Exercices du CH08 : Réduction des endomorphismes - aspects géométriques

Exercices de la banque INP à étudier : ex 59, 67, 69, 70 (exemples d'études de diagonalisabilité), 72 (endomorphismes de rang 1), 73 (calcul de commutant), 83 (valeurs propres de $u \circ v$ et $v \circ u$).

I Exemples en petite dimension

Exercice 1 (*Diagonalisation)
Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables et les diagonaliser :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (*Avec paramètres... 1)
Pour $m \in \mathbb{R}$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A et déterminer les valeurs propres de A.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 (Avec paramètres... 2)**
Pour quelles valeurs des scalaires a, b, c et d la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 (*Endomorphisme d'un espace de matrices)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Étant donnée une matrice réelle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calculer $AM - MA$.
2. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme (de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) : $f : M \mapsto AM - MA$.
3. Retrouver les éléments propres de f en écrivant cette fois sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

II Exemples en grande dimension

Exercice 5 (*Dérivation)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note D_n l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $D_n(P) = P'$.
Déterminer si D_n est diagonalisable.

Exercice 6 (*Endomorphisme d'un espace de suites)
Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites complexes. On définit $\Delta \in \mathcal{L}(E)$ par : $\Delta\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Δ.

Exercice 7 (Matrices de rang 1)**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $rg(A) = 1$. Montrer que A est diagonalisable ssi $tr(A) \neq 0$.
2. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls. À quelle condition la matrice X^tY est-elle diagonalisable ?

Exercice 8 (Matrices de rang 2)**

1. Soient $n \geq 2$, K un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $rg(M) \leq 2$. Exprimer le polynôme caractéristique de M à l'aide de $tr(M)$ et $tr(M^2)$.
2. *Application*
   Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels. On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $m_{n+1,i} = a_i$ et $m_{i,n+1} = b_i$, et les autres coefficients sont nuls.
   a. Discuter le rang de M.
   b. Calculer M^2 et en déduire χ_M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 9 (Matrice en carré)**

Soient un entier $n \geq 3$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer les éléments propres de M. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Expliciter ses espaces propres.

Exercice 10 (*Matrice anti-diagonale par blocs)**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} (0) & A \\ I_n & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'on a $\chi_B(X) = \chi_A(X^2)$.
2. Discuter la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A.

Exercice 11 (Matrice tridiagonale)**

Soient $n \geq 1$, $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P_n = \det(XI_n - A_n) = \chi_{A_n}$.

1. Montrer : $\forall n \geq 3$, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.
   Calculer P_1 et P_2.
2. Pour tout $x \in \,]-2, 2[$, on pose $x = 2\cos\alpha$ avec $\alpha \in \,]0, \pi[$. Montrer que : $P_n(x) = \dfrac{\sin\big((n+1)\alpha\big)}{\sin\alpha}$.
3. En déduire que P_n admet n racines puis que A_n est diagonalisable.

Exercice 12 (Matrice compagnon)**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
   On pourra développer par rapport à la dernière ligne et procéder par récurrence sur n.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Calculer le sous-espace propre $E_\lambda(A)$.
3. A quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?
4. Trouver une matrice A telle que $\chi_A(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X + 1$.

III Exercices théoriques

Exercice 13 (*Vecteurs propres, noyau et image)

Montrer que tout vecteur propre d'un endomorphisme se trouve dans le noyau ou dans l'image de cet endomorphisme.

Exercice 14 (*Valeurs propres de module 1)**
Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que toutes les valeurs propres (prises dans $\mathbb{C}$) de A soient de module 1. On suppose aussi $\det(A) = 1$. Montrer que 1 est valeur propre de A.

Exercice 15 (Spectres de $f \circ g$ et $g \circ f$)**
Soient E un K-espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. Montrer : $\mathrm{Sp}(f \circ g) \cup \{0\} = \mathrm{Sp}(g \circ f) \cup \{0\}$.
2. Établir que, si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Sp}(f \circ g) = \mathrm{Sp}(g \circ f)$.
3. Exhiber un espace vectoriel E et des endomorphismes f et g de E pour lesquels $\mathrm{Sp}(f \circ g) \neq \mathrm{Sp}(g \circ f)$.

Exercice 16 (Matrice stochastique)**
On dit d'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est **stochastique** lorsque :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ a_{i,j} \in [0,1] \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. Établir : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A),\ \exists i \in \{1, \dots, n\},\ |\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}$.
   On en déduit une propriété de localisation des racines : on a $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_f(a_{i,i}, 1 - a_{i,i})$.

