

Exercices du CH08 : Réduction des endomorphismes - aspects géométriques

Exercices de la banque INP à étudier : ex 59, 67, 69, 70 (exemples d'études de diagonalisabilité), 72 (endomorphismes de rang 1), 73 (calcul de commutant), 83 (valeurs propres de $u \circ v$ et $v \circ u$).

I Exemples en petite dimension

Exercice 1 (*Diagonalisation)

Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables et les diagonaliser :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 1

Exercice 2 (*Avec paramètres... 1)

Pour $m \in \mathbb{R}$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 - m & m - 2 & m \end{pmatrix}$.

- Factoriser le polynôme caractéristique de A et déterminer les valeurs propres de A .
- Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable ?

Corrigé de l'exercice 2

Exercice 3 (**Avec paramètres... 2)

Pour quelles valeurs des scalaires a, b, c et d la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Corrigé de l'exercice 3

Exercice 4 (*Endomorphisme d'un espace de matrices)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Étant donnée une matrice réelle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calculer $AM - MA$.
- Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme (de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) : $f : M \mapsto AM - MA$.
- Retrouver les éléments propres de f en écrivant cette fois sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 4

II Exemples en grande dimension

Exercice 5 (*Dérivation)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note D_n l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], D_n(P) = P'$. Déterminer si D_n est diagonalisable.

Corrigé de l'exercice 5

Exercice 6 (*Endomorphisme d'un espace de suites)

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites complexes. On définit $\Delta \in \mathcal{L}(E)$ par : $\Delta((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Δ .

Corrigé de l'exercice 6

Exercice 7 (**Matrices de rang 1)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $rg(A) = 1$. Montrer que A est diagonalisable ssi $tr(A) \neq 0$.
2. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls. À quelle condition la matrice $X^t Y$ est-elle diagonalisable ?

Corrigé de l'exercice 7

Exercice 8 (**Matrices de rang 2)

1. Soient $n \geq 2$, K un sous-corps de \mathbb{C} et $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $rg(M) \leq 2$. Exprimer le polynôme caractéristique de M à l'aide de $tr(M)$ et $tr(M^2)$.
2. *Application*
Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels. On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $m_{n+1,i} = a_i$ et $m_{i,n+1} = b_i$, et les autres coefficients sont nuls.
 - a. Discuter le rang de M .
 - b. Calculer M^2 et en déduire χ_M . La matrice M est-elle diagonalisable ?

Corrigé de l'exercice 8

Exercice 9 (**Matrice en carré)

Soient un entier $n \geq 3$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer les éléments propres de M . Cette matrice est-elle diagonalisable ? Expliciter ses espaces propres.

Corrigé de l'exercice 9

Exercice 10 (***)Matrice anti-diagonale par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} (0) & A \\ I_n & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'on a $\chi_B(X) = \chi_A(X^2)$.
2. Discuter la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A .

Corrigé de l'exercice 10

1. On a $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -I_n & XI_n \end{vmatrix}$, donc en effectuant la transvection par blocs

$$(C_{n+1}, \dots, C_{2n}) \leftarrow (C_{n+1}, \dots, C_{2n}) + X(C_1, \dots, C_n),$$

on obtient

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & -A + X^2I_n \\ -I_n & (0) \end{vmatrix}.$$

En effectuant alors les échanges de lignes

$$L_1 \leftrightarrow L_{n+1}, \dots, L_n \leftrightarrow L_{2n},$$

on obtient

$$\chi_B(X) = (-1)^n \begin{vmatrix} -I_n & (0) \\ XI_n & -A + X^2I_n \end{vmatrix} = (-1)^n \det(-I_n) \det(X^2I_n - A) = \chi_A(X^2).$$

2. On a donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\lambda \in Sp(B) \iff \lambda^2 \in Sp(A) \iff -\lambda \in Sp(B).$$

Puisque tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées opposées, on a

$$Card(Sp(B) \setminus \{0\}) = 2Card(Sp(A) \setminus \{0\}),$$

et $0 \in Sp(A) \iff 0 \in Sp(B)$.

