Exercices du CH08 : Réduction des endomorphismes - aspects géométriques

Exercices de la banque INP à étudier : ex 59, 67, 69, 70 (exemples d'études de diagonalisabilité), 72 (endomorphismes de rang 1), 73 (calcul de commutant), 83 (valeurs propres de $u \circ v$ et $v \circ u$).

I Exemples en petite dimension

Exercice 1 (*Diagonalisation)
Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables et les diagonaliser :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 1

Exercice 2 (*Avec paramètres... 1)
Pour $m \in \mathbb{R}$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A et déterminer les valeurs propres de A.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable ?

Corrigé de l'exercice 2

Exercice 3 (Avec paramètres... 2)**
Pour quelles valeurs des scalaires a, b, c et d la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Corrigé de l'exercice 3

Exercice 4 (*Endomorphisme d'un espace de matrices)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Étant donnée une matrice réelle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calculer $AM - MA$.
2. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme (de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) : $f : M \mapsto AM - MA$.
3. Retrouver les éléments propres de f en écrivant cette fois sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 4

II Exemples en grande dimension

Exercice 5 (*Dérivation)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note D_n l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $D_n(P) = P'$.
Déterminer si D_n est diagonalisable.

Corrigé de l'exercice 5

Exercice 6 (*Endomorphisme d'un espace de suites)
Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites complexes. On définit $\Delta \in \mathcal{L}(E)$ par : $\Delta\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Δ.

Corrigé de l'exercice 6

Exercice 7 (Matrices de rang 1)**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $rg(A) = 1$. Montrer que A est diagonalisable ssi $tr(A) \neq 0$.
2. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls. À quelle condition la matrice X^tY est-elle diagonalisable ?

Corrigé de l'exercice 7

Exercice 8 (Matrices de rang 2)**

1. Soient $n \geq 2$, K un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $rg(M) \leq 2$. Exprimer le polynôme caractéristique de M à l'aide de $tr(M)$ et $tr(M^2)$.
2. *Application*
   Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels. On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $m_{n+1,i} = a_i$ et $m_{i,n+1} = b_i$, et les autres coefficients sont nuls.
   a. Discuter le rang de M.
   b. Calculer M^2 et en déduire χ_M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Corrigé de l'exercice 8

Exercice 9 (Matrice en carré)**
Soient un entier $n \geq 3$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer les éléments propres de M. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Expliciter ses espaces propres.

Corrigé de l'exercice 9

Exercice 10 (*Matrice anti-diagonale par blocs)**
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} (0) & A \\ I_n & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'on a $\chi_B(X) = \chi_A(X^2)$.
2. Discuter la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A.

Corrigé de l'exercice 10

1. On a $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & -A \\ -I_n & XI_n \end{vmatrix}$, donc en effectuant la transvection par blocs
$$(C_{n+1}, \cdots, C_{2n}) \leftarrow (C_{n+1}, \cdots, C_{2n}) + X(C_1, \cdots, C_n),$$
on obtient
$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} XI_n & -A + X^2 I_n \\ -I_n & (0) \end{vmatrix}.$$
En effectuant alors les échanges de lignes
$$L_1 \leftrightarrow L_{n+1}, \cdots, L_n \leftrightarrow L_{2n},$$
on obtient
$$\chi_B(X) = (-1)^n \begin{vmatrix} -I_n & (0) \\ XI_n & -A + X^2 I_n \end{vmatrix} = (-1)^n \det(-I_n)\det(X^2 I_n - A) = \chi_A(X^2).$$

