Exercices du CH07 : Topologie des espaces vectoriels normés

Exercices de la banque INP à étudier : ex 1 (normes équivalentes), 13 (compacité), 34 (adhérence d'un sev, d'un convexe), 35 (caractérisation séquentielle de la continuité), 36 (caractérisation de la continuité des applications linéaires), 37 (non équivalences de normes), 38 (normes triples), 39 (suites de carré sommables), 44 (adhérence d'une réunion, d'une intersection), 45 (convexité et distance), 54 (application linéaire définie par une série)

I TD du mardi 03/11

Exercice 1 (*Ouverts ? Fermés ?)
Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$:

1. La partie $\mathbb{Z}$ est-elle ouverte ? fermée ? Déterminer son intérieur et son adhérence.
2. Même question avec $\mathbb{Q}$.
3. Même question avec $X = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Corrigé de l'exercice 1

1. • Tout d'abord, la partie $\mathbb{Z}$ n'est pas ouverte car $0 \in \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{Z}$ n'est pas voisinage de 0, puisque pour tout $r > 0$, $B(0,r) =]-r, r[\not\subset \mathbb{Z}$.
   • Montrons que la partie $\mathbb{Z}$ est fermée.
   * **Première méthode** : le complémentaire est
   $$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k, k+1[,$$
   et cette partie est ouverte (car réunion d'intervalles ouverts, donc réunion de parties ouvertes).
   * **Seconde méthode** : si (x_n) est une suite de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in \mathbb{R}$, alors on a $|x - x_n| \leq 1/4$ à partir d'un certain rang n_0, donc
   $$n \geq n_0 \implies x_n \in [x - 1/4, x + 1/4] \cap \mathbb{Z}.$$
   Puisque $[x - 1/4, x + 1/4]$ est un intervalle de largeur $1/2$, donc il contient au plus un entier, et donc la suite (x_n) stationne à partir du rang n_0. Donc $x = x_{n_0} \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve par le critère séquentiel que $\mathbb{Z}$ est fermée.
   • On a $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et pour tout $r > 0$, $B(x,r) =]x - r, x + r[\not\subset \mathbb{Z}$, donc $\mathbb{Z}$ n'est voisinage d'aucun de ses points.
   • Puisque $\mathbb{Z}$ est fermée, on a $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.
2. • $\mathbb{Q}$ n'est pas ouverte car (comme pour $\mathbb{Z}$), $0 \in \mathbb{Q}$ mais $\mathbb{Q}$ n'est pas voisinage de 0 (puisque pour tout réel $r > 0$, l'intervalle $]-r, r[$ contient des irrationnels).
   • $\mathbb{Q}$ n'est pas fermée car $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas ouvert, puisque $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mais $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas voisinage de $\sqrt{2}$ (en effet tout intervalle $]\sqrt{2} - r, \sqrt{2} + r[$ contient des rationnels).
   • De même que pour 0, $\mathbb{Q}$ n'est voisinage d'aucun de ses points, donc $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$.
   • Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
3. • X n'est pas ouverte car $1 \in X$ mais X n'est pas voisinage de 1 (en effet, pour tout $r > 0$, l'intervalle $]1 - r, 1 + r[$ contient des irrationnels, donc des éléments hors de X).
   • X n'est pas fermée car la suite $(x_n) = (1/n)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans X et converge vers $0 \notin X$.
   • $X \subset \mathbb{Q}$ donc $\mathring{X} \subset \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$, ce qui montre que $\mathring{X} = \emptyset$.

- $\overline{X} = X \cup \{0\}$. En effet, $0 \in \overline{X}$ (puisque 0 est la limite de la suite $(1/n)$, qui est à valeurs dans X), donc $X \cup \{0\} \subset \overline{X}$.
  De plus, l'ensemble $X \cup \{0\}$ est fermé, puisque son complémentaire est

$$]-\infty, 0[\cup]1, \infty[\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[\right),$$

  qui est ouvert en tant que réunion d'ouverts. Ainsi, $X\cup\{0\}$ est un fermé contenant X, donc par minimalité de l'adhérence, on en déduit que $\overline{X} \subset (X \cup \{0\})$.

Exercice 2 (Intersection de parties denses)**
Soient A et B deux parties denses d'un espace vectoriel normé E.

1. On suppose la partie A ouverte. Montrer que $A \cap B$ est une partie dense.
2. Et si A n'est plus supposée ouverte ?

Corrigé de l'exercice 2

1. Soit $x \in E$ et $r > 0$. Montrons que $B(x, r)$ contient au moins un élément de $A \cap B$.
   Déjà, $\overline{A} = E$ donc $B(x, r)$ contient un élément $a \in A$.
   Ensuite, A étant ouverte, l'intersection finie $A \cap B(x, r)$ est aussi ouverte donc il existe $\rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \subset A \cap B(x, r)$.
   Enfin, puisque $\overline{B} = E$, la boule $B(a, \rho)$ contient un élément $b \in B$, qui est aussi dans A puisque $B(a, \rho) \subset A$. Donc $b \in (A \cap B) \cap B(x, r)$, ce qui montre que $A \cap B$ est dense dans E.

2. Dans le cas général, l'intersection de deux parties denses dans E n'est pas nécessairement dense dans E. Dans le pire des cas, cette intersection peut même être vide. Par exemple dans $\mathbb{R}$, les parties $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses (puisque tout intervalle réel $]x - r, x + r[$ contient des rationnels et des irrationnels) mais $A \cap B = \emptyset$ (donc n'est pas dense).

II TD du mercredi 04/11

1) MPI* seulement

Exercice 3 ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)**
En utilisant la propriété d'Archimède ($\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N},\ n\varepsilon > x$), redémontrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 3
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Montrons que la boule ouverte $]x-r, x+r[$ contient au moins un nombre rationnel.
Analyse : si $q = a/b$ (avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$) vérifie $x - r < q < x + r$, alors $b(x - r) < a < b(x + r)$.
Si l'on choisit $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $b(x+r) - b(x-r) > 1$, c'est-à-dire $b(2r) > 1$, alors un tel entier a existe.
Synthèse : par la propriété d'Archimède, il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $b(2r) > 1$.
On choisit ensuite un entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que $b(x - r) < a < b(x + r)$ (ce qui est possible car $b(x + r) - b(x - r) = 2br > 1$), et alors le rationnel $q = a/b$ vérifie bien $x - r < q < x + r$.

Exercice 4 (*Points isolés, parties discrètes)**
Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in X$. On dit que x est un **point isolé** de X lorsqu'il existe un ouvert O de $\mathbb{R}$ tel que $O \cap X = \{x\}$. Et on dit que X est **discrète** lorsque tous ses points sont isolés.

1. Exhiber des parties discrètes et infinies de $\mathbb{R}$. De telles parties peuvent-elles être bornées ?
2. Soit X une partie discrète de $\mathbb{R}$. On se propose de montrer que X est au plus dénombrable. Pour cela, on introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble :
$$X_n = \left\{ x \in X,\ ]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\cap X = \{x\} \right\}.$$
   (a) Déterminer une relation entre les $(X_n)_{n\geq 1}$ et X.
   (b) Que dire de la distance entre deux points de X_n ?
   (c) En déduire une injection $X_n \to \mathbb{Z}$ et conclure.
3. Réciproquement : une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement discrète ?

Corrigé de l'exercice 4

1. $\mathbb{Z}$ est une partie discrète et infinie de $\mathbb{R}$, car pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $]x-1, x+1[\cap \mathbb{Z} = \{x\}$.
Il existe également des parties discrètes, infinies et bornées. C'est le cas de $X = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$ par exemple, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}\right[\cap X = \{\frac{1}{n}\},$$
et $X \subset [0,1]$.
2. (a) X est discrète et tout ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x contient un intervalle du type $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Donc :
$$\forall x \in X,\ \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\cap X = \{x\},$$
ce qui montre l'inclusion $X \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$. Mais chaque X_n est par définition dans X, donc on a l'inclusion réciproque, et finalement l'égalité
$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} X_n.$$
   (b) Si $(x,y) \in X_n^2$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), alors
$$|x-y| < \frac{1}{n} \implies y \in]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\implies y = x,$$
donc
$$x \neq y \implies |x-y| \geq \frac{1}{n}.$$
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on va exploiter l'idée que chaque $x \in X_n$ est dans un seul intervalle du type $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, en considérons l'application
$$\varphi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} X_n & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & \lfloor nx \rfloor \end{array} \right.$$
(en d'autres termes, $\varphi_n(x)$ est l'unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$). Cette application est injective car, pour tout $(x,y) \in X_n^2$:
$$\varphi_n(x) = \varphi_n(y) \implies (x,y) \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[^2 \implies |x-y| < \frac{1}{n} \implies x = y.$$
Vu que $\mathbb{Z}$ est dénombrable, on en déduit que X_n est au plus dénombrable, et donc X est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.
On a donc montré que **toute partie discrète de $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable**.

