# Exercices du CH09 : Réduction des endomorphismes - aspects algébriques

**Exercices de la banque INP à étudier** : ex 62 (ex de polynôme annulateur de degré 2), 65 (composition sur $\mathbb{K}[u]$), 88 (endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), 91 (polynôme minimal d'une matrice $3 * 3$), 93 (lemme des noyaux sur un exemple).

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

## I Pour bien commencer

**Exercice 1 (*)**
Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie tel que $f^2 - 5f + 4Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer que $f$ est diagonalisable.

**Exercice 2 (*Exemples de calcul de polynômes minimaux)**
Tout en réduisant (diagonalisant ou trigonalisant) les matrices qui suivent, déterminer leurs polynômes minimaux :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \; (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 3 (*Signe du déterminant)**
Montrer que toute matrice réelle de taille $n$ vérifiant $A^3 - 3A - 5I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est de déterminant strictement positif.

**Exercice 4 (*L'inverse est un polynôme en $u$)**
Soit $u$ un automorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
En considérant $\chi_u$, montrer que $u^{-1}$ est un polynôme en $u$.

**Exercice 5 (*Recherche de matrices diagonalisables)**
Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables telles que $A^4 - 2A^3 + 2A^2 - 2A = -I_n$.

**Exercice 6 (**Un endomorphisme matriciel)**
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$.
Montrer que $f_A$ est diagonalisable ssi $A$ est diagonalisable.
*Indication : Pour un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, examiner $P(f_A)$.*

**Exercice 7 (**Avec des permutations)**
Soit $\sigma \in S_n$. On considère l'endomorphisme $u_\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) \end{array} \right.$.
Est-il diagonalisable ?

**Exercice 8 (*Comatrice)**
Soient $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $com(A)^\top = I_n - A$.
La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

## II Autour des polynômes annulateurs

**Exercice 9 (**Groupe fini de matrices)**
Soit $G$ un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$. Établir :

1. Pour tout $M \in G$, $\det(M) = \pm 1$ et $|tr(M)| \leq n$.
   *Indication : grâce aux hypothèses, on peut trouver un polynôme annulateur de toute matrice de $G$...*
2. Pour tout $M \in G$, $tr(M^{-1}) = tr(M)$.

**Exercice 10 (**Condition suffisante pour être une symétrie)**
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que les espaces $Ker\big(u \circ (u - Id_E)\big)$ et $Ker\big(u \circ (u + Id_E)\big)$ soient supplémentaires.
Montrer que $u$ est une symétrie vectorielle, en précisant ses éléments caractéristiques.

**Exercice 11 (***)**

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)$, où les $\lambda_k$ sont des complexes non nécessairement distincts. Montrer qu'on a équivalence entre :
   (i) $P(A)$ est injective ;
   (ii) $P(A)$ est bijective ;
   (iii) $\forall k \in \{1, \ldots, r\}$, $A - \lambda_k I_n$ est bijective ;
   (iv) $\forall k \in \{1, \ldots, r\}$, $\lambda_k \notin Sp(A)$.
2. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $C \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et $AC = CB$. Montrer que $A$ et $B$ ont au moins une valeur propre commune.

# III Réduction

**Exercice 12 (**Déterminant de la transposition)**
On considère l'application transposition, notée $T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & M^\top \end{array} \right.$.
Calculer $\det(T)$.

**Exercice 13 (***)**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $A$ est diagonalisable, alors $A^2$ est diagonalisable.
2. Montrer que si $A$ est inversible, alors la réciproque est vraie.
3. Le résultat est-il encore valable si $A$ n'est pas inversible ?
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $A^2$ est diagonalisable, alors $A^3$ est diagonalisable.

**Exercice 14 (**Une réduction de Jordan)**
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^2 = f^3$ et $\dim\big(Ker(f - Id)\big) = 1$.
Montrer l'existence d'une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \{0, 1\}$.

**Exercice 15 (***Encore de la réduction de Jordan)**
Soit $n \in \{2, 3\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice trigonalisable mais non diagonalisable.

1. Cas $n = 2$ : montrer que $A$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. Cas $n = 3$.
   (a) Si $\chi_A = (X - \alpha)(X - \beta)^2$ avec $\alpha \neq \beta$, montrer que $A$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.
   (b) Si $\chi_A = (X - \lambda)^3$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, montrer que $A$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou a $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

**Exercice 16 (**Autour des nilpotents)**
Soit $u$ un endomorphisme nilpotent d'indice $n$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$.

1. Soit $x_0$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrer que $\big(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de $E$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, le sous-espace vectoriel $Ker(u^k)$ est de dimension $k$.
3. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $Ker(u^k)$ est le seul sous-espace vectoriel stable par $u$ qui soit de dimension $k$.

**Exercice 17 (**Un commutant classique)**
Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. On suppose que $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes.

1. Que dire d'un vecteur propre de $A$ par rapport à $B$ ?
2. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $B = P(A)$.

**Exercice 18 (**Un exemple de réduction par blocs)**
Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $u^2 + u + Id_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

1. Soient $F$ un sous-espace vectoriel stable par $u$, et $x \notin F$. Montrer que $Vect\big(x, u(x)\big)$ est un plan de base $\big(x, u(x)\big)$, stable par $u$ et en somme directe avec $F$.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale par blocs, de blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et qu'en particulier $n$ est pair.

**Exercice 19 (***)**
Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & X^n P\left(\frac{1}{X}\right) \end{array} \right.$.
On note aussi $D$ l'endomorphisme de $E$ défini par $D(P) = P'$.
Après avoir vérifié que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, étudier si $\varphi$, $D$ et $D \circ \varphi$ sont diagonalisables.

# IV Pour aller plus loin

**Exercice 20 (***Diagonalisation simultanée)**

1. Prouver que toute famille (éventuellement infinie !) d'endomorphismes diagonalisables d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, dont les éléments commutent deux à deux, est simultanément diagonalisable (c'est-à-dire qu'il existe une base de diagonalisation commune à tous les éléments de la famille).
   *Indication : procéder par récurrence sur* $\dim(E)$.
2. *Une application :* Soit $G$ un sous-groupe commutatif de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que tout élément $M$ de $G$ vérifie $M^2 = I_n$. Montrer que $G$ est fini, et majorer son cardinal en fonction de $n$.

**Exercice 21 (***Endomorphisme matriciel)**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$.
   Déterminer le polynôme caractéristique de $\varphi$ et son polynôme minimal.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. Montrer que l'application $\psi : M \mapsto AM + MB$ est diagonalisable.

**Exercice 22 (***Sur l'idéal annulateur)**
Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal $\mu_f$. Montrer l'existence de $x \in E$ tel que $\{P \in \mathbb{C}[X],\ P(f)(x) = 0_E\}$ soit l'ensemble des multiples de $\mu_f$.
*Indication : introduire les sous-espaces caractéristiques...*