de découpe** : soit $\varepsilon > 0$. Par relation de Chasles :
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} \tan^n(x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\tan^n(x)}_{\leq 1}dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} \tan^n(x)dx + \varepsilon.$$
Par croissance de $x \mapsto \tan(x)$ sur $[0,\pi/4]$, on a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} \tan^n(x)dx \leq \left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)\tan^n\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)$ donc
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx \leq \frac{\pi}{4}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right) + \varepsilon.$$
Enfin, $\frac{\pi}{4}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (suite géométrique de raison $\tan(\pi/4-\varepsilon) \in [0,1[$) donc il existe un entier n_0 tel que
$$n \geq n_0 \implies \frac{\pi}{4}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right) \leq \varepsilon \implies 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx \leq 2\varepsilon.$$
On en conclut que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

- **Par majoration 1** : avec le changement de variable $u = \tan(x)$, on a

$$0 \leq \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)dx = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2}du \leq \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

- **Par majoration 2** : tan est convexe sur $[0, \pi/4]$ (puisque $\tan' : x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ est croissante), donc son graphe est situé en-dessous de la corde reliant les points $(0, \tan(0)) = (0, 0)$ et $(\pi/4, \tan(\pi/4)) = (\pi/4, 1)$, ce qui donne l'inégalité $\tan(x) \leq \frac{4}{\pi}x$, et donc

$$0 \leq \int_0^{\pi/4} \left(\frac{4}{\pi}x\right)^n dx = \left(\frac{4}{\pi}\right)^n \frac{(\pi/4)^{n+1}}{n+1} = \frac{\pi}{4(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

- **Par convergence dominée** (voir CH.12) c'est bien plus simple : la suite de fonctions (f_n) continues par morceaux converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, \pi/4[$, et on a la domination $|f_n| \leq 1$ pour tout n, avec la fonction $t \mapsto 1$ intégrable sur $[0, \pi/4[$, donc d'après le théorème de convergence dominée, on en déduit $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^{\pi/4} 0 = 0$.

Exercice 12 (*Initiation aux séries de fonctions)**
On pose $\zeta_2 : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$. Montrer que la fonction ζ_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
Cet exercice sera beaucoup plus simple à traiter lorsqu'on disposera des théorèmes adaptés aux séries de fonctions.

Corrigé de l'exercice 12
Raisonnons avec les sommes partielles

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^x} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k e^{-x\ln(k)},$$

auxquelles on applique le théorème de dérivation d'une suite de fonctions :

- Chaque S_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ (comme somme finie de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$), de dérivée :

$$S_n' : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\ln(k)}{k^x}$$

- La suite (S_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers ζ_2 : en effet, pour tout réel $x > 0$, la série numérique $\sum_{k\geq1} \frac{(-1)^k}{k^x}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées (puisque la suite $k \mapsto \frac{1}{k^x}$ décroît vers 0). Ceci montre que ζ_2 est définie sur $]0, +\infty[$.
- Montrons que la suite (S_n') converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$.
  D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{k\geq1} \frac{(-1)^{k+1}\ln(k)}{k^x}$ converge pour tout $x > 0$ (on vérifie facilement que $k \mapsto \frac{\ln(k)}{k^x}$ décroît vers 0 à partir d'un certain rang en étudiant la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$ sur $]0, +\infty[$), donc la suite (S_n') converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $T : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}\ln(k)}{k^x}$.
  De plus, chaque reste $R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} \frac{(-1)^{k+1}\ln(k)}{k^x}$ est majoré en valeur absolue par son premier terme (toujours d'après le CSSA), donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [a, b], \qquad |S_n'(x) - T(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a},$$

  donc $\|S_n' - T\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, ce qui montre la convergence uniforme de (S_n') sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation d'une suite de fonctions, la fonction ζ_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 13 (*Méthode d'approximation d'une solution d'une équa diff)**
Soit $\gamma \in [0, 1[$. On définit la suite (u_n) de fonctions de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(\gamma t)dt.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
2. En déduire que (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. On note u sa limite.
3. Montrer que cette convergence est même uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.
En déduire que u est une fonction non nulle et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u'(x) = u(\gamma x)$.