2. On a donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:
$$\lambda \in Sp(B) \iff \lambda^2 \in Sp(A) \iff -\lambda \in Sp(B).$$
Puisque tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées opposées, on a
$$Card(Sp(B) \setminus \{0\}) = 2Card(Sp(A) \setminus \{0\}),$$
et $0 \in Sp(A) \iff 0 \in Sp(B)$.
Comparons maintenant les sous-espaces propres des matrices A et B : pour tout $\lambda \in Sp(B)$ et tout vecteur $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$ (avec V_1 et V_2 dans $\mathbb{C}^n$), on a
$$BV = \lambda V \iff \begin{cases} AV_2 = \lambda V_1 \\ V_1 = \lambda V_2 \end{cases} \iff \begin{cases} V_1 = \lambda V_2 \\ AV_2 = \lambda^2 V_2 \end{cases} \iff V = \begin{pmatrix} \lambda V_2 \\ V_2 \end{pmatrix},\ V_2 \in E_{\lambda^2}(A).$$
Ainsi $E_\lambda(B)$ est clairement isomorphe à $E_{\lambda^2}(A)$, donc
$$\forall \lambda \in Sp(B), \qquad \dim(E_\lambda(B)) = \dim(E_{\lambda^2}(A)) = \dim(E_{-\lambda}(B)).$$
En conséquence :
$$\sum_{\lambda \in Sp(B),\ \lambda \neq 0} \dim(E_\lambda(B)) = 2 \sum_{\mu \in Sp(A),\ \mu \neq 0} \dim(E_\mu(A)).$$
Deux cas se présentent alors :
   - Si $0 \notin Sp(A)$, alors $0 \notin Sp(B)$ et
   $$\sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim(E_\lambda(B)) = 2 \sum_{\mu \in Sp(A)} \dim(E_\mu(A)),$$
   donc on a l'équivalence :
   $$A \text{ diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \iff B \text{ diagonalisable dans } \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$
   - Si $0 \in Sp(A)$, alors $0 \in Sp(B)$ et $\dim(E_0(B)) = \dim(E_0(A)) \geq 1$, donc
   $$\sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim(E_\lambda(B)) = 2 \left(\sum_{\mu \in Sp(A)} \dim(E_\mu(A)) \right) - \dim(E_0(A)) < 2n,$$
   donc B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ (que A soit diagonalisable ou non).

Finalement, on a (B diagonalisable $\implies$ A diagonalisable), mais pas l'inverse.
En revanche, on a (A diagonalisable et inversible $\iff$ B diagonalisable).

Exercice 11 (Matrice tridiagonale)**

Soient $n \geq 1$, $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P_n = \det(XI_n - A_n) = \chi_{A_n}$.

1. Montrer : $\forall n \geq 3$, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.
   Calculer P_1 et P_2.
2. Pour tout $x \in]-2, 2[$, on pose $x = 2\cos\alpha$ avec $\alpha \in]0, \pi[$. Montrer que : $P_n(x) = \frac{\sin\big((n+1)\alpha\big)}{\sin\alpha}$.
3. En déduire que P_n admet n racines puis que A_n est diagonalisable.

Corrigé de l'exercice 11

Exercice 12 (Matrice compagnon)**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
   On pourra développer par rapport à la dernière ligne et procéder par récurrence sur n.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Calculer le sous-espace propre $E_\lambda(A)$.
3. A quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?
4. Trouver une matrice A telle que $\chi_A(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X + 1$.

Corrigé de l'exercice 12

1. On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & X & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & X & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne, il vient :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= (X - a_{n-1}) \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & -1 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & X & -a_{n-3} \\ 0 & & -1 & -a_{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (X - a_{n-1})X^{n-1} + D_{n-1}. \end{aligned}$$

Mais le déterminant D_{n-1} (de taille $n-1$) se calcule simplement par récurrence, en le développant par rapport à sa dernière ligne :

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & X & -a_{n-3} \\ 0 & & -1 & -a_{n-2} \end{vmatrix} = -a_{n-2}X^{n-2} + \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -a_0 \\ -1 & X & \ddots & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -1 & -a_{n-3} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$D_{n-1} = -a_{n-2}X^{n-2} + D_{n-2}.$$

Une récurrence immédiate fournit donne alors (puisque $D_2 = \begin{vmatrix} X & -a_0 \\ -1 & -a_1 \end{vmatrix} = -a_1X - a_0$)

$$D_{n-1} = -a_{n-2}X^{n-2} - a_{n-3}X^{n-3} - \cdots - a_2X^2 - a_1X - a_0.$$

Donc

$$\chi_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - \cdots - a_2X^2 - a_1X - a_0.$$