3. Non : par exemple, la partie $\mathbb{Q}$ est dénombrable mais non discrète (car par exemple, $0 \in \mathbb{Q}$ n'est pas isolé puisque tout voisinage de 0 contient des rationnels non nuls).

Exercice 5 (Valeurs d'adhérence d'une suite)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E. On note $Adh(u)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence (c'est-à-dire l'ensemble des limites des suites extraites de u).
Montrer que $Adh(u) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k,\ k \geq n\}}$ et en déduire que $Adh(u)$ est fermé.

Corrigé de l'exercice 5

$\boxed{\subset}$ Soit $\lambda \in Adh(u)$. Alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, la boule ouverte $B(\lambda, \varepsilon)$ contient tous les $u_{\varphi(n)}$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en posant $n_1 = \max(n_0, n)$, on a donc $\varphi(n_1) \geq \varphi(n) \geq n$ et $u_{\varphi(n_1)} \in B(\lambda, \varepsilon)$. On a donc trouvé un terme u_k dans la boule $B(\lambda, \varepsilon)$, avec $k = \varphi(n_1) \geq n$, ce qui montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda \in \overline{\{u_k,\ k \geq n\}}$. D'où $\lambda \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k,\ k \geq n\}}$.

$\boxed{\supset}$ Réciproquement, supposons que $\lambda \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k,\ k \geq n\}}$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists k \geq n, \quad \|u_k - \lambda\| < \varepsilon.$$

En choisissant convenablement $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on peut alors construire par récurrence forte une suite extraite $(u_{\varphi(k)})$ qui converge vers λ à la vitesse désirée (par exemple plus vite que $(1/2)^k$). En effet :

* en posant $\varepsilon = 1$ et $n = 0$, il existe $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_{\varphi(0)} - \lambda\| < 1$.
* en posant $\varepsilon = 1/2$ et $n = \varphi(0) + 1$, il existe un entier $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $\|u_{\varphi(1)} - \lambda\| < 1/2$.
* si $\varphi(0) < \cdots < \varphi(k)$ sont des entiers construits tels que $\|u_{\varphi(p)} - \lambda\| < 1/2^p$ pour tout $p \leq k$, alors en posant $\varepsilon = 1/2^{k+1}$ et $n = \varphi(k) + 1$, il existe un entier $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ tel que $\|u_{\varphi(k+1)} - \lambda\| < 1/2^{k+1}$.

Ainsi, λ est limite de la suite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ construite (puisque $\|u_{\varphi(k)} - \lambda\| < 1/2^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$) donc $\lambda \in Adh(u)$.

Conclusion Ainsi, $Adh(u)$ est une intersection de fermés, donc un fermé de E.

ATTENTION !
On pourrait croire que "λ valeur d'adhérence de u" signifie simplement que λ est adhérent à l'ensemble des termes de la suite, c'est-à-dire

$$\lambda \in \overline{\{u_k,\ k \in \mathbb{N}\}},$$

mais cela ne suffit pas. Se méfier du vocabulaire !

Exercice 6 (*Sous-groupes de $\mathbb{R}$)**
Démontrer que les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, soit denses dans $\mathbb{R}$.
Indication : de manière analogue à l'étude des sous-groupes de $\mathbb{Z}$, on se donnera un sous-groupe G de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ et on justifiera l'existence de $a = \inf(G \cap]0, +\infty[)$. Enfin on discutera selon si $a > 0$ ou $a = 0$.

Corrigé de l'exercice 6
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent de $\{0\}$. G contient donc un élément non nul, et son opposé (par stabilité), donc G contient un élément strictement positif. Ainsi, la partie $G \cap]0, +\infty[$ est non vide et minorée par 0 dans $\mathbb{R}$, donc elle possède une borne inférieure. Notons :

$$a = \inf(G \cap]0, +\infty[) \in \mathbb{R}^+.$$

- Si $a > 0$, alors $2a > a$ ne minore pas $G \cap]0, +\infty[$, donc il existe $x \in G$ tel que $a \leq x < 2a$.
  Si de plus $a < x$, alors x ne minore pas $G \cap]0, +\infty[$, donc il existe $y \in G$ tel que $a \leq y < x < 2a$.

Mais alors $0 < x - y < a$ avec $x - y \in G$ (par stabilité), ce qui est impossible par définition de a. Donc $a = x$, ce qui montre que $a \in G$. Il s'ensuit facilement $a\mathbb{Z} \subset G$.
Réciproquement, si $x \in G$, alors en notant n le plus grand entier tel que $na \leq x$ (i.e. $n = \lfloor x/a \rfloor$), on a $x = na + r$ avec $0 \leq r < a$, mais aussi $r = x - na \in G$, puisque x et a sont dans G. Donc $r = 0$ (par le caractère minimal de a), et $x \in a\mathbb{Z}$. D'où l'égalité $G = a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

- Si $a = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, ε ne minore pas $G \cap]0, +\infty[$, donc il existe $x \in G$ tel que $0 < x < \varepsilon$. Etant donné un réel y, notons n le plus grand entier tel que $nx \leq y$ (i.e. $n = \lfloor y/x \rfloor$).
On a $nx \leq y < (n+1)x$, donc $y - nx \in]0, x[\subset]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $nx \in G$. Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $z \in G$ tel que $|y - z| < \varepsilon$, ce qui montre que $\overline{G} = \mathbb{R}$.

Finalement, on a montré que les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}^+$ (en rajoutant le cas du sous-groupe nul), ou alors sont denses dans $\mathbb{R}$.

2) MPI/MPI*

Exercice 7 (Propriétés ensemblistes de l'intérieur et de l'adhérence)**
Soit A et B des parties d'un espace vectoriel normé E :

1. Comparer $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.
2. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.
3. Comparer $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ et $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.
4. Comparer $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B}$.

Corrigé de l'exercice 7

1. $\boxed{\subset}$ Puisque $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$, on a $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
Ainsi, $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé (comme réunion finie de fermés) qui contient $A \cup B$. Vu que $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé de E qui contient $A \cup B$, on en déduit l'inclusion $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
$\boxed{\supset}$ A et B sont inclus dans $A \cup B$, donc par croissance de l'adhérence (propriété triviale), on a
$$\overline{A} \subset \overline{A \cup B}, \qquad \overline{B} \subset \overline{A \cup B},$$
et donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
$\boxed{=}$ Conclusion : on a $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
2. $\boxed{\subset}$ Puisque $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$, on a $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
Ainsi, $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé (comme intersection de fermés) qui contient $A \cap B$. Vu que $\overline{A \cap B}$ est le plus petit fermé de E qui contient $A \cap B$, on en déduit l'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
$\boxed{\supset}$ Inclusion fausse. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, avec $A =]0, 1[$ et $B =]1, 2[$, on a $A \cap B = \emptyset$ donc $\overline{A \cap B} = \emptyset$, alors que $\overline{A} \cap \overline{B} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$, donc $\overline{A} \cap \overline{B} \not\subset \overline{A \cap B}$.
3. On examine les complémentaires :
$$E \setminus \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overline{E \setminus (A \cap B)} = \overline{(E \setminus A) \cup (E \setminus B)},$$
donc d'après la question 1. :
$$E \setminus \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overline{E \setminus A} \cup \overline{E \setminus B} = (E \setminus \mathring{A}) \cup (E \setminus \mathring{B}) = E \setminus (\mathring{A} \cap \mathring{B}),$$
ce qui montre finalement que $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
4. $\boxed{\supset}$ Avec les complémentaires :
$$E \setminus (\mathring{A} \cup \mathring{B}) = (E \setminus \mathring{A}) \cap (E \setminus \mathring{B}) = \overline{E \setminus A} \cap \overline{E \setminus B},$$
donc d'après la question 2. :
$$E \setminus (\mathring{A} \cup \mathring{B}) \supset \overline{(E \setminus A) \cap (E \setminus B)} = \overline{E \setminus (A \cup B)} = E \setminus \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}.$$

On en déduit finalement l'inclusion $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.

