Exercices du CH09 : Réduction des endomorphismes - aspects algébriques

Exercices de la banque INP à étudier : ex 62 (ex de polynôme annulateur de degré 2), 65 (composition sur $\mathbb{K}[u]$), 88 (endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), 91 (polynôme minimal d'une matrice $3 * 3$), 93 (lemme des noyaux sur un exemple).

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I Pour bien commencer

Exercice 1 (*)
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie tel que $f^2 - 5f + 4Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer que f est diagonalisable.

Corrigé de l'exercice 1
Le polynôme $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$, et annule f, donc f est diagonalisable.

Exercice 2 (*Exemples de calcul de polynômes minimaux)
Tout en réduisant (diagonalisant ou trigonalisant) les matrices qui suivent, déterminer leurs polynômes minimaux :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \; (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Corrigé de l'exercice 2

- On a $rg(A) = 2$, donc $\dim(Ker(A)) = 2$. Ainsi, 0 est valeur propre de A, de multiplicité ≥ 2, donc $\chi_A = X^2(X - \lambda)$ avec $0 + 0 + \lambda = Tr(A) = 3$, donc $\chi_A = X^2(X-3)$.
  On obtient facilement $E_0(A) = Vect((1,-1,0),(1,0,-1))$ et $E_3(A) = Vect(1,1,1)$ donc A est diagonalisable.
  On en déduit que π_A est scindé à racines simples et ses racines sont exactement les valeurs propres de A, donc $\pi_A = (X-1)(X-3)$.
  Enfin, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- Remarquons que $B + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, donc $rg(B+I_3) = 1$ et $\dim(Ker(B+I_3)) = 2$. Ceci montre que -1 est valeur propre de B, de multiplicité ≥ 2. Donc $\chi_B = (X+1)^2(X-\lambda)$, avec $-1-1+\lambda = Tr(B) = -1$, donc $\lambda = 1$, et finalement $\chi_B = (X+1)^2(X-1)$.
  On obtient facilement $E_{-1}(B) = Vect((1,0,1),(0,1,1))$ et $E_1(B) = Vect(1,1,1)$ donc B est diagonalisable.
  On en déduit que π_B est scindé à racines simples et ses racines sont exactement les valeurs propres de B, donc $\pi_B = (X+1)(X-1)$.
  Enfin, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- C étant triangulaire, on a directement $\chi_C = (X-a)^2(X-b)$. Deux cas se présentent alors :
  (a) Si $a = b$, alors C possède une valeur propre triple (à savoir a) : $\chi_C = (X-a)^3$.
  Le polynôme minimal π_C divise χ_C, donc $\pi_C = (X-a)^k$ avec $1 \leq k \leq 3$.
  Vu que $X - a$ n'annule pas C ($C \neq aI_3$), χ_C n'est pas scindé à racines simples donc C n'est

pas diagonalisable. En outre, $(X-a)^2$ annule C puisque

$$(C-aI_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Donc $\pi_C = (X-a)^2$ et la matrice C est triangulaire, donc déjà trigonalisée.

(b) Si $a \neq b$, alors C possède deux valeurs propres : a (double) et b (simple). On a facilement $E_a(C) = Vect(1,0,0)$ de dimension 1, alors que la valeur propre a est de multiplicité 2, donc C n'est pas diagonalisable. Ainsi, π_C divise χ_C, n'est pas scindé à racines simples et a pour racines a et b, donc $\pi_C = (X-a)^2(X-b) = \chi_C$.
Au niveau de la réduction, il n'y a rien à faire, comme dans le cas précédent, puisque la matrice est déjà trigonalisée.

Exercice 3 (*Signe du déterminant)
Montrer que toute matrice réelle de taille n vérifiant $A^3 - 3A - 5I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est de déterminant strictement positif.

