Exercices du CH10 : Suites de fonctions

Exercices de la banque INP à étudier : 9, 10, 11 (exemples d'études de CVU), 12 (limite uniforme de fonctions continues), 48 (fonctions de moments nuls).

I Exemples concrets

Exercice 1 (Exemples d'étude)**
Étudier la convergence simple, uniforme, éventuellement uniforme sur certains segments, des suites de fonctions :

$$(a)\ f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{nx}{1+n^2x^2} \end{array}\right. ,\quad (b)\ f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \end{array}\right. ,\quad (c)\ f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{n(1+x^n)} \end{array}\right. ,$$

$$(d)\ f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^n-1}{x^n+1} \end{array}\right. ,\quad (e)\ f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right) \end{array}\right. ,$$

$$(f)\ f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} x^2\sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{array}\right. \end{array}\right. ,\quad (g)\ f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \end{array}\right. .$$

Exercice 2 (*Fonctions définies en deux morceaux)
Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in \left[0\,;\frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) ?
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ avec $a>0$.

Exercice 3 (*Convergence uniforme et dérivation)
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.
2. Étudier la convergence de $(f_n')_{n\geq 1}$ sur $[-1,1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[-1,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$. Montrer que $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

Exercice 4 (Multiplication par x^n)**
Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$.
On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions sur $[0,1]$ par $f_n : x \mapsto x^n f(x)$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

Exercice 5 (Fonctions définies en deux morceaux 2)**
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite des fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par : $f_n : x \mapsto \left\{\begin{array}{ll} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0\leq x\leq n \\ 0 & \text{si } x>n \end{array}\right.$.
Le but de l'exercice est de montrer que (f_n) converge uniformément vers $x \mapsto e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$. Pour cela on définit, pour tout $n\geq 1$, $g_n : x \mapsto e^{-x} - f_n(x)$.

1. Montrer que les g_n sont positives.
2. Soit x_n un élément de $[0,n]$ qui annule g_n'. Montrer que : $g_n(x_n) = \frac{x_n e^{-x_n}}{n} \leq \frac{1}{en}$.
3. Conclure.

Exercice 6 (*Suite de fonctions définie par récurrence)**
Pour $t \geq 0$, on pose $f_0(t) = 0$ et $f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la limite simple, qu'on notera ℓ, de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.
2. A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
3. Démontrer : $\forall t > 0$, $|f_{n+1}(t) - \ell(t)| \leq \dfrac{|f_n(t) - \ell(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4. En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$ (remarquer que $f_n - \ell$ est bornée pour $n \geq 1$).

II Exercices théoriques

Exercice 7 (Approximation de la dérivée par différences finies)**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et de dérivée seconde bornée. Montrer que la suite des fonctions $g_n : x \mapsto n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$ converge uniformément vers f'.

Exercice 8 (Composition par une fonction uniformément continue)**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie et X une partie de E.

1. Soit une suite d'applications (f_n) de X vers E, $f : X \to E$ et $g : E \to F$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur X et que g est uniformément continue. Montrer que $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur X.
2. Le résultat précédent reste-t-il vrai en remplaçant l'hypothèse de continuité uniforme par la continuité ?

Exercice 9 (*Un exemple d'approximation de l'unité)**
On considère la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -\frac{1}{n} \\ n^2\left(x + \frac{1}{n}\right) & \text{si} \quad -\frac{1}{n} \leq x \leq 0 \\ n^2\left(-x + \frac{1}{n}\right) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

On peut alors définir, pour tout fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 1$, la fonction $f * h_n$ de la manière suivante :

$$f * h_n(x) = \int_{-1}^{1} h_n(t) f(x - t) dt,$$

que l'on appelle **produit de convolution de f par h_n.**

1. Calculer $\int_{-1}^{1} h_n$ pour tout $n \geq 1$.
   En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de $f * h_n(x) - f(x)$ comme une intégrale sur $[-1, 1]$.
2. On suppose dans cette question que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   Majorer alors $|f * h_n(x) - f(x)|$ à l'aide du résultat précédent. En déduire que $(f * h_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose dans cette question que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f * h_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.
4. On suppose dans cette question que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f * h_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 (*Un théorème de Dini)**
Soient des fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, la suite réelle $\big(f_n(x)\big)$ est décroissante. On désire montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme.