2. Si λ est une valeur propre complexe, on a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A) \iff \begin{cases} a_0x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + a_1x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} + a_{n-2}x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} + a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1})x_n \\ x_{n-2} = (\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2})x_n \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1)x_n \\ (\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0)x_n = 0 \end{cases}.$$

Mais λ étant valeur propre, on a (d'après la première question) :

$$\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0 = \chi_A(\lambda) = 0.$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A) \iff \begin{cases} x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1})x_n \\ x_{n-2} = (\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2})x_n \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1)x_n \end{cases},$$

ce qui montre que

$$E_\lambda(A) = Vect \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1 \\ \vdots \\ \lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2} \\ \lambda - a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. La question précédente montre que chaque sous-espace propre de A est de dimension 1. La matrice A n'est donc diagonalisable que si elle possède n sous-espaces propres. On a donc (**dans ce cas seulement !**) :

$$A \text{ est diagonalisable } \iff A \text{ possède n valeurs propres distinctes.}$$

4. La matrice compagnon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

convient.

III Exercices théoriques

Exercice 13 (*Vecteurs propres, noyau et image)
Montrer que tout vecteur propre d'un endomorphisme se trouve dans le noyau ou dans l'image de cet endomorphisme.

Corrigé de l'exercice 13

Exercice 14 (*Valeurs propres de module 1)**
Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que toutes les valeurs propres (prises dans $\mathbb{C}$) de A soient de module 1. On suppose aussi $\det(A) = 1$. Montrer que 1 est valeur propre de A.

Corrigé de l'exercice 14

Exercice 15 (Spectres de $f \circ g$ et $g \circ f$)**
Soient E un K-espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. Montrer : $\mathrm{Sp}(f \circ g) \cup \{0\} = \mathrm{Sp}(g \circ f) \cup \{0\}$.
2. Établir que, si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Sp}(f \circ g) = \mathrm{Sp}(g \circ f)$.
3. Exhiber un espace vectoriel E et des endomorphismes f et g de E pour lesquels $\mathrm{Sp}(f \circ g) \neq \mathrm{Sp}(g \circ f)$.

Corrigé de l'exercice 15

Exercice 16 (Matrice stochastique)**
On dit d'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est **stochastique** lorsque :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ a_{i,j} \in [0,1] \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. Établir : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A),\ \exists i \in \{1, \ldots, n\},\ |\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}$.
   On en déduit une propriété de localisation des racines : on a $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_f(a_{i,i}, 1 - a_{i,i})$.

Corrigé de l'exercice 16

Exercice 17 (Disques de Gershgorin)**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_f\left(a_{i,i}, \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|\right)$.
   Les $B_f\left(a_{i,i}, \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|\right)$ sont appelés disques de Gershgorin de A.
2. Démontrer le **théorème de Hadamard**, qui s'énonce :
   `Soient` $n \in \mathbb{N}^*$ `et` $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ `telle que :` $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$`. Alors` A `est inversible.`
   On dit d'une telle matrice A qu'elle est à diagonale strictement dominante.

Corrigé de l'exercice 17

Exercice 18 (Polynômes caractéristiques de AB et BA)**
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Le but de l'exercice est de montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Montrer le résultat lorsque l'une des matrices est inversible.

   On suppose donc dans la suite que ni A ni B ne sont inversibles.
2. Démontrer qu'il existe $a > 0$ tel que : $\forall t \in]0, a[$, $A + tI_n \in GL_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ t & \longmapsto & \chi_{A_t} \end{array} \right.$ est continue, où $A_t = (A + tI_n)B$.
4. Conclure.