Corrigé de l'exercice 13

1. On procède par récurrence :
   - pour $n = 0$: pour tout réel $x \geq 0$, on a $u_1(x) - u_0(x) = 1 + x - 1 = x$ donc
   $$0 \leq u_1(x) - u_0(x) \leq \frac{x^1}{1!}.$$
   - soit $n \in \mathbb{N}$. Si on a $0 \leq u_{n+1}(z) - u_n(z) \leq \dfrac{z^{n+1}}{(n+1)!}$ pour tout $z \in \mathbb{R}^+$, alors pour tout réel $x \geq 0$, on a
   $$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x (u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t))\, dt,$$
   donc en appliquant l'inégalité précédente à $z = \gamma t$, on obtient par croissance de l'intégrale :
   $$0 \leq u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leq \int_0^x \frac{(\gamma t)^{n+1}}{(n+1)!} dt = \gamma^{n+1} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)!},$$
   puisque $\gamma \in [0, 1[$.

   On en conclut par récurrence que $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+,\ 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. La série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ converge (par la régle de d'Alembert), donc par comparaison de SATP, la série téléscopique $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1}(x) - u_n(x))$ converge. On en déduit que la suite $(u_n(x))_n$ converge vers un réel $u(x)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.
3. Fixons un segment $[0, A]$ avec $A > 0$, et montrons que (u_n) converge uniformément vers u sur $[0, A]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, A]$ et $N \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=n}^{N} (u_{k+1}(x) - u_k(x)) = u_{N+1}(x) - u_n(x),$$
donc en faisant tendre $N \to +\infty$:
$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1}(x) - u_k(x)) = u(x) - u_n(x),$$
d'où la majoration
$$|u(x) - u_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1}(x) - u_k(x)) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{A^{k+1}}{(k+1)!} = R_n(A).$$

Ceci montre que $\|u - u_n\|_{\infty,[0,A]} \leq R_n(A)$, avec $R_n(A) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (comme reste d'une série convergente), d'où la convergence uniforme sur tout segment voulue.
On conclut en passant à la limite dans la relation de récurrence qui définit les (u_n) : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(\gamma t)dt,$$

mais $u_{n+1}(x) \underset{n\to+\infty}{\to} u(x)$, et $\displaystyle\int_0^x u_n(\gamma t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^x u(\gamma t)dt$
(vu que $\left|\displaystyle\int_0^x u_n(\gamma t)dt - \int_0^x u(\gamma t)dt\right| \leq x\|u_n - u\|_{\infty,[0,\gamma x]} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$), donc finalement on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad u(x) = 1 + \int_0^x u(\gamma t)dt, \qquad (*)$$

En outre les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$ (facile par récurrence), donc par convergence uniforme sur tout segment, la fonction u est également continue sur $\mathbb{R}^+$.
Par le théorème fondamental de l'analyse, la relation $(*)$ montre que u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ u'(x) = u(\gamma x)$. Enfin, u est non nulle car $u(0) = 1$ (toujours d'après $(*)$).

IV Approximation polynomiale

Exercice 14 (*Autour du théorème de Weierstrass)

1. Soit I un intervalle réel, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur I, convergeant uniformément sur I vers une fonction f. Montrer que f est bornée sur I.
2. En déduire un contre-exemple au théorème de Weierstrass sur un intervalle non fermé.

Corrigé de l'exercice 14

1. Si (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors les fonctions $f - f_n$ sont bornées sur I à partir d'un certain rang, et puisque les f_n sont bornées sur I, on en déduit par somme que $f = (f - f_n) + f_n$ est bornée sur I.
2. La fonction $f : x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0,1]$ mais pas limite uniforme de polynômes. En effet, si on avait une suite (f_n) de polynômes qui convergeait uniformément vers f sur $]0,1]$, alors puisque les f_n sont bornées sur $]0,1]$ (car prolongeables continûment sur $[0,1]$ en tant que polynômes), f serait bornée sur $]0,1]$ (d'après la question précédente). Mais f est non bornée sur $]0,1]$, donc une telle suite (f_n) n'existe pas.

Exercice 15 (Autour du théorème de Weierstrass 2)**
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.

1. Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout n supérieur ou égal à N, on ait pour tout réel x, $|P_n(x) - P_N(x)| \leqslant 1$.
   Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_N$ lorsque $n \geqslant N$?
2. Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.
   Qu'a-t-on ainsi mis en évidence concernant le théorème de Weierstrass ?