Comparons maintenant les sous-espaces propres des matrices A et B : pour tout $\lambda \in Sp(B)$ et tout vecteur $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$ (avec V_1 et V_2 dans \mathbb{C}^n), on a

$$BV = \lambda V \iff \begin{cases} AV_2 = \lambda V_1 \\ V_1 = \lambda V_2 \end{cases} \iff \begin{cases} V_1 = \lambda V_2 \\ AV_2 = \lambda^2 V_2 \end{cases} \iff V = \begin{pmatrix} \lambda V_2 \\ V_2 \end{pmatrix}, V_2 \in E_{\lambda^2}(A).$$

Ainsi $E_\lambda(B)$ est clairement isomorphe à $E_{\lambda^2}(A)$, donc

$$\forall \lambda \in Sp(B), \quad \dim(E_\lambda(B)) = \dim(E_{\lambda^2}(A)) = \dim(E_{-\lambda}(B)).$$

En conséquence :

$$\sum_{\lambda \in Sp(B), \lambda \neq 0} \dim(E_\lambda(B)) = 2 \sum_{\mu \in Sp(A), \mu \neq 0} \dim(E_\mu(A)).$$

Deux cas se présentent alors :

- Si $0 \notin Sp(A)$, alors $0 \notin Sp(B)$ et

$$\sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim(E_\lambda(B)) = 2 \sum_{\mu \in Sp(A)} \dim(E_\mu(A)),$$

donc on a l'équivalence :

$$A \text{ diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \iff B \text{ diagonalisable dans } \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

- Si $0 \in Sp(A)$, alors $0 \in Sp(B)$ et $\dim(E_0(B)) = \dim(E_0(A)) \geq 1$, donc

$$\sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim(E_\lambda(B)) = 2 \left(\sum_{\mu \in Sp(A)} \dim(E_\mu(A)) \right) - \dim(E_0(A)) < 2n,$$

donc B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ (que A soit diagonalisable ou non).

Finalement, on a (B diagonalisable $\implies A$ diagonalisable), mais pas l'inverse.

En revanche, on a (A diagonalisable et inversible $\iff B$ diagonalisable).

Exercice 11 (Matrice tridiagonale)**

Soient $n \geq 1$, $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P_n = \det(XI_n - A_n) = \chi_{A_n}$.

1. Montrer : $\forall n \geq 3, P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

Calculer P_1 et P_2 .

2. Pour tout $x \in]-2, 2[$, on pose $x = 2 \cos \alpha$ avec $\alpha \in]0, \pi[$. Montrer que : $P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha}$.

3. En déduire que P_n admet n racines puis que A_n est diagonalisable.

Corrigé de l'exercice 11

Exercice 12 (Matrice compagnon)**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A .

On pourra développer par rapport à la dernière ligne et procéder par récurrence sur n .

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Calculer le sous-espace propre $E_\lambda(A)$.

3. A quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?

4. Trouver une matrice A telle que $\chi_A(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X + 1$.

Corrigé de l'exercice 12

1. On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & X & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & X & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne, il vient :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= (X - a_{n-1}) \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & -1 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & X & -a_{n-3} \\ 0 & & -1 & -a_{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (X - a_{n-1})X^{n-1} + D_{n-1}. \end{aligned}$$

Mais le déterminant D_{n-1} (de taille $n-1$) se calcule simplement par récurrence, en le développant par rapport à sa dernière ligne :

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & X & -a_{n-3} \\ 0 & & -1 & -a_{n-2} \end{vmatrix} = -a_{n-2}X^{n-2} + \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -a_0 \\ -1 & X & \ddots & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -1 & -a_{n-3} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$D_{n-1} = -a_{n-2}X^{n-2} + D_{n-2}.$$