Corrigé de l'exercice 18

Exercice 19 (*Une condition suffisante de diagonalisabilité)**

1. Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $Ker(f - \lambda Id_E)$ et $Im(f - \lambda Id_E)$ sont en somme directe. Montrer que f est diagonalisable. *On pourra raisonner par récurrence sur n.*
2. *Pour mieux comprendre la situation* : illustrer la contraposée de ce résultat en examinant par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Corrigé de l'exercice 19

Exercice 20 (*Une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité)**
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable ssi tout sev F de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Corrigé de l'exercice 20

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons u diagonalisable. Il existe donc une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres pour u. Etant donné F un sev de E, on peut considérer une base $\mathcal{B}_F = (e'_1, \cdots, e'_d)$ de F et compléter cette famille libre en une base $(e'_1, \cdots, e'_d, e'_{d+1}, \cdots, e'_n)$ de E, en choisissant $(e'_{d+1}, \cdots, e'_n)$ dans la famille génératrice $(e_1, \cdots, e_n)$ (voir le cours de MP2I). Le sous-espace vectoriel $G = Vect(e'_{d+1}, \cdots, e'_n)$ est alors un supplémentaire de $F = Vect(e'_1, \cdots, e'_d)$, et G est stable par u car chaque e'_i (avec $d + 1 \leq i \leq n$) est un vecteur propre pour u, donc chaque e'_i engendre une droite stable par u.

Remarque
On a en fait montré que tout sev F de E admet un supplémentaire stable par u (pas besoin que F soit déjà stable par u).

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que tout sev F de E stable par u possède un supplémentaire stable par u, et considérons la somme directe des sous-espaces propres de u :

$$F = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$$

(on a $\dim(F) \geq 1$ car $Sp(u)$ est non vide, puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Chacun des $E_\lambda(u)$ est stable par u, donc F est également stable par u. Par hypothèse, il existe alors un sev G de E tel que $F \oplus G = E$ et $u(G) \subset G$. L'idée est de considérer alors l'endomorphisme induit $v = u_G \in \mathcal{L}(G)$. Si $\dim(G) \geq 1$, alors puisqu'on est sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, v possède au moins une valeur propre, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in G \setminus \{0_E\}$ tel que $v(x) = u(x) = \lambda x$. Vu que $x \in E_\lambda(v) \subset E_\lambda(u) \subset F$, on a $x \in G \cap F = \{0_E\}$, ce qui est absurde car x est non nul en tant que vecteur propre. Donc $\dim(G) = 0$, ce qui prouve que $F = E$. Ainsi, les sous-espaces propres de u sont supplémentaires dans E, ce qui montre que u est diagonalisable.

Remarque
Pour cette implication, on peut aussi procéder par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- *L'initialisation est évidente (en dimension 1, tout endo est diagonalisable).*

- *Hérédité : soit $n \geq 2$. On suppose que pour tout $1 \leq k < n$, tout endomorphisme v en dimension k possédant la propriété du supplémentaire stable est diagonalisable. Soit u un endomorphisme en dimension n qui vérifie la propriété du supplémentaire stable.*
  Vu qu'on est sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u possède au moins une valeur propre λ, donc en considérant le SEV $F = E_\lambda(u)$ (qui est stable par u), on obtient l'existence d'un SEV G de E tel que $E = F \oplus G$ et $u(G) \subset G$. On va alors appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit $u_G \in \mathcal{L}(G)$ (avec $\dim(G) < n$ puisque $\dim(F) \geq 1$).
  - * *Si $G = \{0\}$, alors $F = E$ donc $u = \lambda Id$, donc u est diagonalisable.*
  - * *Si $\dim(G) \geq 1$, montrons que l'induit u_G vérifie la propriété du supplémentaire stable : pour tout H SEV de G tel que $u_G(H) \subset H$, on a $u(H) \subset H$, donc (par hypothèse sur u), il existe K SEV de E tel que $E = H \oplus K$ et $u(K) \subset K$. En intersectant avec G, on en déduit*
    $$G = (H \oplus K) \cap G = H \oplus (K \cap G)$$
    (facile à vérifier car $H \subset G$), et donc $K \cap G$ est un supplémentaire de H dans G stable par u_G puisque
    $$u_G(K \cap G) = u(K \cap G) \subset u(K) \cap u(G) \subset K \cap G.$$
    Par hypothèse de récurrence, l'induit u_G est donc diagonalisable. Finalement, les deux induits $u_F = \lambda Id_F$ et u_G sont diagonalisables, donc comme $E = F \oplus G$, u est finalement diagonalisable.