1. Justifier l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.
3. En observant que pour tout $p \leqslant n$, $f_n(x_n) \leqslant f_p(x_n)$, montrer que $\|f_n\|_\infty \to 0$ et conclure.

III Utilisations de la convergence uniforme

Exercice 11 (Limite d'une suite d'intégrales)**
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx$.

Exercice 12 (*Initiation aux séries de fonctions)**
On pose $\zeta_2 : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$. Montrer que la fonction ζ_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
Cet exercice sera beaucoup plus simple à traiter lorsqu'on disposera des théorèmes adaptés aux séries de fonctions.

Exercice 13 (*Méthode d'approximation d'une solution d'une équa diff)**
Soit $\gamma \in [0,1[$. On définit la suite (u_n) de fonctions de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(\gamma t)dt.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
2. En déduire que (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. On note u sa limite.
3. Montrer que cette convergence est même uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.
   En déduire que u est une fonction non nulle et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u'(x) = u(\gamma x)$.

IV Approximation polynomiale

Exercice 14 (*Autour du théorème de Weierstrass)

1. Soit I un intervalle réel, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur I, convergeant uniformément sur I vers une fonction f. Montrer que f est bornée sur I.
2. En déduire un contre-exemple au théorème de Weierstrass sur un intervalle non fermé.

Exercice 15 (Autour du théorème de Weierstrass 2)**
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.

1. Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout n supérieur ou égal à N, on ait pour tout réel x, $|P_n(x) - P_N(x)| \leqslant 1$.
   Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_N$ lorsque $n \geqslant N$?
2. Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.
   Qu'a-t-on ainsi mis en évidence concernant le théorème de Weierstrass ?

Exercice 16 (*Démonstration du th. de Weierstrass par les polynômes de Bernstein)**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x)$, $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x)$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x)$.
   Une méthode consiste à introduire, pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $g : x \mapsto (x+y)^n$ et à en considérer les dérivées...
2. Soient $\alpha > 0$ et $x \in [0,1]$. On forme les ensembles :
$$A = \left\{k \in [\![0,n]\!] \,/ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \alpha\right\} \text{ et } B = \left\{k \in [\![0,n]\!] \,/ \left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha\right\}.$$
   Montrer que $\sum_{k \in A} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$.
3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ continue. On pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$.
   Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
4. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass.

Exercice 17 (Approximation polynomiale améliorée)**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que $\|f - P_n\|_\infty \to 0$ et $\|f' - P_n'\|_\infty \to 0$.

Exercice 18 (Avec interpolation de Lagrange)**
Soit $m \geq 1$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_m[X]$ convergeant simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f. En utilisant l'interpolation de Lagrange sur $m+1$ points distincts de $[a,b]$, montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à m et que la convergence est uniforme.

Exercice 19 (Un contre-exemple)**
On considère la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } x = \frac{1}{k} \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. La fonction f est-elle continue par morceaux ?
2. Montrer que f est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier (on dit que f *est réglée*).
3. La limite uniforme d'une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux est-elle continue par morceaux ? Quelle remarque topologique peut-on faire sur $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ en tant que partie de l'evn $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$?

Exercice 20 (*Un résultat plus fin de densité (théorème de Chudnovsky))**
Soient I un segment inclus dans $]0,1[$ et $E = C(I,\mathbb{R})$, muni de $\|.\|_\infty$.

1. On définit $f : x \mapsto 2x(1-x)$. Étudier les convergences simple et uniforme sur I de la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n = f \circ \cdots \circ f$ (composée n fois).
2. En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans E.