$\boxed{\subset}$ Inclusion fausse car dans $\mathbb{R}$ avec $A = [0,1]$ et $B = [1,2]$, on a $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \overset{\circ}{\widehat{[0,2]}} =]0,2[$, alors que $\mathring{A} \cup \mathring{B} =]0,1[\cup]1,2[\subsetneq]0,2[$, donc $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \not\subset \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

Exercice 8 (Intérieur d'un sev)**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Montrer que si F est un sous-espace vectoriel strict de E (c'est-à-dire $F \neq E$), alors F est d'intérieur vide.

Corrigé de l'exercice 8
Si F est d'intérieur non vide, alors il existe $a \in F$ et $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset F$.
Vu que F est stable par combinaison linéaire, cela entraîne que $E \subset F$, car pour tout vecteur $x \in E \setminus \{0\}$, on a

$$y = a + r\frac{x}{\|x\|} \in \overline{B(a,r)} \subset F,$$

donc $x = \frac{\|x\|}{r}(y-a) \in F$ (puisque $a \in F$, $y \in F$ et F est un sev de E).
Vu qu'on a aussi $0_E \in F$, on en déduit finalement que $E \subset F$, donc $E = F$, et c'est contradictoire.
Donc F est bien d'intérieur vide.

Exercice 9 (*Fonction adhérente)
On note $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_1$, et on considère :

$$A = \{f \in E,\ f(0) = 0\}.$$

Montrer que la fonction constante égale à 1 est adhérente à l'ensemble A.

Corrigé de l'exercice 9
Il suffit de montrer que la fonction constante égale à 1 (que l'on notera 1) est limite d'une suite de $A^{\mathbb{N}}$ (donc une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f_n(0) = 0$) au sens de la norme $\|.\|_1$.
Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, posons $f_n(x) = nx$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 1$ si $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$ (on l'intuite avec un dessin en notant que $\|f_n - 1\|_1$ est la différence des aires sous les courbes de f_n et 1).
Les f_n sont bien dans A pour tout $n \geq 1$, et

$$\|f_n - 1\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - 1| dx = \int_0^{1/n} |nx - 1| dx = \int_0^{1/n} (1 - nx) dx = \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où le résultat.

Exercice 10 (Fonctions de signe constant)**
On note $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$.

1. Montrer que $F = \{f \in E,\ \forall x \in [0;1],\ f(x) \geq 0\}$ est un fermé de E.
2. Montrer que $U = \{f \in E,\ \forall x \in [0;1],\ f(x) > 0\}$ est un ouvert de E.

Corrigé de l'exercice 10

1. Montrons que F est un fermé de E en utilisant la caractérisation séquentielle : soit $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $f \in E$ au sens de la norme $\|.\|_\infty$. On a alors $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Montrons que $f \in F$, c'est-à-dire que $f(0) \geq 0$. On a :

$$|f_n(0) - f(0)| \leq \sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty,$$

   donc $|f_n(0) - f(0)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire :

$$f(0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(0).$$

Puisque $f_n(0) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (étant donné que les f_n sont dans F), on en déduit par passage à la limite que $f(0) \geq 0$, donc $f \in F$.
Variante : on peut écrire F comme une intersection de fermés. En effet, on a

$$F = \bigcap_{x\in[0,1]} \{f \in E,\ f(x) \geq 0\} = \bigcap_{x\in[0,1]} \phi_x^{-1}(\mathbb{R}^+),$$

où $\phi_x : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$. Comme $\mathbb{R}^+$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et comme chaque forme linéaire ϕ_x est continue (vu l'inégalité $|\phi_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty$), alors chaque ensemble $\phi_x^{-1}(\mathbb{R}^+)$ est un fermé de E, ce qui montre que F est fermé.

2. Montrons que U est un ouvert de E. Etant donnée $f_0 \in U$ (donc $f_0 > 0$ sur $[0,1]$), montrons qu'il existe $r > 0$ tel que $\overline{B(f_0, r)} \subset U$, c'est-à-dire $r > 0$ tel que

$$\|f - f_0\|_\infty \leq r \implies f \in U,$$

ou encore

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x) - f_0(x)| \leq r \implies \forall x \in [0,1],\ f(x) > 0.$$

Déjà, f_0 étant continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée et son minimum est atteint en un point x_0 :

$$\exists x_0 \in [0,1],\ \min_{x\in[0,1]} f_0(x) = f_0(x_0) > 0.$$

Dès lors, le rayon $r = \frac{1}{2} f_0(x_0) > 0$ convient (faire un dessin), car :

$$\|f - f_0\|_\infty \leq r \implies \forall x \in [0,1],\ -r \leq f(x) - f_0(x) \leq r$$

$$\implies \forall x \in [0,1],\ f(x) \geq f_0(x) - r \geq f_0(x_0) - r = \frac{1}{2} f_0(x_0) > 0 \implies f \in U.$$

Remarque : la méthode avec les formes linéaires ϕ_x ne donne rien ici. En effet :

$$U = \bigcap_{x\in[0,1]} \phi_x^{-1}(\mathbb{R}_+^*),$$

chaque $\phi_x^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est un ouvert de E (puisque $\phi_x \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ et puisque $\mathbb{R}_+^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$), mais une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert !

Exercice 11 (*Adhérence et intérieur d'un sev de fonctions)**
Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. On note F le sev de E formé par les fonctions s'annulant en 0 et en 1. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de F pour les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$.

Corrigé de l'exercice 11

- Puisque F est un sev de E différent de E, l'intérieur de F est vide (pour n'importe quelle norme), d'après l'exercice 8.
- Déterminons l'adhérence de F pour $\|.\|_\infty$.
  Si $f \in \overline{F}$, alors il existe une suite $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a donc

$$\forall x \in [0,1], \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

  donc $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Vu que les f_n sont dans F, on a $f_n(0) = f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ on obtient $f(0) = f(1) = 0$, donc $f \in F$. Ceci montre que F est fermé, et donc $\overline{F} = F$ pour $\|.\|_\infty$.
- Déterminons l'adhérence de F pour $\|.\|_1$.
  En fait, pour cette norme, on a $\overline{F} = E$, car étant donnée une fonction $f \in E$, on considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ définie par

$$\forall n \geq 2, \qquad f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} nxf(1/n) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ f(x) & \text{si } 1/n \leq x \leq 1 - 1/n \\ n(1-x)f(1-1/n) & \text{si } 1 - 1/n \leq x \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Les f_n sont dans F (f_n est continue sur $[0,1]$ et $f_n(0) = f_n(1) = 0$ pour tout $n \geq 2$), et on a

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx = \int_0^{1/n} |nxf(1/n) - f(x)|dx + \int_{1-1/n}^1 |n(1-x)f(1-1/n) - f(x)|dx$$

$$\leq n|f(1/n)| \int_0^{1/n} xdx + \int_0^{1/n} |f(x)|dx + n|f(1-1/n)| \int_{1-1/n}^1 (1-x)dx + \int_{1-1/n}^1 |f(x)|dx$$

$$\leq \|f\|_\infty \left(n \times \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} + n \times \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} \right) = \frac{3\|f\|_\infty}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre que f est limite (au sens de la norme $\|.\|_1$) d'une suite de fonctions $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$.

Exercice 12 (Densité et polynômes)**

1. Vérifier que l'application $N : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par
$$N(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$
est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(2) = 0\}$ est dense dans $(\mathbb{R}[X], N)$.
3. Est-ce encore vrai pour l'ensemble $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(1) = 0\}$?