IV Applications de la réduction

Exercice 21 (Commutant d'un endomorphisme diagonalisable)**
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer qu'un endomorphisme v de E commute avec u ssi les sous-espaces propres de u sont stables par v.
2. On appelle **commutant** d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble $C_M = \{N \in \mathcal{M}_n(K),\ MN = NM\}$.
   Déterminer le commutant des matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 21

Exercice 22 (*Racines de matrices)
On pourra utiliser les techniques de l'exercice précédent.
Déterminer les solutions à coefficients réels et complexes des équations matricielles :

$$1.\ M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad 2.\ M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad 3.\ M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 22

Exercice 23 (*Suites vectorielle de $\mathbb{R}^3$)
On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}.$$

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0), ces trois suites sont-elles convergentes ?

Corrigé de l'exercice 23

Exercice 24 (Un peu de probas ! La patate chaude)**
Trois enfants A, B et C jouent à la patate chaude ainsi :
— Si A a la patate, il la lance à B avec la probabilité $3/4$ et à C avec la probabilité $1/4$,
— Si B a la patate, il la lance à A avec la probabilité $3/4$ et à C avec la probabilité $1/4$,
— Si C l'a, il la lance à B (c'est-à-dire avec une probabilité 1).
Calculer les probabilités a_n, b_n et c_n pour que respectivement A, B ou C aient la patate à l'issue du n-ième lancer et chercher leurs limites quand $n \to \infty$.
Il devrait naturellement apparaître une matrice stochastique pour décrire le problème...

Corrigé de l'exercice 24
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons A_n l'événement "l'enfant A a la patate à l'instant n", et de même avec B_n (pour l'enfant B), et C_n (pour l'enfant C).

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}),$$

$$b_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}),$$

$$c_{n+1} = \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}).$$

Ceci se réécrit

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \\ \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) \\ \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

D'après les données de l'énoncé, on a

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \\ \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) \\ \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix},$$

donc on a la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},$$

avec $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit par récurrence triviale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

- On a $P^{-1}MP = D$, avec

$$P = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & -28 \\ 25 & -45 & 60 \end{pmatrix}.$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient par continuité du produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & -28 \\ 25 & -45 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 16 & 16 & 16 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \frac{a_0+b_0+c_0}{35}\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Puisque $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 25 (Puissance d'un nombre algébrique)**
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre **algébrique**, c'est-à-dire racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, α^k est algébrique. *Penser aux matrices compagnons...*

Corrigé de l'exercice 25
Par hypothèse, il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ non nul tel que $P(\alpha) = 0$. Quitte à diviser par le coefficient dominant, on peut supposer P unitaire. Notons

$$P(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i,$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{Q}^n$. Ce polynôme P est le polynôme caractéristique de la matrice compagnon :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$$

(voir l'exercice 12). Ainsi, le nombre algébrique α est une valeur propre complexe de A. En considérant un vecteur propre associé $V \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A^k V = \alpha^k V,$$

donc α^k est une valeur propre de A^k. En notant $P_k = \chi_{A^k}$, on a alors $P_k \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ (car la matrice A^k est à coefficients dans $\mathbb{Q}$) et $P_k(\alpha^k) = 0$, ce qui prouve que α^k est un nombre algébrique.

V Nilpotence

Exercice 26 (*Somme et composée d'endomorphismes nilpotents)
Soient u et v deux endomorphismes nilpotents d'un même K-espace vectoriel E de dimension finie. Que dire de $u + v$? De $u \circ v$?