Une récurrence immédiate fournit donc alors (puisque $D_2 = \begin{vmatrix} X & -a_0 \\ -1 & -a_1 \end{vmatrix} = -a_1X - a_0$)

$$D_{n-1} = -a_{n-2}X^{n-2} - a_{n-3}X^{n-3} - \dots - a_2X^2 - a_1X - a_0.$$

Donc

$$\chi_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - \dots - a_2X^2 - a_1X - a_0.$$

2. Si λ est une valeur propre complexe, on a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A) \iff \begin{cases} a_0x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + a_1x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} + a_{n-2}x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} + a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1})x_n \\ x_{n-2} = (\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2})x_n \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \dots - a_1)x_n \\ (\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_1\lambda - a_0)x_n = 0 \end{cases}.$$

Mais λ étant valeur propre, on a (d'après la première question) :

$$\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_1\lambda - a_0 = \chi_A(\lambda) = 0.$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A) \iff \begin{cases} x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1})x_n \\ x_{n-2} = (\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2})x_n \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \dots - a_1)x_n \end{cases},$$

ce qui montre que

$$E_\lambda(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \dots - a_1 \\ \vdots \\ \lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2} \\ \lambda - a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. La question précédente montre que chaque sous-espace propre de A est de dimension 1. La matrice A n'est donc diagonalisable que si elle possède n sous-espaces propres. On a donc (**dans ce cas seulement !**) :

$$A \text{ est diagonalisable} \iff A \text{ possède } n \text{ valeurs propres distinctes.}$$

4. La matrice compagnon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

convient.

III Exercices théoriques

Exercice 13 (*Vecteurs propres, noyau et image)

Montrer que tout vecteur propre d'un endomorphisme se trouve dans le noyau ou dans l'image de cet endomorphisme.

Corrigé de l'exercice 13

Exercice 14 (Valeurs propres de module 1)**

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que toutes les valeurs propres (prises dans \mathbb{C}) de A soient de module 1. On suppose aussi $\det(A) = 1$. Montrer que 1 est valeur propre de A .

Corrigé de l'exercice 14**Exercice 15 (**Spectres de $f \circ g$ et $g \circ f$)**

Soient E un K -espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. Montrer : $\text{Sp}(f \circ g) \cup \{0\} = \text{Sp}(g \circ f) \cup \{0\}$.
2. Établir que, si E est de dimension finie, alors $\text{Sp}(f \circ g) = \text{Sp}(g \circ f)$.
3. Exhiber un espace vectoriel E et des endomorphismes f et g de E pour lesquels $\text{Sp}(f \circ g) \neq \text{Sp}(g \circ f)$.

Corrigé de l'exercice 15**Exercice 16 (**Matrice stochastique)**

On dit d'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est **stochastique** lorsque :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} \in [0, 1] \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A .
2. Établir : $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \exists i \in \{1, \dots, n\}, |\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}$.

On en déduit une propriété de localisation des racines : on a $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n B_f(a_{i,i}, 1 - a_{i,i})$.

Corrigé de l'exercice 16**Exercice 17 (**Disques de Gershgorin)**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset$

$$\bigcup_{i=1}^n B_f \left(a_{i,i}, \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| \right).$$

Les $B_f \left(a_{i,i}, \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| \right)$ sont appelés *disques de Gershgorin* de A .

2. Démontrer le **théorème de Hadamard**, qui s'énonce :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$. Alors A est inversible.

On dit d'une telle matrice A qu'elle est à diagonale strictement dominante.

Corrigé de l'exercice 17

Exercice 18 (Polynômes caractéristiques de AB et BA)**

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Le but de l'exercice est de montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Montrer le résultat lorsque l'une des matrices est inversible.

On suppose donc dans la suite que ni A ni B ne sont inversibles.

2. Démontrer qu'il existe $a > 0$ tel que : $\forall t \in]0, a[$, $A + tI_n \in GL_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ t & \longmapsto \chi_{A_t} \end{cases}$ est continue, où $A_t = (A + tI_n)B$.