Corrigé de l'exercice 15

1. Par définition de la convergence uniforme avec $\varepsilon = 1/2$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |P_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

   On a donc par inégalité triangulaire

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |P_n(x) - P_N(x)| \leq \underbrace{|P_n(x) - f(x)|}_{\leq 1/2} + \underbrace{|f(x) - P_N(x)|}_{\leq 1/2} \leq 1.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$, la fonction polynomiale $P_n - P_N$ est bornée sur $\mathbb{R}$, donc constante (en effet, si Q est un polynôme de degré $d \geq 1$, alors $Q(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_d x^d \underset{x\to\pm\infty}{\to} \pm\infty$).

2. Pour tout entier $n \geq N$, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) - P_N(x) = P_n(0) - P_N(0).$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient par convergence simple de P_n vers f (qui résulte de la convergence uniforme supposée) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = P_N(x) + f(0) - P_N(0),$$

et donc f est manifestement polynomiale.
On a donc montré que le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass ne fonctionne pas sur $\mathbb{R}$ (ni sur un intervalle non borné d'ailleurs, puisque le raisonnement précédent fonctionne dès que l'intervalle sur lequel on travaille est un voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$).
En d'autres termes, il est impossible d'approcher une fonction continue (non polynomiale) par une suite de polynômes uniformément sur $\mathbb{R}$.

Remarque
Les deux exercices précédents montrent que le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass ne fonctionne que sur un intervalle fermé-borné (segment), c'est-à-dire un compact.

Exercice 16 (*Démonstration du th. de Weierstrass par les polynômes de Bernstein)**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x)$, $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x)$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x)$.
   Une méthode consiste à introduire, pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $g : x \mapsto (x+y)^n$ et à en considérer les dérivées...
2. Soient $\alpha > 0$ et $x \in [0,1]$. On forme les ensembles :

$$A = \left\{ k \in [\![0,n]\!] \, / \left| \frac{k}{n} - x \right| \geqslant \alpha \right\} \text{ et } B = \left\{ k \in [\![0,n]\!] \, / \left| \frac{k}{n} - x \right| < \alpha \right\}.$$

   Montrer que $\sum_{k \in A} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$.
3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ continue. On pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$.
   Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
4. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass.

Corrigé de l'exercice 16

1. Par la formule du binôme, on a

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = (x + (1-x))^n = 1.$$

   En suivant la méthode de dérivation indiquée, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) = nx, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) = nx + n(n-1)x^2.$$

2. Si $k \in A$, on a $\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \geq \alpha^2$ donc

$$\sum_{k \in A} B_{n,k}(x) \leq \sum_{k \in A} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_{n,k}(x).$$

Par positivité des polynômes $B_{n,k}$ sur $[0,1]$ et d'après les calculs de la question précédente, on obtient la majoration :

$$\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{1}{n^2\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}\left(k^2-2nxk+n^2x^2\right)B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}.$$

Enfin, $\forall x\in[0,1],\ x(1-x)\leq 1/4$, donc

$$\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

3. On a, pour tout $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$:

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} f(x)B_{n,k}(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x).$$

Utilisons alors la continuité uniforme de f sur le segment $[0,1]$ (qui résulte du théorème de Heine) pour majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|$. On fixe $\varepsilon>0$. Il existe un réel $\alpha>0$ tel que

$$\forall (x,y)\in[0,1]^2,\qquad |x-y|\leq\alpha \implies |f(x)-f(y)|\leq\varepsilon.$$

Introduisons alors les ensembles A et B associés à ce α, comme dans la question précédente. Puisque $A\cup B = [\![0,n]\!]$, et $A\cap B=\emptyset$, on a, pour tout $x\in[0,1]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)| &\leq \sum_{k\in A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x) + \sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)\\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2} + \sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x).\end{aligned}$$

Or, pour tout $k\in B$, on a $\left|\frac{k}{n}-x\right|<\alpha$, donc $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leq\varepsilon$. D'où

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2} + \sum_{k\in B}\varepsilon B_{n,k}(x) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2}+\varepsilon.$$

Enfin, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2}=0$, il existe un entier $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$n\geq n_0 \implies \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2}\leq\varepsilon.$$