Corrigé de l'exercice 26

Exercice 27 (En dimension 2)**
Soit E un K-espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $Ker(u) = Im(u)$.
2. Construire une base B de E dans la quelle la matrice représentative de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(K)$ sont celles de la forme $\begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ et de déterminant nul.

Corrigé de l'exercice 27

Exercice 28 (*Condition nécessaire et suffisante de nilpotence)**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$. Montrer que A est nilpotente ssi $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $tr(A^p) = 0$.
On introduira les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de A et on utilisera l'expression de la trace à l'aide des valeurs propres...

Corrigé de l'exercice 28
Notons $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ les valeurs propres complexes de A comptées avec multiplicités. La matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc semblable à une matrice triangulaire supérieure T, avec $t_{i,i} = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^p est semblable à T^p, qui est aussi triangulaire supérieure, d'éléments diagonaux $(\lambda_1^p, \cdots, \lambda_n^p)$. Donc

$$tr(A^p) = tr(T^p) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)} \alpha_\lambda \lambda^p = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A) \setminus \{0\}} \alpha_\lambda \lambda^p,$$

où les entiers $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$ sont les multiplicités des valeurs propres. Montrons alors l'équivalence voulue :

$\boxed{\Rightarrow}$ Si A est nilpotente, alors $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (0, \cdots, 0)$, donc par ce qui précède on a $tr(A^p) = 0$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$ (et même pour tout $p \in \mathbb{N}^*$).

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $tr(A^p) = 0$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.
On va montrer que toutes les valeurs propres de A sont nulles.
Notons $q = Card(Sp_{\mathbb{C}}(A)) \setminus \{0\} \in [\![0, n]\!]$ (le nombre de valeurs propres non nulles).
Supposons $q \geq 1$ et notons $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_q}$ les valeurs propres non nulles distinctes de A, de multiplicités respectives $\alpha_1, \cdots, \alpha_q$.
Par hypothèse et par l'expression de $tr(A^p)$ précédemment obtenue, nous avons le système d'équations :

$$\forall p \in [\![1, n]\!], \qquad \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \lambda_{i_k}^p = 0.$$

En prenant seulement les q premières équations, on obtient le système carré :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & \cdots & \lambda_{i_q} \\ \lambda_{i_1}^2 & \cdots & \lambda_{i_q}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i_1}^q & \cdots & \lambda_{i_q}^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de ce système est une matrice de Vandermonde inversible (son déterminant vaut $\Delta = \prod_{k=1}^{q} \lambda_{i_k} \prod_{1 \leq k < l \leq q} (\lambda_{i_l} - \lambda_{i_k}) \neq 0$, puisque $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_q}$ sont non nuls et deux à deux distincts), ce qui entraîne $(\alpha_1, \cdots, \alpha_q) = (0, \cdots, 0)$, et c'est impossible (les multiplicités des valeurs propres sont par définition non nulles).
Donc finalement $q = 0$, c'est-à-dire que A ne possède aucune valeur propre complexe non nulle.
On a montré $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$, donc A est nilpotente.

VI Le retour de la topologie

Exercice 29 (*Topologie des matrices nilpotentes)
On note A l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Étudier les propriétés topologiques de A : ouvert ? fermé ? borné ? compact ? étoilé ? connexe par arcs ?

Corrigé de l'exercice 29
On suppose $n \geq 2$ (sinon $A = \{0\}$, pas très intéressant...)
Munissons (par exemple) l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|M\|_\infty = \sup\limits_{1\leq i,j\leq n} |m_{i,j}|$.