4. Conclure.

Corrigé de l'exercice 18**Exercice 19 (***)Une condition suffisante de diagonalisabilité)**

1. Soient E un \mathbb{C} -ev de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Ker}(f - \lambda Id_E)$ et $\text{Im}(f - \lambda Id_E)$ sont en somme directe. Montrer que f est diagonalisable.

On pourra raisonner par récurrence sur n .

2. Pour mieux comprendre la situation : illustrer la contraposée de ce résultat en examinant par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Corrigé de l'exercice 19**Exercice 20 (***)Une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité)**

Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable ssi tout sev F de E stable par u admet un supplémentaire stable par u .

Corrigé de l'exercice 20

\Rightarrow Supposons u diagonalisable. Il existe donc une base (e_1, \dots, e_n) de E formée de vecteurs propres pour u . Etant donné F un sev de E , on peut considérer une base $\mathcal{B}_F = (e'_1, \dots, e'_d)$ de F et compléter cette famille libre en une base $(e'_1, \dots, e'_d, e'_{d+1}, \dots, e'_n)$ de E , en choisissant (e'_{d+1}, \dots, e'_n) dans la famille génératrice (e_1, \dots, e_n) (voir le cours de MP2I). Le sous-espace vectoriel $G = \text{Vect}(e'_{d+1}, \dots, e'_n)$ est alors un supplémentaire de $F = \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_d)$, et G est stable par u car chaque e'_i (avec $d+1 \leq i \leq n$) est un vecteur propre pour u , donc chaque e'_i engendre une droite stable par u .

Remarque

On a en fait montré que tout sev F de E admet un supplémentaire stable par u (pas besoin que F soit déjà stable par u).

\Leftarrow Supposons que tout sev F de E stable par u possède un supplémentaire stable par u , et considérons la somme directe des sous-espaces propres de u :

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

(on a $\dim(F) \geq 1$ car $\text{Sp}(u)$ est non vide, puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Chacun des $E_\lambda(u)$ est stable par u , donc F est également stable par u . Par hypothèse, il existe alors un sev G de E tel que $F \oplus G = E$ et $u(G) \subset G$. L'idée est de considérer alors l'endomorphisme induit $v = u_G \in \mathcal{L}(G)$. Si $\dim(G) \geq 1$, alors puisqu'on est sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, v possède au moins une valeur propre, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in G \setminus \{0_E\}$ tel que $v(x) = u(x) = \lambda x$. Vu que $x \in E_\lambda(v) \subset E_\lambda(u) \subset F$, on a $x \in G \cap F = \{0_E\}$,

ce qui est absurde car x est non nul en tant que vecteur propre. Donc $\dim(G) = 0$, ce qui prouve que $F = E$. Ainsi, les sous-espaces propres de u sont supplémentaires dans E , ce qui montre que u est diagonalisable.

Remarque

Pour cette implication, on peut aussi procéder par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- L'initialisation est évidente (en dimension 1, tout endo est diagonalisable).
- Hérédité : soit $n \geq 2$. On suppose que pour tout $1 \leq k < n$, tout endomorphisme v en dimension k possédant la propriété du supplémentaire stable est diagonalisable. Soit u un endomorphisme en dimension n qui vérifie la propriété du supplémentaire stable. Vu qu'on est sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u possède au moins une valeur propre λ , donc en considérant le SEV $F = E_\lambda(u)$ (qui est stable par u), on obtient l'existence d'un SEV G de E tel que $E = F \oplus G$ et $u(G) \subset G$. On va alors appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit $u_G \in \mathcal{L}(G)$ (avec $\dim(G) < n$ puisque $\dim(F) \geq 1$).

* Si $G = \{0\}$, alors $F = E$ donc $u = \lambda Id$, donc u est diagonalisable.