Donc :

$$\forall n\geq n_0,\ \forall x\in[0,1],\quad |f_n(x)-f(x)|\leq 2\varepsilon.$$

Ceci montre que $\|f_n-f\|_{\infty,[0,1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4. Puisque les (f_n) sont polynomiales, on a prouvé le théorème de Weierstrass sur le segment $[0,1]$. Passons maintenant au cas d'un segment $[a,b]$ quelconque (avec $a<b$).
Etant donnée $g\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$, on se ramène au cas précédent en posant

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ t & \longmapsto & f(t)=g((1-t)a+tb)\end{array}\right..$$

Par composition, f est continue sur $[0,1]$ donc il existe une suite de polynômes (f_n) telle que $\|f_n-f\|_{\infty,[0,1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Introduisons alors les polynômes

$$g_n:\left\{\begin{array}{ccc}[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ x & \longmapsto & f_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\end{array}\right..$$

On a :

$$\forall x\in[a,b],\qquad |g_n(x)-g(x)|\leq\|f_n-f\|_{\infty,[0,1]},$$

donc

$$\|g_n-g\|_{\infty,[a,b]}\leq\|f_n-f\|_{\infty,[0,1]}$$

(on a même égalité en fait). On en déduit $\|g_n-g\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que (g_n) converge uniformément vers g sur $[a,b]$.

Exercice 17 (Approximation polynomiale améliorée)**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que $\|f - P_n\|_\infty \to 0$ et $\|f' - P_n'\|_\infty \to 0$.

Corrigé de l'exercice 17
On utilise le théorème de Weierstrass pour approcher f' (qui est continue sur $[a,b]$) : il existe une suite (Q_n) de fonctions polynomiales telle que $\|f' - Q_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. On fait ensuite "remonter" la convergence uniforme sur les primitives (comme dans le cours) : la suite

$$(P_n : x \mapsto f(a) + \int_a^x Q_n)_n$$

vérifie les conditions voulues puisque les P_n sont polynomiales, on a $P_n' = Q_n$ donc $\|f' - P_n'\|_\infty = \|f' - Q_n\|_\infty \to 0$ et

$$\|f - P_n\|_\infty = \left\|x \mapsto f(x) - f(a) - \int_a^x Q_n\right\|_\infty = \left\|x \mapsto \int_a^x (f' - Q_n)\right\|_\infty \leq (b-a)\|f' - Q_n\|_\infty \to 0.$$

Exercice 18 (Avec interpolation de Lagrange)**
Soit $m \geq 1$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_m[X]$ convergeant simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f. En utilisant l'interpolation de Lagrange sur $m+1$ points distincts de $[a,b]$, montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à m et que la convergence est uniforme.

Corrigé de l'exercice 18
Fixons $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_m \leq b$ (avec $m \in \mathbb{N}$), et notons $(L_0, \cdots, L_m)$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_m[X]$ associée aux points $(x_j)_{0\leq j\leq m}$:

$$\forall i \in [\![0,m]\!], \qquad L_i(X) = \prod_{j\neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \in \mathbb{R}_m[X]$ donc P_n se décompose sur la base $(L_0, \cdots, L_m)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n = \sum_{j=1}^{m} P_n(x_j) L_j$$

(pour retrouver les coordonnées, poser $P_n = \sum_{j=1}^m \lambda_{j,n} L_j$ et évaluer en x_k).
On a donc

$$\forall x \in [a,b],\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n(x) = \sum_{j=1}^{m} P_n(x_j) L_j(x),$$

donc par convergence simple supposée de (P_n) vers f, on obtient en faisant tendre $n \to +\infty$:

$$\forall x \in [a,b], \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j) L_j(x),$$

ce qui montre que f est polynomiale de degré $\leq m$.
Enfin, (P_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$ car

$$\forall x \in [a,b],\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |P_n(x) - f(x)| = \left|\sum_{j=1}^{m} (P_n(x_j) - f(x_j)) L_j(x)\right| \leq C_m \sum_{j=1}^{m} |P_n(x_j) - f(x_j)|,$$

où $C_m = \max\left(\|L_0\|_{\infty,[a,b]}, \cdots, \|L_m\|_{\infty,[a,b]}\right)$, donc

$$\|P_n - f\|_{\infty,[a,b]} \leq C_m \sum_{j=1}^{m} |P_n(x_j) - f(x_j)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Exercice 19 (Un contre-exemple)**
On considère la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } x = \frac{1}{k} \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. La fonction f est-elle continue par morceaux ?
2. Montrer que f est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier (on dit que f *est réglée*).
3. La limite uniforme d'une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux est-elle continue par morceaux ? Quelle remarque topologique peut-on faire sur $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ en tant que partie de l'evn $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K}),\|.\|_\infty)$?