1. ***A* n'est pas ouvert** car $0 \in A$ (la matrice nulle est nilpotente) mais pour tout $r > 0$, la boule $B_f(0, r)$ contient des matrices non nilpotentes (par exemple, rI_n, de norme r, est non nilpotente car inversible), donc A n'est pas voisinage de 0.
2. ***A* est fermé** car si $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ est une suite de matrices nilpotentes qui converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad M_k^n = 0,$$
(car l'indice de nilpotence est forcément inférieur ou égal à $n = \dim(\mathbb{R}^n)$), donc en passant à la limite lorsque $k \to +\infty$, on obtient par continuité du produit matriciel $M^n = 0$, donc $M \in A$.
Variante : on a $A = \varphi^{-1}(\{0\})$, où $\varphi : M \mapsto M^n$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même (par produit de fonctions continues). Puisque $\{0\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que A est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. ***A* n'est pas borné** car pour tout $r > 0$, la matrice M telle que $M_{1,n} = r$ et les autres coefficients sont nuls est nilpotente (car triangulaire supérieure avec diagonale nulle) et de norme $\|M\|_\infty = r$ (arbitrairement grande).
4. ***A* n'est pas compact** car non borné.
5. ***A* est étoilé** car pour toute matrice $M \in A$, le segment $[0, M]$ est inclus dans A.
En effet, pour tout $t \in [0, 1]$, la matrice $M_t = (1 - t)0 + tM = tM$ est nilpotente comme M puisque $M_t^n = t^n M^n = 0$.
6. ***A* est connexe par arcs** car étoilé.

Remarque
En revanche, A n'est pas convexe : par exemple, pour $n = 2$, les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = M_1^T$ sont nilpotentes (car triangulaires strictes), mais le milieu M du segment $[M_1, M_2]$ ne l'est pas, puisque
$$M = \frac{M_1 + M_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
est inversible.

Exercice 30 (Connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$ (une deuxième méthode))**

1. Soit T une matrice triangulaire inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que T peut être reliée à I_n par un chemin continu de $GL_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Corrigé de l'exercice 30

1. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure avec $t_{i,i} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Puisque $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, il existe des chemins continus $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}^*$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\gamma_i(0) = t_{i,i}$ et $\gamma_i(1) = 1$. Posons, pour $t \in [0, 1]$:
$$M(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & (1-t)t_{1,2} & \cdots & (1-t)t_{1,n} \\ 0 & \gamma_2(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (1-t)t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_n(t) \end{pmatrix}.$$

La fonction $M : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est continue (car chaque fonction coordonnée, c'est-à-dire chaque coefficient de $M(t)$, est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$), vérifie $M(0) = T$, $M(1) = I_n$ et $\forall t \in [0,1],\ M(t) \in GL_n(\mathbb{C})$ puisque $\det(M(t)) = \prod_{i=1}^n \gamma_i(t) \neq 0$.
On a donc bien relié T à I_n par un chemin continu tracé dans $GL_n(\mathbb{C})$.
On procède de même si T est triangulaire inférieure inversible.

2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Cette matrice est trigonalisable, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = T$ est triangulaire supérieure inversible (puisque $\det(T) = \det(A) \neq 0$).
En reprenant le chemin $M : [0,1] \to GL_n(\mathbb{C})$ précédent et en posant :
$$\forall t \in [0,1], \qquad N(t) = PM(t)P^{-1},$$
on a bien $N : [0,1] \to GL_n(\mathbb{C})$ (puisque $\det(N(t)) = \det(M(t)) \neq 0$ pour tout t), N continue (par continuité du produit matriciel et continuité de M), et les relations $N(0) = PTP^{-1} = A$, $N(1) = PI_nP^{-1} = I_n$. Donc toute matrice inversible A est reliée à I_n dans $GL_n(\mathbb{C})$. Par transitivité, on en déduit que deux matrices quelconques A, B de $GL_n(\mathbb{C})$ peuvent être reliées par un chemin tracé dans $GL_n(\mathbb{C})$, ce qui prouve que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 31 (Un résultat de densité)**
Soit $n \geq 1$.

1. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables est dense.
Indication : utiliser le fait que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est trigonalisable.
2. En considérant la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, justifier que ce résultat est faux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 31

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = T$ est triangulaire supérieure.
Quitte à permuter les colonnes de la matrice P, on peut supposer que les valeurs propres $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ de A (donc les éléments diagonaux de T), sont rangés par module croissant :
$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n|.$$
L'idée est alors de perturber légèrement la diagonale de T afin d'avoir n éléments deux à deux distincts, par exemple en considérant la suite de matrices triangulaires supérieures $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1,n]\!], \qquad T_k[i,i] = T[i,i] + \frac{i}{k}$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ i \neq j \implies T_k[i,j] = T[i,j].$$
Les matrices T_k sont diagonalisables pour k suffisamment grand car pour $1 \leq i < j \leq n$:
$$T_k[i,i] = T_k[j,j] \iff T[i,i] - T[j,j] = \frac{j-i}{k} < \frac{n}{k},$$
donc dès que
$$\frac{n}{k} < \min\left\{|T[i,i] - T[j,j]|, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad T[i,i] - T[j,j] \neq 0\right\},$$
(si ce min existe, sinon n'importe quelle valeur de $k \in \mathbb{N}^*$ convient) cette condition est impossible. On a donc pour k assez grand $T_k[1,1], \cdots, T_k[n,n]$ deux à deux distincts, et donc χ_{T_k} est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.
Ainsi, on dispose d'une suite $(T_k)_{k \geq k_0}$ de matrices diagonalisables qui converge vers T. Par continuité du produit matriciel, la suite $(A_k) = (PT_kP^{-1})_{k \geq k_0}$ est formée de matrices diagonalisables et converge vers $PTP^{-1} = A$. Ainsi, toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, ce qui montre la densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ était limite d'une suite $(A_k)_k$ de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on aurait alors par continuité de la trace et du déterminant :
$$\chi_{A_k}(X) = X^2 - tr(A_k)X + \det(A_k) \underset{k \to +\infty}{\to} X^2 - tr(A)X + \det(A) = \chi_A(X) = X^2 + 1.$$

En particulier en considérant les discriminants $\Delta_k = tr(A_k)^2 - 4\det(A_k)$, on aurait

$$\Delta_k \underset{k\to+\infty}{\to} tr(A)^2 - 4\det(A) = -4 < 0.$$

Mais A_k étant diagonalisable, on a χ_{A_k} nécessairement scindé sur $\mathbb{R}$, donc $\Delta_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui est contradictoire avec $\lim\limits_{k\to+\infty} \Delta_k = -4$.

Donc A n'est pas limite d'une suite de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, ce qui prouve que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

VII Trigonalisation

Exercice 32 (Calculs explicites)**
Pour chacune des matrices qui suit : justifier qu'elle n'est pas diagonalisable, puis calculer une matrice triangulaire supérieure T qui lui soit semblable, ainsi que la matrice de passage P associée.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 32

1.
2.
3. Pour $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

Via par exemple $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$, on obtient $\chi_C = (X-2)^3$.
On trouve ensuite $E_2(C) = Vect(0,1,1)$ de dimension 1.
On peut alors montrer que C est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
On cherche donc une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $CV_1 = 2V_1$, $CV_2 = 2V_2 + V_1$ et $CV_3 = 2V_3 + V_2$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} V_1 \in Ker(C - 2I_3) \\ V_1 = (C-2I_3)V_2 \\ V_2 = (C-2I_3)V_3 \end{cases},$$

où l'on veut en particulier que $V_1 = (C-2I_3)^2 V_3$ soit non nul, donc que $V_3 \notin Ker(C-2I_3)^2$.
Or on a $C - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $(C-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.
Ainsi, en prenant $V_3 = (0,0,1)$ par exemple, on a bien $V_3 \notin Ker(C-2I_3)^2$.
On pose ensuite $V_2 = (C-2I_3)V_3 = (-1,1,0)$ et $V_1 = (C-2I_3)V_2 = (0,-2,-2)$, et comme on a $V_1 = (C-2I_3)^2V_3$ et que $(C-2I_3)^3 = (0)$ par le théorème de Cayley-Hamilton, on est sûr que $V_1 \in Ker(C-2I_3)$, donc que $CV_1 = 2V_1$.
Enfin, il est facile de vérifier que (V_1, V_2, V_3) est libre, c'est donc bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
D'où $C = PTP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.