* Si $\dim(G) \geq 1$, montrons que l'induit u_G vérifie la propriété du supplémentaire stable : pour tout H SEV de G tel que $u_G(H) \subset H$, on a $u(H) \subset H$, donc (par hypothèse sur u), il existe K SEV de E tel que $E = H \oplus K$ et $u(K) \subset K$. En intersectant avec G , on en déduit

$$G = (H \oplus K) \cap G = H \oplus (K \cap G)$$

(facile à vérifier car $H \subset G$), et donc $K \cap G$ est un supplémentaire de H dans G stable par u_G puisque

$$u_G(K \cap G) = u(K \cap G) \subset u(K) \cap u(G) \subset K \cap G.$$

Par hypothèse de récurrence, l'induit u_G est donc diagonalisable. Finalement, les deux induits $u_F = \lambda Id_F$ et u_G sont diagonalisables, donc comme $E = F \oplus G$, u est finalement diagonalisable.

IV Applications de la réduction

Exercice 21 (**Commutant d'un endomorphisme diagonalisable)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer qu'un endomorphisme v de E commute avec u ssi les sous-espaces propres de u sont stables par v .
2. On appelle **commutant** d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble $C_M = \{N \in \mathcal{M}_n(K), MN = NM\}$.

Déterminer le commutant des matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 21

Exercice 22 (*Racines de matrices)

On pourra utiliser les techniques de l'exercice précédent.

Déterminer les solutions à coefficients réels et complexes des équations matricielles :

$$1. M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad 2. M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 3. M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 22

Exercice 23 (*Suites vectorielle de \mathbb{R}^3)

On considère trois suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases} .$$

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) , ces trois suites sont-elles convergentes ?

Corrigé de l'exercice 23

Exercice 24 (Un peu de probas ! La patate chaude)**

Trois enfants A , B et C jouent à la patate chaude ainsi :

- Si A a la patate, il la lance à B avec la probabilité $3/4$ et à C avec la probabilité $1/4$,
- Si B a la patate, il la lance à A avec la probabilité $3/4$ et à C avec la probabilité $1/4$,
- Si C l'a, il la lance à B (c'est-à-dire avec une probabilité 1).

Calculer les probabilités a_n , b_n et c_n pour que respectivement A , B ou C aient la patate à l'issue du n -ième lancer et chercher leurs limites quand $n \rightarrow \infty$.

Il devrait naturellement apparaître une matrice stochastique pour décrire le problème...

Corrigé de l'exercice 24

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons A_n l'événement "l'enfant A a la patate à l'instant n ", et de même avec B_n (pour l'enfant B), et C_n (pour l'enfant C).

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}),$$

$$b_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}),$$

$$c_{n+1} = \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}).$$

Ceci se réécrit

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \\ \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) \\ \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

D'après les données de l'énoncé, on a

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \\ \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) \\ \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix},$$

donc on a la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},$$

avec $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit par récurrence triviale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

- On a $P^{-1}MP = D$, avec

$$P = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{4})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{3}{4})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & -28 \\ 25 & -45 & 60 \end{pmatrix}.$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient par continuité du produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & -28 \\ 25 & -45 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 16 & 16 & 16 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{35} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Puisque $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 25 (**Puissance d'un nombre algébrique)

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre **algébrique**, c'est-à-dire racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, α^k est algébrique. *Penser aux matrices compagnons...*

Corrigé de l'exercice 25

Par hypothèse, il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ non nul tel que $P(\alpha) = 0$. Quitte à diviser par le coefficient dominant, on peut supposer P unitaire. Notons

$$P(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i,$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{Q}^n$. Ce polynôme P est le polynôme caractéristique de la matrice compagnon :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$$

(voir l'exercice 12). Ainsi, le nombre algébrique α est une valeur propre complexe de A . En considérant un vecteur propre associé $V \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A^k V = \alpha^k V,$$

donc α^k est une valeur propre de A^k . En notant $P_k = \chi_{A^k}$, on a alors $P_k \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ (car la matrice A^k est à coefficients dans \mathbb{Q}) et $P_k(\alpha^k) = 0$, ce qui prouve que α^k est un nombre algébrique.

V Nilpotence

Exercice 26 (*Somme et composée d'endomorphismes nilpotents)

Soient u et v deux endomorphismes nilpotents d'un même K -espace vectoriel E de dimension finie. Que dire de $u + v$? De $u \circ v$?