Corrigé de l'exercice 3
Supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $P(A) = 0$, où $P(X) = X^3 - 3X - 5$. Une étude de fonction montre que P ne possède qu'une racine réelle $\lambda_0 > 1$, et elle est simple (car P' ne s'annule qu'en ± 1). Puisque P est à coefficients réels, on a donc la factorisation

$$P = (X-\lambda_0)(X-\lambda_1)(X-\overline{\lambda_1}),$$

avec $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En outre on a $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\lambda_0, \lambda_1, \overline{\lambda_1}\}$, donc le polynôme caractéristique (qui est à coefficients réels) est nécessairement de la forme

$$\chi_A = (X-\lambda_0)^{\alpha_0}(X-\lambda_1)^{\alpha_1}(X-\overline{\lambda_1})^{\alpha_1},$$

avec $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{N}^2$. Puisque $\det(A)$ est le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité, on en déduit :

$$\det(A) = \lambda_0^{\alpha_0}\lambda_1^{\alpha_1}\overline{\lambda_1}^{\alpha_1} = \lambda_0^{\alpha_0}|\lambda_1|^{2\alpha_1} > 0.$$

Exercice 4 (*L'inverse est un polynôme en u)
Soit u un automorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
En considérant χ_u, montrer que u^{-1} est un polynôme en u.

Corrigé de l'exercice 4
u étant un automorphisme, 0 n'est pas valeur propre de u donc $\chi_u(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ avec $a_0 \neq 0$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc

$$u \circ \frac{-1}{a_0}(u^{n-1} + a_{n-1}u^{n-2} + \cdots + a_1 Id_E) = Id_E,$$

ce qui montre que $u^{-1} = \frac{-1}{a_0}(u^{n-1} + a_{n-1}u^{n-2} + \cdots + a_1 Id_E) \in \mathbb{K}[u]$.

Exercice 5 (*Recherche de matrices diagonalisables)
Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables telles que $A^4 - 2A^3 + 2A^2 - 2A = -I_n$.

Corrigé de l'exercice 5
Si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifie $A^4 - 2A^3 + 2A^2 - 2A = -I_n$, alors le polynôme

$$P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2(X^2+1).$$

annule A, donc le polynôme minimal π_A divise P dans $\mathbb{R}[X]$. Mais A étant diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, son polynôme minimal est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc ici, la seule possibilité est $\pi_A = X - 1$. Donc $A = I_n$ (puisque $\pi_A(A) = 0$).
Réciproquement la matrice I_n est bien diagonalisable et vérifie l'équation voulue, donc c'est la seule solution au problème.

Exercice 6 (Un endomorphisme matriciel)**
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$.
Montrer que f_A est diagonalisable ssi A est diagonalisable.
Indication : Pour un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, examiner $P(f_A)$.

Corrigé de l'exercice 6
Soit $P = X^k$ avec $k \in \mathbb{N}$. On a

$$P(f_A) = f_A^k : M \mapsto A^k M.$$

Par combinaison linéaire, on en déduit que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(f_A) : M \mapsto P(A)M,$$

c'est-à-dire $P(f_A) = f_{P(A)}$. Montrons alors l'équivalence voulue :

- Si f_A est diagonalisable, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(f_A) = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))}$. On a donc $P(A)M = 0$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, pour $M = I_n$, on obtient $P(A) = 0$. Ainsi, A est annulée par un polynôme scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

- Si A est diagonalisable, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(A) = 0$, et on a directement $P(f_A) = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))}$, ce qui montre que f_A est diagonalisable (car annulé par P scindé à racines simples).

Exercice 7 (Avec des permutations)**
Soit $\sigma \in S_n$. On considère l'endomorphisme $u_\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) \end{array} \right.$.
Est-il diagonalisable ?

Corrigé de l'exercice 7
Le groupe S_n est fini de cardinal $n!$, donc pour tout $\sigma \in S_n$, on a $\sigma^{n!} = Id_{[1,n]}$. On en déduit par composition que $u_\sigma^{n!} = Id_{\mathbb{C}^n}$. Donc le polynôme $X^{n!} - 1$, qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, annule u, ce qui montre que u est diagonalisable.