Corrigé de l'exercice 19

1. Non car elle possède une infinité de discontinuités, tous les points $(1/k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ (la définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment impose un nombre fini de discontinuités).
2. Prendre (pour $n \in \mathbb{N}^*$) $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = f(x)$ si $\frac{1}{n} < x \leq 1$ et $f_n(x) = 0$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$. La subdivision $\left(\frac{1}{k}\right)_{1\leq k\leq n}$ est alors adaptée à f_n, qui est donc une fonction en escalier, et on a convergence uniforme vers f car $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Non comme le montre l'exemple de la suite (f_n) définie à la question précédente. On en déduit que $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ n'est pas une partie fermée de $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K}),\|.\|_\infty)$.

Exercice 20 (*Un résultat plus fin de densité (théorème de Chudnovsky))**
Soient I un segment inclus dans $]0,1[$ et $E = C(I,\mathbb{R})$, muni de $\|.\|_\infty$.

1. On définit $f : x \mapsto 2x(1-x)$. Étudier les convergences simple et uniforme sur I de la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n = f \circ \cdots \circ f$ (composée n fois).
2. En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans E.

Corrigé de l'exercice 20

1. • **Convergence simple de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $]0,1[$**
Fixons $x \in]0,1[$. La suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ vérifie les relations de récurrence :

$$f_1(x) = f(x), \qquad \forall n \geq 1,\ f_{n+1}(x) = f(f_n(x)).$$

Une étude rapide de la fonction $f : x \mapsto 2x(1-x)$ montre que f croît strictement sur $]0,1/2]$ et décroît strictement sur $[1/2,1[$ avec $f(]0,1/2]) = f([1/2,1[) =]0,1/2]$. On en déduit par récurrence :

$$\forall n \geq 1, \qquad f_n(x) \in]0,1/2].$$

Ceci permet de montrer que $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante car

$$\forall n \geq 1, \qquad f_{n+1}(x) - f_n(x) = f(f_n(x)) - f_n(x) \geq 0,$$

puisque $f(t) - t = t(1-2t) \geq 0$ pour tout $t \in]0,1/2]$.
Etant croissante et majorée par $1/2$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers $\ell \in [0,1/2]$. Mais par continuité de f, la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$, donc $\ell \in \{0,1/2\}$. La croissance et la stricte positivité des termes empêche $\ell = 0$, donc $\ell = 1/2$.
Finalement, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $]0,1[$, donc sur I, vers la fonction constante égale à $1/2$.

 • **Convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur I**
Notons $I = [a,b]$ avec $0 < a < b < 1$, et étudions $\|f_n - 1/2\|_{\infty,I}$. Nous avons la relation de récurrence :

$$\forall x \in I,\ \forall n \geq 1, \qquad \left|f_{n+1}(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|2f_n(x)(1-f_n(x)) - \frac{1}{2}\right| = 2\left|f_n(x) - \frac{1}{2}\right|^2,$$

donc par récurrence on obtient :

$$\forall x \in I, \qquad \forall n \geq 1, \qquad \left| f_n(x) - \frac{1}{2} \right| = 2^{1+2+\cdots+2^{n-2}} \left| f_1(x) - \frac{1}{2} \right|^{2^{n-1}} = 2^{2^{n-1}-1} \left| f_1(x) - \frac{1}{2} \right|^{2^{n-1}},$$

et $\left|f_1(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|2x(1-x) - \frac{1}{2}\right| = 2\left|x - \frac{1}{2}\right|^2$, donc finalement

$$\forall x \in I, \qquad \forall n \geq 1, \qquad \left| f_n(x) - \frac{1}{2} \right| = 2^{2^n - 1} \left| x - \frac{1}{2} \right|^{2^n}.$$

Puisque $0 < a \leq x \leq b < 1$, on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \qquad \left\| f_n - \frac{1}{2} \right\|_{\infty, I} = \frac{1}{2}(2c)^{2n},$$

où $c = \max(|a - 1/2|, |b - 1/2|) < 1/2$, donc $\left\|f_n - \frac{1}{2}\right\|_{\infty,I} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (vu que $0 \leq 2c < 1$), ce qui montre que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $1/2$ sur le segment I.