Corrigé de l'exercice 26

Exercice 27 (En dimension 2)**

Soit E un K -espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.
2. Construire une base B de E dans laquelle la matrice représentative de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(K)$ sont celles de la forme $\begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ et de déterminant nul.

Corrigé de l'exercice 27

Exercice 28 (*)Condition nécessaire et suffisante de nilpotence)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$. Montrer que A est nilpotente ssi $\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{tr}(A^p) = 0$.

On introduira les valeurs propres dans \mathbb{C} de A et on utilisera l'expression de la trace à l'aide des valeurs propres...

Corrigé de l'exercice 28

Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres complexes de A comptées avec multiplicités. La matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc semblable à une matrice triangulaire supérieure T , avec $t_{i,i} = \lambda_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^p est semblable à T^p , qui est aussi triangulaire supérieure, d'éléments diagonaux $(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p)$. Donc

$$\text{tr}(A^p) = \text{tr}(T^p) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^p = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \alpha_{\lambda} \lambda^p = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \setminus \{0\}} \alpha_{\lambda} \lambda^p,$$

où les entiers $\alpha_{\lambda} \in \mathbb{N}^*$ sont les multiplicités des valeurs propres. Montrons alors l'équivalence voulue :

\Rightarrow Si A est nilpotente, alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$, donc par ce qui précède on a $\text{tr}(A^p) = 0$ pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (et même pour tout $p \in \mathbb{N}^*$).

\Leftarrow Supposons que $\text{tr}(A^p) = 0$ pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On va montrer que toutes les valeurs propres de A sont nulles.

Notons $q = \text{Card}(\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \setminus \{0\}) \in \llbracket 0, n \rrbracket$ (le nombre de valeurs propres non nulles).

Supposons $q \geq 1$ et notons $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_q}$ les valeurs propres non nulles distinctes de A , de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_q$.

Par hypothèse et par l'expression de $\text{tr}(A^p)$ précédemment obtenue, nous avons le système d'équations :

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{k=1}^q \alpha_k \lambda_{i_k}^p = 0.$$

En prenant seulement les q premières équations, on obtient le système carré :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & \dots & \lambda_{i_q} \\ \lambda_{i_1}^2 & \dots & \lambda_{i_q}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i_1}^q & \dots & \lambda_{i_q}^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de ce système est une matrice de Vandermonde inversible (son déterminant vaut $\Delta = \prod_{k=1}^q \lambda_{i_k} \prod_{1 \leq k < l \leq q} (\lambda_{i_l} - \lambda_{i_k}) \neq 0$, puisque $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_q}$ sont non nuls et deux à deux distincts), ce qui entraîne $(\alpha_1, \dots, \alpha_q) = (0, \dots, 0)$, et c'est impossible (les multiplicités des valeurs propres sont par définition non nulles).

Donc finalement $q = 0$, c'est-à-dire que A ne possède aucune valeur propre complexe non nulle. On a montré $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$, donc A est nilpotente.

VI Le retour de la topologie

Exercice 29 (*Topologie des matrices nilpotentes)

On note A l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Étudier les propriétés topologiques de A : ouvert ? fermé ? borné ? compact ? étoilé ? connexe par arcs ?

Corrigé de l'exercice 29

On suppose $n \geq 2$ (sinon $A = \{0\}$, pas très intéressant...)

Munissons (par exemple) l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|M\|_\infty = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |m_{i,j}|$.

1. **A n'est pas ouvert** car $0 \in A$ (la matrice nulle est nilpotente) mais pour tout $r > 0$, la boule $B_f(0, r)$ contient des matrices non nilpotentes (par exemple, rI_n , de norme r , est non nilpotente car inversible), donc A n'est pas voisinage de 0.
2. **A est fermé** car si $(M_k)_{k \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ est une suite de matrices nilpotentes qui converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_k^n = 0,$$

(car l'indice de nilpotence est forcément inférieur ou égal à $n = \dim(\mathbb{R}^n)$), donc en passant à la limite lorsque $k \rightarrow +\infty$, on obtient par continuité du produit matriciel $M^n = 0$, donc $M \in A$.