Exercice 8 (*Comatrice)
Soient $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $com(A)^\top = I_n - A$.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

Corrigé de l'exercice 8
On sait (cf. cours MP2I) que $A \times com(A)^\top = \det(A) I_n$, donc l'hypothèse entraîne

$$A(I_n - A) = \det(A) I_n.$$

En notant $d = \det(A) \in \mathbb{C}$, on obtient que le polynôme $P = X^2 - X + d$ annule A, et son discriminant est $\Delta = 1 - 4d$. Deux cas se présentent alors :

- Si $d \neq 1/4$, alors P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Si $d = 1/4$, alors $P = (X - 1/2)^2$, donc A est diagonalisable ssi $\pi_A = X - 1/2$, c'est-à-dire si et seulement si $A = (1/2) I_n$. Mais dans ce cas, $d = \det(A) = (1/2)^n \neq 1/4$ car $n \geq 3$. Donc A n'est pas diagonalisable.

En définitive, A est diagonalisable ssi $\det(A) \neq 1/4$.

II Autour des polynômes annulateurs

Exercice 9 (Groupe fini de matrices)**
Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$. Établir :

1. Pour tout $M \in G$, $\det(M) = \pm 1$ et $|tr(M)| \leq n$.
   Indication : grâce aux hypothèses, on peut trouver un polynôme annulateur de toute matrice de G...
2. Pour tout $M \in G$, $tr(M^{-1}) = tr(M)$.

Corrigé de l'exercice 9

1. Notons $N = Card(G) \in \mathbb{N}^*$. Puisque tout élément M de G vérifie $M^N = I_n$, on en déduit que toute matrice $M \in G$ est annulée par le polynôme $P = X^N - 1$, qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Donc tous les éléments $M \in G$ sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $Sp_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}_N$ (le groupe des racines N^e de l'unité). Mais si on fixe $M \in G$, on a $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc

$$\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M) \implies \overline{\lambda} \in Sp_{\mathbb{C}}(M),$$

et les valeurs propres λ et $\overline{\lambda}$ ont même multiplicité α_λ dans χ_M. Puisque les éléments de $\mathbb{U}_N$ sont de module 1 et puisque $\det(M)$ est le produit des valeurs propres complexes de M comptées avec multiplicités, on obtient en regroupant les valeurs propres non réelles avec leur conjugué :

$$\det(M) = \left(\prod_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M),\ Im(\lambda)>0} (\underbrace{\lambda \times \overline{\lambda}}_{=|\lambda|^2=1})^{\alpha_\lambda} \right) \times 1^{\alpha_1} \times (-1)^{\alpha_{-1}} = (-1)^{\alpha_{-1}} \in \{-1, 1\}.$$

De même :

$$tr(M) = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M)} \alpha_\lambda \lambda,$$

donc

$$|tr(M)| \leq \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M)} \alpha_\lambda |\lambda| = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M)} \alpha_\lambda = \deg(\chi_M) = n.$$

2. Soit $M \in G$. Les valeurs propres de M sont non nulles (car de module 1). Notons-les $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ (non nécessairement distinctes. M étant diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}MP = D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

On en déduit en inversant :

$$P^{-1}M^{-1}P = D^{-1} = diag(1/\lambda_1, \cdots, 1/\lambda_n),$$

donc

$$tr(M^{-1}) = tr(D^{-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k} = \overline{tr(D)} = \overline{tr(M)}.$$

Mais M est à coefficients réels, donc $tr(M) \in \mathbb{R}$, ce qui donne finalement $tr(M^{-1}) = tr(M)$.

Exercice 10 (Condition suffisante pour être une symétrie)**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que les espaces $Ker\big(u \circ (u - Id_E)\big)$ et $Ker\big(u \circ (u + Id_E)\big)$ soient supplémentaires.
Montrer que u est une symétrie vectorielle, en précisant ses éléments caractéristiques.

Corrigé de l'exercice 10
On a $Ker(u) \subset Ker(u \circ (u - Id_E))$ mais aussi $Ker(u) \subset Ker(u \circ (u + Id_E))$, donc

$$Ker(u) \subset Ker(u \circ (u - Id_E)) \cap Ker(u \circ (u + Id_E)) = \{0_E\}.$$

Ceci montre que u est injectif, donc $u \in GL(E)$. On en déduit que $Ker(u\circ(u-Id_E)) = Ker(u-Id_E)$ et $Ker(u \circ (u + Id_E)) = Ker(u + Id_E)$, donc on a la décomposition en somme directe :

$$E = Ker(u - Id_E) \oplus Ker(u + Id_E).$$

D'après le lemme des noyaux, on en déduit (puisque $X - 1$ et $X + 1$ sont premiers entre eux) :

$$Ker(u^2 - Id_E) = Ker(u - Id_E) \oplus Ker(u + Id_E) = E,$$

et donc $u^2 - Id_E = 0$, ce qui montre que u est une symétrie, par rapport à
$Ker(u - Id_E) = Ker(u \circ (u - Id_E))$ et parallèlement à $Ker(u + Id_E) = Ker(u \circ (u + Id_E))$.