Corrigé de l'exercice 12

1. Fixons P, Q dans $\mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - la fonction $t \mapsto P(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc bornée sur tout segment, ce qui montre que $N(P)$ est bien défini.
   - $N(P) \geq 0$ car $t \mapsto |P(t)|$ est une fonction positive
   - si $N(P) = 0$, alors $|P(t)| = 0$ pour tout $t \in [-1,1]$ (par positivité de $|P|$), donc la fonction P est nulle sur $[-1,1]$. Le polynôme P a donc une infinité de racines, ce qui amène $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
   - $N(\lambda P) = \sup_{t\in[-1,1]} |\lambda P(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| = |\lambda| N(P)$, car $|\lambda| \geq 0$.
   - Pour tout $t \in [-1,1]$, on a
   $$|(P+Q)(t)| = |P(t) + Q(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N(P) + N(Q),$$
   donc $N(P)+N(Q)$ majore $t \mapsto |(P+Q)(t)|$ sur $[-1,1]$, ce qui amène l'inégalité triangulaire $N(P+Q) \leq N(P)+N(Q)$, puisque $N(P+Q)$ est le plus petit majorant de $t \mapsto |(P+Q)(t)|$ sur $[-1,1]$.

   Donc N est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que P est limite (au sens de la norme N) d'une suite (P_n) d'éléments de E_2. L'idée est de retrancher à P une suite de polynômes qui tend vers 0 (pour la norme N) et qui coïncide avec P en $X = 2$, en posant par exemple :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n(X) = P(X) - P(2) \times (X/2)^n.$$
   Cette suite convient car pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme tel que $P_n(2) = P(2) - P(2) = 0$, donc $P_n \in E_2$, et
   $$N(P_n - P) = |P(2)| \times \sup_{t\in[-1,1]} |t/2|^n = |P(2)| \times (1/2)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$
   donc (P_n) converge vers P dans l'evn $(\mathbb{R}[X], N)$. Ceci montre que E_2 est dense dans $(\mathbb{R}[X], N)$.
3. Cette fois-ci, ça ne fonctionne plus, car le point d'évaluation $x = 1$ fait partie du segment que la norme N prend en compte. Plus précisément, si (P_n) est une suite de polynômes de E_1 qui converge vers $P \in \mathbb{R}[X]$, alors on a $P_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, $P_n(1) \underset{n\to+\infty}{\to} P(1)$ car :
   $$|P_n(1) - P(1)| \leq \sup_{t\in[-1,1]} |P_n(t) - P(t)| = N(P_n - P) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Donc par passage à la limite :

$$P(1) = \lim_{n\to+\infty} P_n(1) = 0,$$

ce qui montre que $P \in E_1$, et donc que E_1 est une partie fermée de E. Elle n'est donc pas dense dans $(\mathbb{R}[X], N)$, puisque $\overline{E_1} = E_1 \subsetneq \mathbb{R}[X]$ (il existe des polynômes ne s'annulant pas en $X = 1$).

III A faire pour lundi 09/11

Exercice 13 (*Réunion de boules ouvertes)
Démontrer que toute partie ouverte d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé peut s'écrire comme une réunion de boules ouvertes.

Corrigé de l'exercice 13
Toute partie est réunion de ses singletons, donc si U est un ouvert de E, on a $U = \bigcup_{x\in U} \{x\}$.
Or, pour tout $x \in U$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset U$, si bien que

$$U = \bigcup_{x\in U} \{x\} \subset \bigcup_{x\in U} B(x, r_x) \subset \bigcup_{x\in U} U = U,$$

et donc finalement, on a $U = \bigcup_{x\in U} B(x, r_x)$, c'est une réunion de boules ouvertes.

Exercice 14 (*Exemples d'étude de continuité)
On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|.\|_2$. Les applications suivantes sont-elles continues en $(0, 0)$?

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases},$$

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}.$$

Corrigé de l'exercice 14

1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on a
$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x||y|}{\|(x, y)\|_2}.$$
Vu que $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, on a la majoration
$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq \frac{\|(x, y)\|_2^2}{\|(x, y)\|_2} = \|(x, y)\|_2$$
(qui reste vraie pour $(x, y) = (0, 0)$).
Donc en posant $\delta = \varepsilon > 0$, on a
$$\|(x, y) - (0, 0)\|_2 \leq \delta \implies |f(x, y) - f(0, 0)| \leq \varepsilon,$$
ce qui prouve la continuité de f en $(0, 0)$.
2. L'application g n'est pas continue en $(0, 0)$ d'après le critère séquentiel car la suite $u_n = (1/n, 1/n)$ tend vers $(0, 0)$ mais $g(u_n) = g(1/n, 1/n) = \frac{1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $g(0, 0) = 0$.

Exercice 15 (*Image continue d'une partie dense)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application continue et surjective. Montrer que si A est une partie dense dans E, alors $f(A)$ est dense dans F.

Corrigé de l'exercice 15
Montrons que tout point $y \in F$ est limite d'une suite de points de $f(A)$.
Etant donné $y \in F$, il existe, par surjectivité de f, un point $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $\overline{A} = E$, il existe une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$. Par continuité de f au point x, on a $f(x_n) \to f(x) = y$. Ainsi, y est limite de la suite $(f(x_n)) \in f(A)^{\mathbb{N}}$, ce qui montre que $F \subset \overline{f(A)}$. L'inclusion réciproque étant automatique (par définition de l'adhérence), on a $F = \overline{f(A)}$, c'est-à-dire $f(A)$ dense dans F.

Exercice 16 (Fonction à image rationnelle / irrationnelle)**

1. Que dire d'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $Im(f) \subset \mathbb{Q}$? et telle que $Im(f) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?
2. Existe-t-il une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que l'image de tout rationnel soit un irrationnel et telle que l'image de tout irrationnel soit un rationnel ?

Corrigé de l'exercice 16

1. - Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{Q}$, alors f est nécessairement constante. En effet, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ d'après le TVI (puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle et f est continue), et tout intervalle non vide et non singleton contient des irrationnels, donc $f(\mathbb{R})$ (qui ne contient que des rationnels par hypothèse) est un singleton, c'est-à-dire f constante.
   - Même conclusion si f est à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, car si l'intervalle non vide $f(\mathbb{R})$ était non singleton, alors il contiendrait aussi des rationnels, ce qui est exclu par hypothèse, donc $f(\mathbb{R})$ est un singleton.
2. Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que
$$x \in \mathbb{Q} \implies f(x) \notin \mathbb{Q}, \qquad x \notin \mathbb{Q} \implies f(x) \in \mathbb{Q}.$$
Alors, l'application continue $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array} \right.$ vérifie
$$x \in \mathbb{Q} \implies f(x) \notin \mathbb{Q} \implies g(x) = f(x) - x \notin \mathbb{Q},$$
$$x \notin \mathbb{Q} \implies f(x) \in \mathbb{Q} \implies g(x) = f(x) - x \notin \mathbb{Q},$$
donc $Im(g) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ce qui entraîne g constante d'après la question 1. Ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - x = f(0) - 0,$$
donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x + f(0).$$
En particulier $f(f(0)) = 2f(0)$, ce qui pose problème car $f(0) \notin \mathbb{Q}$ (par hypothèse sur f), et donc $2f(0) = f(f(0)) \in \mathbb{Q}$. Donc une telle application f n'existe pas.

Exercice 17 (Condition suffisante d'uniforme continuité)**
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application continue et admettant une limite finie en $+\infty$.
Montrer que f est uniformément continue.