Variante : on a $A = \varphi^{-1}(\{0\})$, où $\varphi : M \mapsto M^n$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même (par produit de fonctions continues). Puisque $\{0\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que A est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. **A n'est pas borné** car pour tout $r > 0$, la matrice M telle que $M_{1,n} = r$ et les autres coefficients sont nuls est nilpotente (car triangulaire supérieure avec diagonale nulle) et de norme $\|M\|_\infty = r$ (arbitrairement grande).
4. **A n'est pas compact** car non borné.
5. **A est étoilé** car pour toute matrice $M \in A$, le segment $[0, M]$ est inclus dans A .
En effet, pour tout $t \in [0, 1]$, la matrice $M_t = (1-t)0 + tM = tM$ est nilpotente comme M puisque $M_t^n = t^n M^n = 0$.
6. **A est connexe par arcs** car étoilé.

Remarque

En revanche, A n'est pas convexe : par exemple, pour $n = 2$, les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = M_1^T$ sont nilpotentes (car triangulaires strictes), mais le milieu M du segment $[M_1, M_2]$ ne l'est pas, puisque

$$M = \frac{M_1 + M_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Exercice 30 (**Connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$ (une deuxième méthode))

1. Soit T une matrice triangulaire inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que T peut être reliée à I_n par un chemin continu de $GL_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Corrigé de l'exercice 30

1. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure avec $t_{i,i} \neq 0$ pour tout $i \in [1, n]$.

Puisque \mathbb{C}^* est connexe par arcs, il existe des chemins continus $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ de $[0, 1]$ dans \mathbb{C}^* tels que pour tout $i \in [1, n]$, $\gamma_i(0) = t_{i,i}$ et $\gamma_i(1) = 1$. Posons, pour $t \in [0, 1]$:

$$M(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & (1-t)t_{1,2} & \cdots & (1-t)t_{1,n} \\ 0 & \gamma_2(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (1-t)t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_n(t) \end{pmatrix}.$$

La fonction $M : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est continue (car chaque fonction coordonnée, c'est-à-dire chaque coefficient de $M(t)$, est une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{C}), vérifie $M(0) = T$, $M(1) = I_n$ et $\forall t \in [0, 1]$, $M(t) \in GL_n(\mathbb{C})$ puisque $\det(M(t)) = \prod_{i=1}^n \gamma_i(t) \neq 0$.

On a donc bien relié T à I_n par un chemin continu tracé dans $GL_n(\mathbb{C})$.

On procède de même si T est triangulaire inférieure inversible.

2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Cette matrice est trigonalisable, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = T$ est triangulaire supérieure inversible (puisque $\det(T) = \det(A) \neq 0$).

En reprenant le chemin $M : [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ précédent et en posant :

$$\forall t \in [0, 1], \quad N(t) = PM(t)P^{-1},$$

on a bien $N : [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ (puisque $\det(N(t)) = \det(M(t)) \neq 0$ pour tout t), N continue (par continuité du produit matriciel et continuité de M), et les relations $N(0) = PTP^{-1} = A$, $N(1) = PI_nP^{-1} = I_n$. Donc toute matrice inversible A est reliée à I_n dans $GL_n(\mathbb{C})$. Par transitivité, on en déduit que deux matrices quelconques A, B de $GL_n(\mathbb{C})$ peuvent être reliées par un chemin tracé dans $GL_n(\mathbb{C})$, ce qui prouve que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 31 (**Un résultat de densité)

Soit $n \geq 1$.

1. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables est dense.

Indication : utiliser le fait que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est trigonalisable.

2. En considérant la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, justifier que ce résultat est faux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 31

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = T$ est triangulaire supérieure.