2. Une récurrence simple montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est polynomiale à coefficients entiers relatifs.
   - La question précédente montre donc que la fonction constante égale à $1/2$ est limite uniforme sur I des fonctions polynomiales $f_n \in \mathbb{Z}[X]$.
   - Vu que $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre et que la norme $\|.\|_\infty$ est sous-multiplicative ($\forall (f, g) \in E^2,\ \forall x \in I,\ |(fg)(x)| = |f(x)| \times |g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ donc $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$), on en déduit que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n^k)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur I vers la fonction constante égale à $(1/2)^k$ (par passage à la limite dans un produit dans l'algèbre normée $(E, \|.\|_\infty)$.
   - Par somme et multiplication par -1, on obtient que toutes les fonctions constantes du type $x \mapsto \frac{a}{2^k}$ (avec $(a, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$) sont limites uniformes sur I de fonctions de $\mathbb{Z}[X]$.
   - On en déduit facilement que toute fonction polynomiale de $A[X]$ est limite uniforme sur I de fonctions de $\mathbb{Z}[X]$ où $A = \{\frac{a}{2^k},\ (a, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ formé des *nombres dyadiques*.
     En effet, si $p : x \mapsto \sum_{j=0}^m c_j x^j$ avec $c_j \in A$ pour tout j, alors chaque coefficient c_j est (en tant que fonction constante dyadique) limite uniforme sur I d'une suite de fonctions $(c_j^{(n)})_n$ de $\mathbb{Z}[X]$, donc la suite de fonctions

     $$p_n : x \mapsto \sum_{j=1}^{m} c_j^{(n)}(x) x^j$$

     vérifie bien $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \in \mathbb{Z}[X]$ et (p_n) converge uniformément vers p sur I (encore par passage à la limite dans des produits et combinaisons linéaires dans l'algèbre normée $(E, \|.\|_\infty)$.
     A ce stade, on a donc montré que $\overline{\mathbb{Z}[X]} \supset A[X]$ (où l'adhérence est au sens de la norme infinie dans E).
   - Enfin, A est dense dans $\mathbb{R}$ (exercice classique, ça marche comme la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$), donc $\overline{A[X]} \supset \mathbb{R}[X]$. En effet, si $q : x \mapsto \sum_{j=0}^m \lambda_j x^j$ est une fonction polynomiale à coefficients réels, alors chaque λ_j est limite d'une suite $(\lambda_j^{(n)})_n \in A^{\mathbb{N}}$, donc la suite de fonctions

     $$q_n : x \mapsto \sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{(n)} x^j$$

     est une suite de $A[X]$ et converge uniformément vers q sur I par opérations algébriques.
   - On conclut par le théorème de Weierstrass : vu que $\overline{\mathbb{R}[X]} = E$, on déduit des questions précédentes que

     $$\overline{\mathbb{Z}[X]} \supset \overline{A[X]} \supset \overline{\mathbb{R}[X]} = E,$$

     donc $\overline{\mathbb{Z}[X]} \supset E$, et l'inclusion réciproque est vraie car $\mathbb{Z}[X] \subset E$.
     Donc $\overline{\mathbb{Z}[X]} = E$, ce qui prouve la densité de $\mathbb{Z}[X]$ dans E.

V Retour sur les préhilbertiens

Exercice 21 (Suites totales dans un espace préhilbertien)**
Soit E un espace préhilbertien réel, on note $(.|.)$ le produit scalaire dont est muni E.

Définition 1
Une suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *est dite* **totale** *lorsque l'espace vectoriel* $Vect((e_k)_{k\in\mathbb{N}})$ *est dense dans* E *(pour la norme associée au produit scalaire sur* E*).*

1. Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (i) La suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale
   (ii) Pour tout $x \in E$, la suite (x_n) des projetés orthogonaux de x sur les $F_n = Vect(e_0, \cdots, e_n)$ converge vers x.
2. Si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée et totale de E, montrer que
$$\forall x \in E, \qquad x = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$$
(avec convergence de la série), et en déduire la *formule de Parseval* :
$$\forall x \in E, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle^2 = \|x\|^2$$
3. Dans l'espace préhilbertien $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a < b$) muni du produit scalaire
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt,$$
montrer que la suite polynomiale $(t \mapsto t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale. Comment construire une suite orthonormée et totale ?
4. Dans l'espace préhilbertien $E = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k^2 \text{ converge}\}$ muni du produit scalaire
$$(u|v) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k,$$
montrer que la suite (de suites !) $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (e_k)_n = \delta_{n,k}$$
(i.e $e_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, 0, \cdots)$ avec le 1 au rang k) est totale.