Corrigé de l'exercice 17
Notons $\ell = \lim\limits_{+\infty} f \in \mathbb{R}$ et fixons un réel $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite en $+\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que
$$t \geq A, \implies |f(t) - \ell| \leq \varepsilon/2,$$
et donc en particulier
$$A \leq x \leq y \implies |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| \leq \varepsilon.$$
En outre, sur le segment $[0, A]$ (qui est compact), f est uniformément continue d'après le theorème de Heine donc il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall (x, y) \in [0, A]^2, \qquad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$
On a donc en définitive ($|x - y| \leq \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$) dans les cas $A \leq x \leq y$ et $0 \leq x \leq y \leq A$.
Mais que se passe-t-il dans le cas du chevauchement, i.e. $x \leq A \leq y$?
On peut en fait inclure ce dernier cas dans les précédents, car si on applique le théorème de Heine sur $[0, A + 1]$ (au lieu de $[0, A]$), alors il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall (x, y) \in [0, A + 1]^2, \qquad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$
Le problème du chevauchement est alors réglé si on choisit $\delta < 1$, car pour tout couple (x, y) tel que $y \geq x \geq 0$:

* si $x \geq A$, alors $y \geq x \geq A$ donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$;
* si $x < A$, alors pour tout $y \geq x$, on a

$$|x - y| \leq \delta \implies y \leq x + \delta < x + 1 \implies (x, y) \in [0, A+1]^2 \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On a montré qu'il existe $\delta \in]0, 1[$ tel que $\forall y \geq x \geq 0,\ (|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$, et donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 18 (Caractère lipschitzien de l'inf)**
Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.
Montrer que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \inf\limits_{t \in [0,1]} f(t) \end{array} \right.$ est bien définie et lipschitzienne.

Corrigé de l'exercice 18

- Déjà, φ est bien définie sur E car toute fonction f continue sur le segment $[0, 1]$ est bornée, donc minorée, et donc $\varphi(f)$ existe dans $\mathbb{R}$.
- Soit $(f, g) \in E^2$. Encadrons $\varphi(f) - \varphi(g)$ à l'aide de $\|f - g\|_\infty$.
  * Tout d'abord, on a l'inégalité :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \|f - g\|_\infty \geq f(t) - g(t) \geq \inf_{[0,1]} f - g(t) = \varphi(f) - g(t),$$

  c'est-à-dire

$$\forall t \in [0, 1], \quad \varphi(f) - \|f - g\|_\infty \leq g(t).$$

  Ainsi, la constante $\varphi(f) - \|f - g\|_\infty$ minore g, donc

$$\varphi(f) - \|f - g\|_\infty \leq \inf_{[0,1]} g = \varphi(g),$$

  (puisque $\varphi(g)$ est par définition le plus grand minorant de g), c'est-à-dire

$$\varphi(f) - \varphi(g) \leq \|f - g\|_\infty.$$

  * Symétriquement, on obtient

$$\varphi(g) - \varphi(f) \leq \|g - f\|_\infty = \|f - g\|_\infty.$$

  En définitive, on a montré

$$\forall (f, g) \in E^2, \qquad -\|f - g\|_\infty \leq \varphi(f) - \varphi(g) \leq \|f - g\|_\infty,$$

  c'est-à-dire

$$\forall (f, g) \in E^2, \qquad |\varphi(f) - \varphi(g)| \leq \|f - g\|_\infty.$$

  Donc φ est bien lipschitzienne.

Exercice 19 (Continuité et restriction)**
E et G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

1. Soit X une partie de E et $f : X \to G$ une application continue.
   Montrer que pour toute partie $A \subset X$, la restriction $f_{|A} : A \to G$ est continue.
2. Soit F_1, F_2 des parties fermées de E telles que $F_1 \cup F_2 = E$. Soit une application $f : E \to G$.
   On suppose que les restrictions $f_1 = f_{|F_1} : F_1 \to G$ et $f_2 = f_{|F_2} : F_2 \to G$ sont continues.
   Montrer que f est continue.
3. Cela reste-t-il vrai si on remplace F_1, F_2 par des ouverts Ω_1, Ω_2 ?
4. Et si F_1, F_2 sont quelconques ?
5. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(s, t) = \left\{ \begin{array}{ll} t(1-s) & \text{si } t < s \\ s(1-t) & \text{si } t \geq s \end{array} \right.$ est continue.

Corrigé de l'exercice 19

1. Avec la caractérisation ensembliste de la continuité : étant donné un ouvert U de G, on a
$$f_{|A}^{-1}(U) = \{x \in A,\ f(x) \in U\} = A \cap f^{-1}(U).$$
Puisque f est continue, $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif à X : il existe O ouvert de E tel que $f^{-1}(U) = O \cap X$. Ainsi :
$$f_{|A}^{-1}(U) = A \cap (O \cap X) = A \cap O$$
(puisque $A \subset X$) donc $f_{|A}^{-1}(U)$ est un ouvert relatif à A. D'où la continuité de l'application $f_{|A}$.
2. Utilisons là aussi la caractérisation ensembliste de la continuité, en montrant que l'image réciproque par f de tout fermé de G est un fermé de E.
Soit donc Y un fermé de G. Puisque $E = F_1 \cup F_2$, on a
$$f^{-1}(Y) = \{x \in E,\ f(x) \in Y\} = \{x \in F_1,\ f_1(x) \in Y\} \cup \{x \in F_2,\ f_2(x) \in Y\} = f_1^{-1}(Y) \cup f_2^{-1}(Y).$$
Puisque f_1 et f_2 sont continues, les ensembles $f_1^{-1}(Y)$ et $f_2^{-1}(Y)$ sont des fermés relatifs à F_1 et F_2, donc il existe F_3, F_4 fermés dans E tels que
$$f_1^{-1}(Y) = F_1 \cap F_3, \qquad f_2^{-1}(Y) = F_2 \cap F_4,$$
et donc $f_1^{-1}(Y)$ et $f_2^{-1}(Y)$ sont des fermés de E (comme intersection de fermés de E). Par réunion finie, on en déduit que $f^{-1}(Y)$ est un fermé de E, donc f est continue.
3. Oui, même raisonnement avec des réunions/intersection d'ouverts.
4. Non. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vaut 0 sur $F_1 =]-\infty, 0]$ (fermé) et 1 sur $F_2 =]0, +\infty[$ (ouvert) est discontinue en 0, et pourtant les deux restrictions f_1, f_2 sont continues (car constantes).
5. Notons
$$F_1 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2,\ t \leq s\}, \qquad F_2 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2,\ t \geq s\}.$$
Ces deux parties sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ (facile par caractérisation ensembliste : $F_1 = g^{-1}(]-\infty, 0])$ et $F_2 = g^{-1}([0, +\infty[)$, où $g : (s,t) \mapsto t - s$ est continue sur $\mathbb{R}^2$), et leur réunion (non disjointe) forme $\mathbb{R}^2$. Examinons les restrictions de f à ces deux parties :
   - $f_2 = f_{|F_2}$ est clairement continue car $f_2 : (s,t) \mapsto s(1-t)$, donc f_2 est la restriction à F_2 de la fonction polynomiale $p_2 : (s,t) \mapsto s(1-t)$ continue sur tout $\mathbb{R}^2$.
   - Pour f_1, le même raisonnement fonctionne car $f_1(s,t) = t(1-s)$ si $t < s$ mais aussi si $t = s$ (car $f(t,t) = t(1-t)$ par définition de f). On a donc $f_1 : (s,t) \mapsto t(1-s)$ continue sur F_2.

   D'après la question 2., on en déduit la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

IV TD du mardi 09/11

1) MPI* seulement

Exercice 20 (*Calcul de norme triple 2)**
Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$. On munit $\mathbb{R}$ de la valeur absolue.
On définit, pour $f \in E$:

$$\phi(f) = \int_0^1 f(t)dt - \int_{-1}^0 f(t)dt.$$

1. Montrer que ϕ est une forme linéaire continue sur E, et que $|||\phi||| = 2$.
2. Existe-il $f \in E$ de norme 1 tel que $|\phi(f)| = 2$?