Exercice 11 (***)

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)$, où les λ_k sont des complexes non nécessairement distincts. Montrer qu'on a équivalence entre :
   (i) $P(A)$ est injective ;
   (ii) $P(A)$ est bijective ;
   (iii) $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, $A - \lambda_k I_n$ est bijective ;
   (iv) $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, $\lambda_k \notin Sp(A)$.
2. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $C \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et $AC = CB$. Montrer que A et B ont au moins une valeur propre commune.

Corrigé de l'exercice 11

1. Une matrice carrée M est "injective" lorsque l'endomorphisme $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ canoniquement associé est injectif, ce qui équivaut à u bijectif et donc M bijective. Donc $(i) \iff (ii)$.
   Ensuite, on a
   $$P(A) = \prod_{k=1}^{r}(A - \lambda_k I_n) \text{ bijective } \iff \det(P(A)) = 0 \iff \prod_{k=1}^{r} \det(A - \lambda_k I_n) \neq 0.$$
   $$\iff \forall k \in [\![1, r]\!],\ \det(A - \lambda_k I_n) \neq 0 \iff \forall k \in [\![1, r]\!],\ A - \lambda_k I_n \text{ bijective},$$
   d'où $(ii) \iff (iii)$.
   Mais on a aussi $\det(A - \lambda_k I_n) \neq 0 \iff \lambda_k \notin Sp(A)$, donc $(iii) \iff (iv)$.
   D'où les équivalences voulues.
2. L'hypothèse $AC = CB$ entraîne par une récurrence simple les relations :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad A^k C = CB^k,$$
   et on déduit par combinaison linéaire :
   $$\forall P \in \mathbb{C}[X], \qquad P(A)C = CP(B).$$
   Appliquons ceci au polynôme minimal de B, noté π_B :
   $$\pi_B(A)C = C\pi_B(B) = C \times 0 = 0.$$
   Puisque C n'est pas la matrice nulle, on en déduit que la matrice $\pi_B(A)$ n'est pas inversible, et donc d'après les équivalences de la question 1., au moins une racine de π_B (donc une valeur propre de B) est valeur propre de A.

III Réduction

Exercice 12 (Déterminant de la transposition)**

On considère l'application transposition, notée $T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & M^\top \end{array} \right.$.

Calculer $\det(T)$.

Corrigé de l'exercice 12

La transposition est un endomorphisme vérifiant $T \circ T = Id$, donc c'est une symétrie. Elle est donc diagonalisable, et $Sp(T) \subset \{-1, 1\}$, avec $E_1(T) = Ker(T - Id) = \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ et $E_{-1}(T) = Ker(T + I_n) = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. On en déduit aisément :

$$\det(T) = 1^{\dim(E_1(T))} \times (-1)^{\dim(E_{-1}(T))} = (-1)^{\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{C}))} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Exercice 13 (***)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
2. Montrer que si A est inversible, alors la réciproque est vraie.
3. Le résultat est-il encore valable si A n'est pas inversible ?
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si A^2 est diagonalisable, alors A^3 est diagonalisable.