Quitte à permuter les colonnes de la matrice P , on peut supposer que les valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de A (donc les éléments diagonaux de T), sont rangés par module croissant :

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|.$$

L'idée est alors de perturber légèrement la diagonale de T afin d'avoir n éléments deux à deux distincts, par exemple en considérant la suite de matrices triangulaires supérieures $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall i \in [1, n], \quad T_k[i, i] = T[i, i] + \frac{i}{k}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad i \neq j \implies T_k[i, j] = T[i, j].$$

Les matrices T_k sont diagonalisables pour k suffisamment grand car pour $1 \leq i < j \leq n$:

$$T_k[i, i] = T_k[j, j] \iff T[i, i] - T[j, j] = \frac{j-i}{k} < \frac{n}{k},$$

donc dès que

$$\frac{n}{k} < \min \{ |T[i, i] - T[j, j]|, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad T[i, i] - T[j, j] \neq 0 \},$$

(si ce min existe, sinon n'importe quelle valeur de $k \in \mathbb{N}^*$ convient) cette condition est impossible. On a donc pour k assez grand $T_k[1, 1], \dots, T_k[n, n]$ deux à deux distincts, et donc χ_{T_k} est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

Ainsi, on dispose d'une suite $(T_k)_{k \geq k_0}$ de matrices diagonalisables qui converge vers T . Par continuité du produit matriciel, la suite $(A_k) = (PT_kP^{-1})_{k \geq k_0}$ est formée de matrices diagonalisables et converge vers $PTP^{-1} = A$. Ainsi, toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, ce qui montre la densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ était limite d'une suite $(A_k)_k$ de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on aurait alors par continuité de la trace et du déterminant :

$$\chi_{A_k}(X) = X^2 - \text{tr}(A_k)X + \det(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = \chi_A(X) = X^2 + 1.$$

En particulier en considérant les discriminants $\Delta_k = \text{tr}(A_k)^2 - 4 \det(A_k)$, on aurait

$$\Delta_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \text{tr}(A)^2 - 4 \det(A) = -4 < 0.$$

Mais A_k étant diagonalisable, on a χ_{A_k} nécessairement scindé sur \mathbb{R} , donc $\Delta_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui est contradictoire avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta_k = -4$.

Donc A n'est pas limite d'une suite de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, ce qui prouve que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

VII Trigonalisation

Exercice 32 (**Calculs explicites)

Pour chacune des matrices qui suit : justifier qu'elle n'est pas diagonalisable, puis calculer une matrice triangulaire supérieure T qui lui soit semblable, ainsi que la matrice de passage P associée.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 32

- 1.
- 2.

3. Pour $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

Via par exemple $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$, on obtient $\chi_C = (X - 2)^3$.

On trouve ensuite $E_2(C) = \text{Vect}(0, 1, 1)$ de dimension 1.

On peut alors montrer que C est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On cherche donc une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $CV_1 = 2V_1$, $CV_2 = 2V_2 + V_1$ et $CV_3 = 2V_3 + V_2$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} V_1 \in \text{Ker}(C - 2I_3) \\ V_1 = (C - 2I_3)V_2 \\ V_2 = (C - 2I_3)V_3 \end{cases},$$

où l'on veut en particulier que $V_1 = (C - 2I_3)^2 V_3$ soit non nul, donc que $V_3 \notin \text{Ker}(C - 2I_3)^2$.

Or on a $C - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $(C - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, en prenant $V_3 = (0, 0, 1)$ par exemple, on a bien $V_3 \notin \text{Ker}(C - 2I_3)^2$.

On pose ensuite $V_2 = (C - 2I_3)V_3 = (-1, 1, 0)$ et $V_1 = (C - 2I_3)V_2 = (0, -2, -2)$, et comme on a $V_1 = (C - 2I_3)^2 V_3$ et que $(C - 2I_3)^3 = (0)$ par le théorème de Cayley-Hamilton, on est sûr que $V_1 \in \text{Ker}(C - 2I_3)$, donc que $CV_1 = 2V_1$.

Enfin, il est facile de vérifier que (V_1, V_2, V_3) est libre, c'est donc bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

D'où $C = PTP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.