Corrigé de l'exercice 20

1. - L'application $\phi : E \to \mathbb{R}$ est bien définie car toute fonction continue sur $[-1,1]$ est intégrable sur tout segment de $[-1,1]$.
   - La linéarité de ϕ est évidente par linéarité de l'intégrale, ϕ est donc bien une forme linéaire sur E.
   - Ensuite, on obtient facilement l'inégalité linéaire :

   $$\forall f \in E, \quad |\phi(f)| \leq \int_0^1 |f| + \int_{-1}^0 |f| = \int_{-1}^1 |f| \leq \int_{-1}^1 \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty,$$

   donc ϕ est continue et $|||\phi||| \leq 2$.
   - Montrons maintenant que $C = 2$ est la constante optimale dans l'inégalité linéaire.
   La question 2. suggère qu'il est inutile de chercher une fonction f non nulle qui réalisera l'égalité $|\phi(f)| = 2\|f\|_\infty$.
   On doit établir que

   $$\sup_{f \in E \setminus \{0_E\}} \frac{|\phi(f)|}{\|f\|_\infty} = 2.$$

   Pour cela, il suffit de montrer que le majorant $C = 2$ est adhérent à l'ensemble qu'il majore, en construisant une suite $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{|\phi(f_n)|}{\|f_n\|_\infty} \underset{n\to+\infty}{\to} 2$, ou (cela revient au même par homogénéité), une suite $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f_n\|_\infty = 1$ et $|\phi(f_n)| \to 2$.
   L'idée est la suivante : la "fonction signe" $\varepsilon : [-1,1] \to \mathbb{R}$ (qui vaut -1 sur $[-1,0[$, 1 sur $]0,1]$ et 0 en 0) vérifie bien $\|\varepsilon\|_\infty = 1$ et $|\phi(\varepsilon)| = \int_0^1 1dt - \int_{-1}^0 (-1)dt = 2$, mais elle est discontinue en 0, donc pas dans E. On va donc approcher ε par une suite de fonctions continues de sorte à ne pas trop modifier l'aire sous la courbe. En faisant un dessin, on considère l'approximation affine par morceaux :

   $$\forall n \geq 1, \qquad f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{si } -1 \leq x < -\frac{1}{n} \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

   Les fonctions f_n sont continues et impaires, et on a $\|f_n\|_\infty = 1$, ainsi que

   $$\forall n \geq 1, \qquad |\phi(f_n)| = 2\int_0^1 f_n = 2\left(\frac{1}{2n} + (1 - \frac{1}{n})\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 2.$$

   (somme des aires d'un triangle et d'un rectangle).
   On conclut que $|||\phi||| = 2$.
2. Supposons que $\|f\|_\infty = 1$ et $\phi(f) = 2$, avec $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continue. On a alors

   $$\int_0^1 f - \int_{-1}^0 f = 2 = \int_0^1 1 - \int_{-1}^0 (-1),$$

   c'est-à-dire

   $$\int_0^1 (1-f) + \int_{-1}^0 (1+f) = 0.$$

Vu que les fonctions $1-f$ et $1+f$ sont continues sur $[-1,1]$ et positives (étant donné que $-1 \leq f \leq 1$ par hypothèse), les deux intégrales sont positives de somme nulle, donc

$$\int_0^1 (1-f) = \int_{-1}^0 (1+f) = 0.$$

On en déduit alors (par continuité et positivité des deux intégrandes sur les deux segments) que $1-f=0$ sur $[0,1]$ et $1+f=0$ sur $[-1,0]$, ce qui est impossible ($f(0)$ serait alors égal à 1 et -1 à la fois). Donc il n'existe pas de $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $\phi(f) = 2$.
Il n'existe pas non plus de $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $\phi(f) = -2$, sinon $-f$ nous ramènerait au cas précédent.
En conclusion, il n'existe pas de $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $|\phi(f)| = 2$.

2) MPI/MPI*

Exercice 21 (*Calcul de norme triple)
Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, que l'on munit de $\|.\|_\infty$.
On considère l'endomorphisme $\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \ell^\infty(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \ell^\infty(\mathbb{C}) \\ u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \Delta(u) = (u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$.
Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}_c(E,E)$ et calculer $|||\Delta|||$.

Corrigé de l'exercice 21

- Déjà, $\Delta : E \to E$ est bien définie car si u est une suite bornée, alors $\Delta(u)$ aussi puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|\Delta(u)_n| = |u_{n+1}-u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2\|u\|_\infty.$$
- Soit $(\lambda, u, v) \in \mathbb{C} \times E \times E$. On a :
$$\Delta(\lambda u+v) = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1} - \lambda u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_{n+1}-v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda\Delta(u)+\Delta(v),$$
donc Δ est un endomorphisme de E.
- D'après le premier point, on a l'inégalité linéaire
$$\forall u \in E, \quad \|\Delta(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty$$
ce qui montre que Δ est continue et $|||\Delta||| \leq 2$.
De plus, avec la suite $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u \in E$, $\|u\|_\infty = 1$ et
$$\|\Delta(u)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |2(-1)^{n+1}| = 2 = 2\|u\|_\infty,$$
donc la constante $C=2$ est bien optimale dans l'inégalité linéaire.
En conclusion, $\Delta \in \mathcal{L}_c(E,E)$ et $|||\Delta||| = 2$.

Exercice 22 (Applications entre polynômes)**
On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme N définie par
$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \implies N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|.$$

1. L'application $\varphi : P \mapsto P(X+1)$ est-elle continue ? Si oui, calculer $|||\varphi|||$.
2. Pour $A \in E$ fixé, $\psi : P \mapsto AP$ est-elle continue ? Si oui, calculer $|||\psi|||$.

Corrigé de l'exercice 22

1. On remarque que $\varphi \in \mathcal{L}(E,E)$ (par linéarité de l'évaluation), donc φ est continue si et seulement si
$$(*) \qquad \exists C > 0,\ \forall P \in E, \quad N(\varphi(P)) \leq CN(P).$$

Examinons ce qui se passe avec la suite des monômes $P_n = X^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$). On a

$$\varphi(P_n) = (X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k,$$

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ N(\varphi(P_n)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Vu que $N(P_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité linéaire $(*)$ est impossible car elle entraînerait

$$\exists C > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \leq C,$$

ce qui est absurde (la suite (2^n) n'est pas bornée). Ainsi, l'endomorphisme φ n'est pas continu.

2. On remarque que $\psi \in \mathcal{L}(E,E)$ (par bilinéarité du produit de deux polynômes). Notons

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, \qquad P = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k X^k$$

(sommes finies car les suites de coefficients (a_k) et (x_k) sont presque nulles). Par définition du produit de deux polynômes, on a

$$\psi(P) = AP = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{k} a_p x_{k-p} \right) X^k,$$

donc

$$N(\psi(P)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \sum_{p=0}^{k} a_p x_{k-p} \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k} |a_p||x_{k-p}| = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{k=p}^{+\infty} |a_p||x_{k-p}|,$$

en permutant les deux sommes (on peut car la somme est en réalité finie, mais de toute façon on peut travailler dans $[0,+\infty]$ avec des séries à termes positifs). D'où l'inégalité :

$$N(\psi(P)) \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=p}^{+\infty} |x_{k-p}| \right)}_{=N(P)} |a_p| = N(A)N(P),$$

qui montre que ψ est continue et $|||\psi||| \leq N(A)$.
Enfin, le polynôme $P = 1$ réalise l'égalité :

$$\psi(1) = A \text{ donc } N(\psi(1)) = N(A) = N(A)N(1),$$

donc $|||\psi||| = N(A)$.

Exercice 23 (Normes polynomiales)**
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose, pour $P \in E$:

$$N_1(P) = \sup\{|P(x)|, x \in [0,1]\}, \qquad N_2(P) = \sup\{|P(x)|, x \in [1,2]\}.$$

On définit enfin la forme linéaire $\phi : P \in E \mapsto P(0) \in \mathbb{R}$ et on munit $\mathbb{R}$ de la valeur absolue.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Montrer que ϕ est une application linéaire continue sur (E, N_1) et calculer $|||\phi|||$.
3. Montrer que ϕ n'est pas continue sur (E, N_2) (en considérant $P_n(X) = (1 - X/2)^n$).
4. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?
5. Soit $\mathcal{O} = \{P \in E,\ P(0) \neq 0\}$.
   Montrer que $\mathcal{O}$ est un ouvert de l'evn (E, N_1), mais pas un ouvert de (E, N_2).
   Indication : considérer $1 - P_n$.