Corrigé de l'exercice 13

1. Si A est diagonalisable, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = D$ est diagonale. Mais alors $P^{-1}A^2P = (P^{-1}AP)^2 = D^2$ est aussi diagonale, donc A^2 est diagonalisable (et ses valeurs propres sont les carrés des valeurs propres de A).
2. Si A^2 est diagonalisable le polynôme minimal π_{A^2} est scindé à racines simples, notons-le
$$\pi_{A^2}(X) = \prod_{k=1}^{d}(X - \lambda_k),$$
avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ des nombres complexes **non nuls** (en effet, 0 n'est pas valeur propre de A^2 puisque A^2 est inversible, vu que $\det(A^2) = \det(A)^2$ et que A est inversible), et deux à deux distincts. Puisque $\pi_{A^2}(A^2) = 0$, on en déduit que le polynôme
$$Q(X) = \prod_{k=1}^{d}(X^2 - \lambda_k)$$
annule A (puisque $Q(A) = \pi_{A^2}(A^2)$). Ce polynôme étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ (puisque les λ_k sont dans $\mathbb{C}^*$, donc ils admettent chacun deux racines carrées distinctes), on en déduit que A est diagonalisable.
3. Non. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable, mais $A^2 = 0$ l'est.
4. Raisonnons avec $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Supposons que A^2 soit diagonalisable. Alors u^2 est diagonalisable, donc
$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u^2)} E_\lambda(u^2),$$
avec les sous-espaces $E_\lambda(u^2)$ stables par u (puisque de la forme $Ker(P(u))$). Pour tout $\lambda \in Sp(u^2)$, considérons alors l'endomorphisme induit
$$v_\lambda = u^3_{E_\lambda(u^2)}.$$
   - Si $\lambda = 0$, alors $\forall x \in E_\lambda(u^2)$, $v_\lambda(x) = u^3(x) = u(u^2(x)) = 0$, donc $v_\lambda = 0$, ce qui montre que v_λ est diagonalisable.
   - Si $\lambda \neq 0$, alors $\forall x \in E_\lambda(u^2)$, $v_\lambda(x) = u(u^2(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$, donc $v_\lambda^2(x) = \lambda^2 u^2(x) = \lambda^3 x$. On en déduit que $v_\lambda^2 = \lambda^3 Id_{E_\lambda(u^2)}$, donc v_λ est diagonalisable, puisqu'annulé par le polynôme $X^2 - \lambda^3$, scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

   Puisque tous les induits $v_\lambda = u^3_{E_\lambda(u^2)}$ sont diagonalisables, on en déduit par somme directe que u^3 est diagonalisable, donc A^3 est diagonalisable.

Exercice 14 (Une réduction de Jordan)**
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^2 = f^3$ et $\dim\big(Ker(f - Id)\big) = 1$.

Montrer l'existence d'une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \{0, 1\}$.

Corrigé de l'exercice 14
Par hypothèse, $f^2 = f^3$ donc le polynôme $P = X^3 - X^2 = X^2(X - 1)$ annule f.
En outre, $\dim\big(Ker(f - Id)\big) = 1$ donc 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre $E_1(f)$ est de dimension 1. Le polynôme minimal π_f est donc diviseur de P et multiple de $X - 1$. Il y a trois cas possibles :

- Si $\pi_f = X - 1$, alors $f = Id$, ce qui est impossible car cela contredit $\dim\big(Ker(f - Id)\big) = 1$.
- Si $\pi_f = X(X - 1)$, alors f est diagonalisable (puisque π_f est scindé à racines simples), et puisque $\mathbb{R}^3 = E_0(f) \oplus E_1(f)$, on a $\dim(E_0(f)) = 2$, donc il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Si $\pi_f = X^2(X - 1)$, alors f n'est pas diagonalisable et puisque $\mathbb{R}^3 = Ker(f^2) \oplus E_1(f)$ (par le lemme des noyaux), on a $\dim(Ker(f^2)) = 2$. En choisissant alors une base (e_1) de $E_1(f)$, et une base de $Ker(f^2)$ de la forme $(e_2, e_3) = (f(e_3), e_3)$ avec $e_3 \in Ker(f^2) \setminus Ker(f)$, on obtient par concaténation une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puisque

  $f(e_1) = e_1, f(e_2) = f^2(e_3) = 0$ et $f(e_3) = e_2$.

Exercice 15 (*Encore de la réduction de Jordan)**
Soit $n \in \{2, 3\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice trigonalisable mais non diagonalisable.

1. Cas $n = 2$: montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. Cas $n = 3$.
   (a) Si $\chi_A = (X - \alpha)(X - \beta)^2$ avec $\alpha \neq \beta$, montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.
   (b) Si $\chi_A = (X - \lambda)^3$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou a $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exercice 15

Exercice 16 (Autour des nilpotents)**
Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice n d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Soit x_0 tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrer que $\big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E.
2. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, le sous-espace vectoriel $Ker(u^k)$ est de dimension k.
3. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $Ker(u^k)$ est le seul sous-espace vectoriel stable par u qui soit de dimension k.