Corrigé de l'exercice 21

1. Observons que les SEV $F_n = Vect(e_0, \cdots, e_n)$ forment une suite croissante (au sens de l'inclusion), et on a $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = Vect((e_k)_{k\in\mathbb{N}})$.
Si la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale, alors F est dense dans E. Fixons $x \in E$ et montrons que $(x_n) = (p_{F_n}(x))$ converge vers x. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$, il existe $y \in F$ tel que $\|x - y\| \le \varepsilon$ (par densité de F dans E). Ce y est dans F donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $y \in F_{n_0}$, et par croissance des F_n, on a
$$n \ge n_0 \implies y \in F_n \implies \|x_n - x\| = \|p_{F_n}(x) - x\| \le \|y - x\| \le \varepsilon,$$
donc la suite (x_n) converge vers x.
Réciproquement : si pour tout $x \in E$, la suite $(x_n) = (p_{F_n}(x))$ converge vers x, alors tout vecteur x de E est limite d'une suite (x_n) à valeurs dans F (puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in F_n \subset F$), donc F est dense dans E, c'est-à-dire que $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale.
On a donc bien l'équivalence voulue : la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale ssi pour tout $x \in E$, $(p_{F_n}(x))$ converge vers x.

2. Fixons $x \in E$. Si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de E, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(e_0, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée du SEV $F_n = Vect(e_0, \cdots, e_n)$, donc on a l'expression du projeté orthogonal :
$$\forall x \in \mathbb{N}, \qquad x_n = p_{F_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (x|e_k)e_k.$$
Si de plus $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale, alors d'après la question précédente, $x_n \to x$, c'est-à-dire
$$\sum_{k=0}^{n} (x|e_k)e_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x,$$
ce qui s'écrit
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x|e_k)e_k = x$$
(la somme d'une série vectorielle est par définition la limite de ses sommes partielles, tout comme pour une série réelle).
Par le théorème de Pythagore, on a également
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|x_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} (x|e_k)^2,$$
donc par continuité de la norme :
$$\|x\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \|x_n\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (x|e_k)^2.$$
3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une suite (p_n) de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ (c'est-à-dire $\|p_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$). On en déduit facilement que $p_n \to f$ **pour la norme $\|.\|$ associée au produit scalaire $(.|.)$** puisque
$$\|p_n - f\|^2 = \int_a^b (p_n - f)^2 \leq (b-a)\|p_n - f\|_\infty^2 \to 0.$$
Ainsi, on a montré que l'ensemble des fonctions polynomiales, c'est-à-dire $(Vect(t \mapsto t^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans E (pour la norme associée au produit scalaire), ce qui montre que la suite $(t \mapsto t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale. Pour orthonormaliser cette suite sans changer l'espace engendré, on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et on obtient ainsi une suite de polynômes (q_n) orthonormée et totale.
4. La suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ proposée est orthonormée puisque
$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \qquad (e_n|e_m) = \sum_{k=0}^{+\infty} (e_n)_k (e_m)_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{k,n}\delta_{k,m} = \delta_{n,m}.$$
Utilisons la question 1. pour montrer que $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale : pour $u \in E = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$, le projeté orthogonal de u sur $F_n = Vect(e_0, \cdots, e_n)$ vaut
$$p_{F_n}(u) = \sum_{k=0}^{n} (u|e_k)e_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \ (e_k)_m \right) e_k = \sum_{k=0}^{n} u_k e_k = (u_0, u_1, \cdots, u_n, 0, 0, \cdots).$$
et cette suite converge vers $u = (u_0, u_1, \cdots, u_n, u_{n+1}, \cdots)$ puisque
$$\|p_{F_n}(u) - u\|^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
(c'est le reste d'une série numérique convergente), donc la caractérisation de la question 1. s'applique.