Exercice 17 (Disques de Gershgorin)**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_f\left(a_{i,i}, \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|\right)$.
   Les $B_f\left(a_{i,i}, \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|\right)$ *sont appelés disques de Gershgorin de* A.
2. Démontrer le **théorème de Hadamard**, qui s'énonce :
   `Soient` $n \in \mathbb{N}^*$ `et` $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ `telle que :` $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$. `Alors` A `est inversible.`
   On dit d'une telle matrice A qu'elle est à diagonale strictement dominante.

Exercice 18 (Polynômes caractéristiques de AB et BA)**
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Le but de l'exercice est de montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Montrer le résultat lorsque l'une des matrices est inversible.

   On suppose donc dans la suite que ni A ni B ne sont inversibles.
2. Démontrer qu'il existe $a > 0$ tel que : $\forall t \in]0, a[,\ A + tI_n \in GL_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ t & \longmapsto & \chi_{A_t} \end{array} \right.$ est continue, où $A_t = (A + tI_n)B$.
4. Conclure.

Exercice 19 (*Une condition suffisante de diagonalisabilité)**

1. Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $Ker(f - \lambda Id_E)$ et $Im(f - \lambda Id_E)$ sont en somme directe. Montrer que f est diagonalisable.
   On pourra raisonner par récurrence sur n.
2. *Pour mieux comprendre la situation* : illustrer la contraposée de ce résultat en examinant par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 20 (*Une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité)**
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable ssi tout sev F de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

IV Applications de la réduction

Exercice 21 (Commutant d'un endomorphisme diagonalisable)**
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer qu'un endomorphisme v de E commute avec u ssi les sous-espaces propres de u sont stables par v.
2. On appelle **commutant** d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble $C_M = \{N \in \mathcal{M}_n(K),\ MN = NM\}$.
   Déterminer le commutant des matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 22 (*Racines de matrices)
On pourra utiliser les techniques de l'exercice précédent.
Déterminer les solutions à coefficients réels et complexes des équations matricielles :

$$1.\ M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad 2.\ M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad 3.\ M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23 (*Suites vectorielle de $\mathbb{R}^3$)
On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}.$$

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0), ces trois suites sont-elles convergentes ?

Exercice 24 (Un peu de probas ! La patate chaude)**
Trois enfants A, B et C jouent à la patate chaude ainsi :
- Si A a la patate, il la lance à B avec la probabilité $3/4$ et à C avec la probabilité $1/4$,
- Si B a la patate, il la lance à A avec la probabilité $3/4$ et à C avec la probabilité $1/4$,
- Si C l'a, il la lance à B (c'est-à-dire avec une probabilité 1).

Calculer les probabilités a_n, b_n et c_n pour que respectivement A, B ou C aient la patate à l'issue du n-ième lancer et chercher leurs limites quand $n \to \infty$.
Il devrait naturellement apparaître une matrice stochastique pour décrire le problème...

Exercice 25 (Puissance d'un nombre algébrique)**
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre **algébrique**, c'est-à-dire racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, α^k est algébrique. *Penser aux matrices compagnons...*

V Nilpotence

Exercice 26 (*Somme et composée d'endomorphismes nilpotents)
Soient u et v deux endomorphismes nilpotents d'un même K-espace vectoriel E de dimension finie. Que dire de $u + v$? De $u \circ v$?

Exercice 27 (En dimension 2)**
Soit E un K-espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $Ker(u) = Im(u)$.
2. Construire une base B de E dans la quelle la matrice représentative de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(K)$ sont celles de la forme $\begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ et de déterminant nul.

Exercice 28 (*Condition nécessaire et suffisante de nilpotence)**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$. Montrer que A est nilpotente ssi $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $tr(A^p) = 0$.
On introduira les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de A et on utilisera l'expression de la trace à l'aide des valeurs propres...

VI Le retour de la topologie

Exercice 29 (*Topologie des matrices nilpotentes)
On note A l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Étudier les propriétés topologiques de A : ouvert ? fermé ? borné ? compact ? étoilé ? connexe par arcs ?

Exercice 30 (Connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$ (une deuxième méthode))**

1. Soit T une matrice triangulaire inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que T peut être reliée à I_n par un chemin continu de $GL_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 31 (Un résultat de densité)**
Soit $n \geq 1$.

1. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables est dense.
   Indication : utiliser le fait que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est trigonalisable.
2. En considérant la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, justifier que ce résultat est faux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

VII Trigonalisation

Exercice 32 (Calculs explicites)**
Pour chacune des matrices qui suit : justifier qu'elle n'est pas diagonalisable, puis calculer une matrice triangulaire supérieure T qui lui soit semblable, ainsi que la matrice de passage P associée.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$