Corrigé de l'exercice 16

1. Remarquons qu'un tel vecteur x_0 existe car $u^{n-1} \neq 0$.
   Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0$, alors montrons par récurrence forte sur k que tous les λ_k sont nuls.
   En composant par u^{n-1}, on obtient $\lambda_0 u^{n-1}(x_0) = 0$, donc $\lambda_0 = 0$ (puisque $u^{n-1}(x_0) \neq 0$). D'où l'initialisation.
   Soit $j < n-1$. Supposons $\lambda_0 = \cdots = \lambda_j = 0$. On a alors $\displaystyle\sum_{k=j+1}^{n-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0$, donc en composant par u^{n-j-2}, on obtient $\lambda_{j+1} u^{n-1}(x_0) = 0$, donc $\lambda_{j+1} = 0$. D'où l'hérédité.
   La famille $\big(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\big)$ est donc libre, et de cardinal $n = \dim(E)$, donc c'est une base de E.

2. Soit $x \in E$, que l'on décompose sur la base précédente :
   $$x = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x_0)$$
   On a alors , pour $k \in \{0, \cdots, n\}$ fixé :
   $$x \in Ker(u^k) \iff u^k\left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x_0)\right) = 0 \iff \sum_{j=k}^{n-1} \alpha_{j-k} u^j(x_0) = 0 \iff \alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-k-1} = 0.$$
   Ceci montre que $Ker(u^k) = Vect(u^{n-k}(x_0), \cdots, u^{n-1}(x_0))$, donc ce sous-espace vectoriel est de dimension k.

3. Soit $k \in \{0, \cdots, n\}$. Le sev $Ker(u^k)$ est bien stable par u et de dimension k, montrons que c'est le seul. Soit F un sev de E stable par u et de dimension k. L'induit $u_F \in \mathcal{L}(F)$ est nilpotent (puisque $\forall x \in F,\ u_F^n(x) = u^n(x) = 0$), donc son indice de nilpotence est inférieur ou égal à $\dim(F) = k$. On a donc $u_F^k = 0$, c'est-à-dire que $F \subset Ker(u^k)$. Par égalité des dimensions on en déduit finalement $F = Ker(u^k)$.

Exercice 17 (Un commutant classique)**
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes.

1. Que dire d'un vecteur propre de A par rapport à B ?
2. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $B = P(A)$.

Corrigé de l'exercice 17

1. Soit $V \neq 0$ un vecteur propre de A. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AV = \lambda V$. Donc
   $$A(BV) = (AB)V = (BA)V = B(AV) = \lambda BV,$$
   ce qui montre que BV est dans le sous-espace propre $E_\lambda(A)$, qui est de dimension 1 (puisque χ_A est scindé à racines simples par hypothèse). Puisque $E_\lambda(A) = Vect(V)$, on en déduit que BV est colinéaire à V, donc V est aussi vecteur propre de B.

2. Par hypothèse, A est diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, donc il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $Q^{-1}AQ = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = D$.
   Les colonnes de Q forment une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A, qui sont aussi des vecteurs propres de B, donc la matrice $Q^{-1}BQ$ est également diagonale.
   Notons $Q^{-1}BQ = diag(\mu_1, \cdots, \mu_n)$. Puisque les λ_i sont deux à deux distincts, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_i = P(\lambda_i)$. Ce polynôme P vérifie alors $P(D) = diag(\mu_1, \cdots, \mu_n)$, donc
   $$P(A) = P(QDQ^{-1}) = QP(D)Q^{-1} = Q(Q^{-1}BQ)Q^{-1} = B.$$

Exercice 18 (Un exemple de réduction par blocs)**
Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $u^2 + u + Id_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

1. Soient F un sous-espace vectoriel stable par u, et $x \notin F$. Montrer que $Vect\big(x, u(x)\big)$ est un plan de base $\big(x, u(x)\big)$, stable par u et en somme directe avec F.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, de blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et qu'en particulier n est pair.