Corrigé de l'exercice 23

1. Voir la question 1. de l'exercice 12.
2. On a l'inégalité linéaire :
$$\forall P \in E, \qquad |\phi(P)| = |P(0)| \leq \sup_{[0,1]} |P| = N_1(P),$$
donc ϕ est continue par rapport à la norme N_1 et $|||\phi||| \leq 1$.
De plus, avec $P = 1$, on a $|\phi(P)| = 1 = N_1(P)$, donc $|||\phi||| = 1$.
3. La suite $(P_n) = (1 - X/2)^n$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$N_2(P_n) = \sup_{x\in[1,2]} |1 - x/2|^n = \sup_{x\in[1,2]} (1 - x/2)^n = (1/2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
donc la suite (P_n) tend vers 0_E dans l'evn (E, N_2).
Mais pour la suite image :
$$\phi(P_n) = P_n(0) = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 = \phi(0_E),$$
donc ϕ n'est pas continue en 0, ce qui montre que ϕ n'est pas continue par rapport à la norme N_2.
4. N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, car $\phi : (E, N_1) \to (\mathbb{R}, |.|)$ est continue, alors que $\phi : (E, N_2) \to (\mathbb{R}, |.|)$ ne l'est pas.
5. On a $\mathcal{O} = \phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Comme $\phi : (E, N_1) \to (\mathbb{R}, |.|)$ est continue et comme $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (comme réunion de deux intervalles ouverts), on en déduit que $\mathcal{O}$ est un ouvert de l'evn (E, N_1). En revanche, $\mathcal{O}$ n'est pas un ouvert de (E, N_2) car son complémentaire $Y = \{P \in E,\ P(0) = 0\}$ n'est pas fermé dans (E, N_2). En effet, la suite $(Q_n) = (1 - P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans Y (vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(0) = 1 - P_n(0) = 0$), converge vers le polynôme 1 pour la norme N_2 (car $N_2(1 - Q_n) = N_2(P_n) \to 0$ comme montré en 3.), mais $1 \notin Y$.

Exercice 24 (Calcul explicite des normes matricielles 1 et ∞)**
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer les normes subordonnées $|||A|||_1$ et $|||A|||_\infty$ en fonction des coefficients $a_{i,j}$ de A.

Corrigé de l'exercice 24
Soit $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ (que l'on identifie à un vecteur colonne).

- On a
$$\|AX\|_1 = \sum_{i=1}^n |(AX)_i| = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\right) |x_j| \leq \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\right) \|X\|_1,$$
donc f_A est bien continu pour la norme 1 et on a
$$|||A|||_1 \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| = \max_{1\leq j\leq n} \|C_j(A)\|_1$$
(où $C_j(A)$ désigne la j^e colonne de A).
En fait, on a
$$|||A|||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|C_j(A)\|_1.$$
En effet, en notant j_0 l'indice de $[\![1, n]\!]$ tel que
$$\|C_{j_0}(A)\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|C_j(A)\|_1,$$
et $X_0 = e_{j_0}$ le j_0^e vecteur de la base canonique, on a $\|X_0\|_1 = 1$, et
$$\|AX_0\|_1 = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}\delta_{j,j_0}\right| = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}| = \|C_{j_0}(A)\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|C_j(A)\|_1 \|X_0\|_1,$$
donc $\max_{1\leq j\leq n} \|C_j(A)\|_1$ est bien la constante optimale.

- On a
$$\|AX\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |(AX)_i| = \max_{1\le i\le n} \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| \le \left(\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right)\|X\|_\infty,$$
donc f_A est bien continu pour la norme ∞ et on a
$$|||A|||_\infty \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \max_{1\le i\le n}\|L_i(A)\|_1$$
(où $L_i(A)$ désigne la i^e ligne de A).
En fait, on a
$$|||A|||_\infty = \max_{1\le i\le n}\|L_i(A)\|_1.$$
En effet, en notant i_0 l'indice de $[\![1,n]\!]$ tel que
$$\|L_{i_0}(A)\|_1 = \max_{1\le i\le n}\|L_i(A)\|_1,$$
et $X_0 = (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_j = \dfrac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|}$ si $a_{i_0,j}\neq 0$ et $\varepsilon_j = 1$ sinon, on a $\|X_0\|_\infty = 1$ (puisque $|\varepsilon_j| = 1$ pour tout j), et
$$\|AX_0\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}\varepsilon_j\right|.$$
Vu que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a
$$\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}\varepsilon_j\right| \le \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \|L_i(A)\|_1 \le \|L_{i_0}(A)\|_1, \qquad \left|\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}\varepsilon_j\right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = \|L_{i_0}(A)\|_1,$$
on en déduit que
$$\|AX_0\|_\infty = \|L_{i_0}(A)\|_1 = \max_{1\le i\le n}\|L_i(A)\|_1\|X_0\|_\infty.$$
Donc $\max\limits_{1\le i\le n}\|L_i(A)\|_1$ est bien la constante optimale.

Exercice 25 (Un autre critère de continuité)**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.
Montrer que f est continue ssi pour toute suite $(u_n)\in E^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n\to 0_E$, $\big(f(u_n)\big)$ est bornée.

Corrigé de l'exercice 25

$\boxed{\Rightarrow}$ Si f est continue et si $u_n\to 0_E$, alors $f(u_n)\to f(0_E) = 0_F$, donc $(f(u_n))$ est bornée (toute suite convergente est bornée).

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que f vérifie la propriété
$$\forall u\in E^{\mathbb{N}}, \qquad (u_n\to 0_E \implies (f(u_n)) \text{ bornée}),$$
et montrons que f est continue en 0_E (cela suffira à établir la continuité de f sur tout E puisque f est linéaire).
Si f était discontinue en 0_E, cela signifierait
$$\exists\varepsilon>0,\ \forall\delta>0,\ \exists x\in E,\ \|x\|_E\le\delta \text{ et } \|f(x)\|_F>\varepsilon.$$
En particulier, pour tout entier $n\ge 1$, il existe $x_n\in E$ tel que $\|x_n\|_E\le\frac{1}{n}$ et $\|f(x_n)\|_F>\varepsilon$.
La suite $(u_n) = (\sqrt{n}x_n)$ vérifie alors :
$$\|u_n\|_E\le\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0, \qquad \|f(u_n)\|_F>\varepsilon\sqrt{n}\to+\infty,$$
(par linéarité de f) ce qui contredit la propriété supposée.
Donc f est continue en 0, et par suite, $f:E\to F$ est continue.

V A faire pour lundi 16/11

1) MPI* seulement

Exercice 26 (*Un théorème de point fixe)**
Soit A une partie compacte d'un $\mathbb{K}$-evn E et $f : A \to A$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in A^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que f possède un unique point fixe.
   Pour l'existence, on pourra considérer l'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|f(x) - x\| \end{array} \right.$.
2. Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'elle converge vers l'unique point fixe de f.

Corrigé de l'exercice 26

1. Par composition, l'application $g : x \mapsto \|f(x) - x\|$ est continue sur le compact A.
   En effet, f est 1-lipschitzienne donc continue, donc $f - Id$ est continue et la norme est continue.
   Par le théorème des bornes atteintes, il existe donc $x^* \in A$ tel que $\min_A g = g(x^*) \geq 0$.
   Reste à montrer que ce minimum vaut 0. Si $g(x^*) = \|f(x^*) - x^*\| > 0$, alors en posant $y^* = f(x^*)$, on a $y^* \in A$ (puisque $f(A) \subset A$), $y^* \neq x^*$, donc

   $$g(y^*) = \|f(y^*) - y^*\| = \|f(f(x^*)) - f(x^*)\| < \|f(x^*) - x^*\| = g(x^*),$$

   ce qui contredit la minimalité de $g(x^*)$. Donc $g(x^*) = 0$, c'est-à-dire $f(x^*) = x^*$.
   Ainsi, x^* est un point fixe de f. Pour l'unicité, il suffit de remarquer que si $f(t) = t$ avec $t \in A$, alors

   $$\|f(t) - f(x^*)\| = \|t - x^*\|,$$

   ce qui oblige $t = x^*$ (sinon on aurait inégalité stricte).
   Donc x^* est l'unique point fixe de f (et donc l'unique minimiseur de g).
2. La suite (x_n) étant à valeurs dans le compact A (puisque $x_0 \in A$ et $f(A) \subset A$), il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\ell \in A$. Il y a alors deux difficultés :
   - Identifier la limite ℓ. Il n'est pas clair qu'il s'agisse du point fixe x^* de f car **la suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ ne vérifie pas la relation de récurrence** puisque

     $$f(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)+1} \neq x_{\varphi(n+1)},$$

     (a priori), donc on ne peut pas utiliser la technique classique du passage à la limite dans cette relation (on ne sait pas si $(x_{\varphi(n)+1})$ converge, puisqu'il ne s'agit pas de la même suite extraite).
   - Etendre la convergence à toute la suite (x_n).

