Exercices du CH09 : Réduction des endomorphismes - aspects algébriques

Exercices de la banque INP à étudier : ex 62 (ex de polynôme annulateur de degré 2), 65 (composition sur $\mathbb{K}[u]$), 88 (endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), 91 (polynôme minimal d'une matrice 3×3), 93 (lemme des noyaux sur un exemple).

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I Pour bien commencer

Exercice 1 (*)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie tel que $f^2 - 5f + 4Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 2 (*Exemples de calcul de polynômes minimaux)

Tout en réduisant (diagonalisant ou trigonalisant) les matrices qui suivent, déterminer leurs polynômes minimaux :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 3 (*Signe du déterminant)

Montrer que toute matrice réelle de taille n vérifiant $A^3 - 3A - 5I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est de déterminant strictement positif.

Exercice 4 (*L'inverse est un polynôme en u)

Soit u un automorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En considérant χ_u , montrer que u^{-1} est un polynôme en u .

Exercice 5 (*Recherche de matrices diagonalisables)

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables telles que $A^4 - 2A^3 + 2A^2 - 2A = -I_n$.

Exercice 6 (**Un endomorphisme matriciel)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $f_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{cases}$.

Montrer que f_A est diagonalisable ssi A est diagonalisable.

Indication : Pour un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, examiner $P(f_A)$.

Exercice 7 (**Avec des permutations)

Soit $\sigma \in S_n$. On considère l'endomorphisme $u_\sigma : \begin{cases} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{cases}$.

Est-il diagonalisable ?

Exercice 8 (*Comatrice)

Soient $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{com}(A)^\top = I_n - A$.

La matrice A est-elle diagonalisable ?

II Autour des polynômes annulateurs

Exercice 9 (**Groupe fini de matrices)

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$. Établir :

- Pour tout $M \in G$, $\det(M) = \pm 1$ et $|\text{tr}(M)| \leq n$.

Indication : grâce aux hypothèses, on peut trouver un polynôme annulateur de toute matrice de G ...

- Pour tout $M \in G$, $\text{tr}(M^{-1}) = \text{tr}(M)$.

Exercice 10 (Condition suffisante pour être une symétrie)**

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que les espaces $\text{Ker}(u \circ (u - \text{Id}_E))$ et $\text{Ker}(u \circ (u + \text{Id}_E))$ soient supplémentaires.

Montrer que u est une symétrie vectorielle, en précisant ses éléments caractéristiques.

Exercice 11 (*)**

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)$, où les λ_k sont des complexes non nécessairement distincts. Montrer qu'on a équivalence entre :

- (i) $P(A)$ est injective ;
- (ii) $P(A)$ est bijective ;
- (iii) $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, $A - \lambda_k I_n$ est bijective ;
- (iv) $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, $\lambda_k \notin \text{Sp}(A)$.

2. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $C \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et $AC = CB$. Montrer que A et B ont au moins une valeur propre commune.

III Réduction

Exercice 12 (Déterminant de la transposition)**

On considère l'application transposition, notée $T : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{cases}$.

Calculer $\det(T)$.

Exercice 13 (*)**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
2. Montrer que si A est inversible, alors la réciproque est vraie.
3. Le résultat est-il encore valable si A n'est pas inversible ?
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si A^2 est diagonalisable, alors A^3 est diagonalisable.

Exercice 14 (Une réduction de Jordan)**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^2 = f^3$ et $\dim(\text{Ker}(f - \text{Id})) = 1$.

Montrer l'existence d'une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

avec $\alpha \in \{0, 1\}$.

Exercice 15 (Encore de la réduction de Jordan)**

Soit $n \in \{2, 3\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice trigonalisable mais non diagonalisable.

1. Cas $n = 2$: montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

2. Cas $n = 3$.

(a) Si $\chi_A = (X - \alpha)(X - \beta)^2$ avec $\alpha \neq \beta$, montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.

(b) Si $\chi_A = (X - \lambda)^3$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou à

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 16 (Autour des nilpotents)**

Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice n d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Soit x_0 tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrer que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E .
2. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(u^k)$ est de dimension k .
3. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\text{Ker}(u^k)$ est le seul sous-espace vectoriel stable par u qui soit de dimension k .

Exercice 17 (Un commutant classique)**

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes.

1. Que dire d'un vecteur propre de A par rapport à B ?
2. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $B = P(A)$.

Exercice 18 (Un exemple de réduction par blocs)**

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $u^2 + u + Id_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

1. Soient F un sous-espace vectoriel stable par u , et $x \notin F$. Montrer que $\text{Vect}(x, u(x))$ est un plan de base $(x, u(x))$, stable par u et en somme directe avec F .
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, de blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et qu'en particulier n est pair.

Exercice 19 (*)**

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & X^n P\left(\frac{1}{X}\right) \end{cases}$.

On note aussi D l'endomorphisme de E défini par $D(P) = P'$.

Après avoir vérifié que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, étudier si φ , D et $D \circ \varphi$ sont diagonalisables.

IV Pour aller plus loin

Exercice 20 (*)Diagonalisation simultanée)**

1. Prouver que toute famille (éventuellement infinie!) d'endomorphismes diagonalisables d'un même $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , dont les éléments commutent deux à deux, est simultanément diagonalisable (c'est-à-dire qu'il existe une base de diagonalisation commune à tous les éléments de la famille).

Indication : procéder par récurrence sur $\dim(E)$.

2. *Une application :* Soit G un sous-groupe commutatif de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que tout élément M de G vérifie $M^2 = I_n$. Montrer que G est fini, et majorer son cardinal en fonction de n .

Exercice 21 (*)Endomorphisme matriciel)**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{cases}$.

Déterminer le polynôme caractéristique de φ et son polynôme minimal.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. Montrer que l'application $\psi : M \mapsto AM + MB$ est diagonalisable.

Exercice 22 (*)Sur l'idéal annulateur)**

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal μ_f . Montrer l'existence de $x \in E$ tel que $\{P \in \mathbb{C}[X], P(f)(x) = 0_E\}$ soit l'ensemble des multiples de μ_f .

Indication : introduire les sous-espaces caractéristiques...