Corrigé de l'exercice 18

Exercice 19 (***)
Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & X^n P\left(\frac{1}{X}\right) \end{array} \right.$.
On note aussi D l'endomorphisme de E défini par $D(P) = P'$.
Après avoir vérifié que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, étudier si φ, D et $D \circ \varphi$ sont diagonalisables.

Corrigé de l'exercice 19

- $\boldsymbol{\varphi \in \mathcal{L}(E)}$: si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k \in E$, donc $\varphi(E) \subset E$. Ensuite, la linéarité de φ se vérifie facilement.
- On remarque que $\varphi \circ \varphi = Id_E$, donc φ est diagonalisable en tant que symétrie.
- On a $D^{n+1} = (P \mapsto P^{(n+1)}) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc D est nilpotent, ce qui montre que $Sp(D) = \{0\}$. Ainsi, D n'est pas diagonalisable (sinon, il serait nul car représenté dans une base par la matrice nulle, or $D \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ car $\dim(E) = n + 1 \geq 2$).
- Notons $u = D \circ \varphi$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$u(X^k) = \frac{d}{dX}(X^{n-k}) = (n-k)X^{n-k-1}.$$

$$u(X^{n-k-1}) = \frac{d}{dX}(X^{k+1}) = (k+1)X^k.$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ le sev $F_k = Vect(X^k, X^{n-k-1})$ est stable par u (avec la convention $F_n = Vect(X^n)$). Etudions ces sous-espaces stables. Pour éviter les redondances, prenons par exemple :

$$k \leq n - k - 1 \iff 2k + 1 \leq n \iff k \leq \frac{n-1}{2}.$$

* Si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, alors $E = F_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_{p-1} \oplus F_{2p}$, avec $\dim(F_0) = \cdots = \dim(F_{p-1}) = 2$ et $\dim(F_{2p}) = 1$.
L'induit $u_{F_{2p}}$ est évidemment diagonalisable, et pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, l'induit u_{F_k} se représente par la matrice

$$A_k = Mat_{(X^k, X^{n-k-1})}(u_{F_k}) = \begin{pmatrix} 0 & k+1 \\ n-k & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\chi_{A_k} = X^2 - (n-k)(k+1)$ avec $(n-k)(k+1) > 0$, ce polynôme est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc A_k est diagonalisable, ce qui montre que u_{F_k} est diagonalisable.
Par somme directe, on en déduit que u est diagonalisable.

* Si $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors $E = F_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_{p-1} \oplus F_p \oplus F_{2p+1}$ avec $\dim(F_0) = \cdots = \dim(F_{p-1}) = 2$ et $\dim(F_p) = \dim(F_{2p+1}) = 1$, et tout comme dans le cas précédent, les endomorphismes induits par u sur ces droites ou plans stables sont diagonalisables, donc u aussi.

Ceci montre que $u = D \circ \varphi$ est diagonalisable.

IV Pour aller plus loin

Exercice 20 (*Diagonalisation simultanée)**

1. Prouver que toute famille (éventuellement infinie !) d'endomorphismes diagonalisables d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, dont les éléments commutent deux à deux, est simultanément diagonalisable (c'est-à-dire qu'il existe une base de diagonalisation commune à tous les éléments de la famille).
   Indication : procéder par récurrence sur $\dim(E)$.
2. *Une application :* Soit G un sous-groupe commutatif de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que tout élément M de G vérifie $M^2 = I_n$. Montrer que G est fini, et majorer son cardinal en fonction de n.

Corrigé de l'exercice 20

Exercice 21 (*Endomorphisme matriciel)**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$.
   Déterminer le polynôme caractéristique de φ et son polynôme minimal.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. Montrer que l'application $\psi : M \mapsto AM + MB$ est diagonalisable.

Corrigé de l'exercice 21

Exercice 22 (*Sur l'idéal annulateur)**

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal μ_f. Montrer l'existence de $x \in E$ tel que $\{P \in \mathbb{C}[X],\ P(f)(x) = 0_E\}$ soit l'ensemble des multiples de μ_f.
Indication : introduire les sous-espaces caractéristiques...

Corrigé de l'exercice 22