   On va en fait utiliser un argument de **monotonie**, en considérant la suite des écarts :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad d_n = \|x_n - x^*\|.$$

   Cette suite est décroissante car

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad d_{n+1} = \|x_{n+1} - x^*\| = \|f(x_n) - f(x^*)\| \leq \|x_n - x^*\| = d_n,$$

   et minorée par 0, donc elle converge. On peut alors identifier sa limite en utilisant la suite extraite :

   $$d_{\varphi(n)} = \|x_{\varphi(n)} - x^*\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell - x^*\|.$$

   (par composition et continuité de la norme).
   Donc $d_n = \|x_n - x^*\|$ converge en décroissant vers $d = \|\ell - x^*\| \geq 0$. Reste à montrer que $d = 0$.
   Si $d > 0$, alors $\ell \neq x^*$, donc

   $$\|f(\ell) - x^*\| = \|f(\ell) - f(x^*)\| < \|\ell - x^*\| = d,$$

mais par continuité de f :

$$\|f(\ell) - x^*\| = \lim_{n\to+\infty} \|f(x_{\varphi(n)}) - x^*\| = \lim_{n\to+\infty} \|x_{\varphi(n)+1} - x^*\| = \lim_{n\to+\infty} d_{\varphi(n)+1} = d.$$

Ceci met en évidence une contradiction ($d < d$), donc $d = 0$, ce qui prouve que (x_n) converge vers x^* (l'unique point fixe de f).

Exercice 27 (*Suite convergente et compacité)**
Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente quelconque d'un $\mathbb{K}$-evn E, et si $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ alors $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

Corrigé de l'exercice 27
On le prouve en vérifiant la définition d'un compact.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque à valeurs dans $K = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$, on va en construire une suite extraite convergente.
Attention ! La difficulté de cet exercice est la suivante : la suite (v_n) est à valeurs dans K (le support de la suite u et sa limite), mais ne c'est pas pour autant une suite extraite de u ! (en effet, v_n pourrait très bien se contenter de "stagner" sur un nombre fini de termes $u_0, \cdots, u_p$, et donc ne parcourerait pas une infinité de termes de u, ce qui est nécessaire pour avoir une suite extraite, d'après la définition). On est donc naturellement amenés à distinguer des cas :

- Si la suite (v_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, notées $\{a_1, \cdots, a_p\} \subset K$, alors au moins l'une d'entre elles est prise une infinité de fois, car

$$\mathbb{N} = \bigcup_{1\le i\le p} \{n \in \mathbb{N},\ v_n = a_i\}$$

donc au moins l'un des ensembles de cette partition finie est infini puisque $\mathbb{N}$ est infini.
En indexant cette partie infinie de $\mathbb{N}$ par une injection croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (toujours possible), on obtient donc une suite $(v_{\varphi(n)})$ constante égale à un des a_i, donc convergente dans K.

- Si la suite (v_n) prend une infinité de valeurs, alors elle prend une infinité de valeurs dans $X = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ (le support de u, qui est donc obligatoirement infini). On va alors construire une suite extraite de v qui est une suite extraite de u, en parcourant judicieusement l'ensemble

$$X \cap Im(v) = \{a \in X,\ \exists k \in \mathbb{N},\ v_k \in X\},$$

(qui est une partie infinie dénombrable de E).

  * L'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ v_k \in X\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, notons $\psi(0)$ son minimum. On a $\psi(0) \in \mathbb{N}$ et il existe $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $v_{\psi(0)} = u_{\varphi(0)}$.
  * Ensuite, on considère l'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ v_k \in X \setminus \{u_j,\ j \le \varphi(0)\}\}$. Cet ensemble est encore non vide, donc en notant $\psi(1)$ son minimum, on a $\psi(1) > \psi(0)$ (puisque $v_0, \cdots, v_{\psi(0)-1}$ ne sont pas dans X et $v_{\psi(0)} = u_{\varphi(0)}$) et il existe un entier $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $v_{\psi(1)} = u_{\varphi(1)}$.
  * Récursivement : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons construits des entiers $\varphi(0) < \cdots < \varphi(n)$ et $\psi(0) < \cdots < \psi(n)$ tels que

$$\forall 0 \le i \le n, \quad \psi(i) = \min\{k \in \mathbb{N},\ v_k \in X \setminus \{u_j,\ j \le \varphi(i-1)\}\}, \qquad v_{\psi(i)} = u_{\varphi(i)},$$

  et posons

$$\psi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N},\ v_k \in X \setminus \{u_j,\ j \le \varphi(n)\}\}$$

  (qui existe car cette partie de $\mathbb{N}$ est toujours non vide puisque v prend une infinité de valeurs dans X). On a $\psi(n+1) > \psi(n)$, puisque les termes v_j avec $j \le \psi(n)$ sont soit hors de X, soit dans $\{u_{\varphi(0)}, \cdots, u_{\varphi(n)}\}$, et il existe un entier $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $v_{\psi(n+1)} = u_{\varphi(n+1)}$.

  Ainsi, la suite $(v_{\psi(n)})$ est extraite de (v_n), mais aussi de (u_n), donc elle converge vers $\ell \in K$.

Dans tous les cas, (v_n) possède une suite extraite qui converge dans K, donc K est compact.

Remarque (Hors-programme)
Exercice plus facile si on utilise la **propriété de Borel-Lebesgue** *(résultat hors-programme : dans un evn E, une partie K est compacte ssi de tout recouvrement $(\Omega_i)_{i\in I}$ de K par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini $(\Omega_{i_k})_{1\leq k\leq p}$ de K).*
En effet, si $K \subset \bigcup_{i\in I}\Omega_i$, avec $K = \{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{\ell\}$ et les Ω_i des ouverts de E, alors ℓ est dans un des Ω_i, disons Ω_j. Puisque Ω_j est un ouvert contenant ℓ, c'est un voisinage de $\ell = \lim u$, donc à partir d'un certain rang n_0, on a les u_n dans Ω_j. En outre, chacun des termes u_k avec $0\leq k<n_0$ est dans K donc dans un ouvert Ω_{i_k}, donc en définitive :

$$K = (\{u_0,\cdots,u_{n_0-1}\}\cup\{u_n,\ n\geq n_0\}\cup\{\ell\}) \subset \Omega_{i_0}\cup\cdots\cup\Omega_{i_{n_0-1}}\cup\Omega_j,$$

donc on a bien extrait un sous-recouvrement fini de K par des ouverts de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$, ce qui prouve que K est compact.

2) MPI/MPI*

Exercice 28 (*Etude de la topologie de parties du plan)
Les parties suivantes sont-elles ouvertes ? fermées ? bornées ? compactes ?

1. $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy < x+y\}$.
2. $B = \{z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z^2)\leq 1\}$.
3. $C = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x-1)^2+y^2<1 \text{ et } \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geq\frac{1}{16}\right\}$.

Corrigé de l'exercice 28

1. On a $A = \varphi^{-1}(]0,+\infty[)$, où $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x+y-xy\end{array}\right.$ est continue car polynomiale. Vu que $]0,+\infty[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, on en déduit que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   A n'est pas fermée car la suite $(u_n) = (0,\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans A mais sa limite $(0,0)$ n'est pas dans A.
   A n'est pas bornée car la suite $(u_n) = (0,n)$ est à valeurs dans A et $\|u_n\|\to+\infty$.
   A n'est pas compacte car non bornée.
2. On a $B = \varphi^{-1}(]-\infty,1]$), où $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ z & \longmapsto & Re(z^2)\end{array}\right.$ est continue (composée du polynôme $z\mapsto z^2$ avec la fonction "partie réelle" qui est linéaire en dimension finie donc continue). Puisque $]-\infty,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, on en déduit que B est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
   En outre, B n'est pas ouvert car $1\in B$ mais pour tout $\varepsilon>0$, le disque ouvert $D(1,\varepsilon)$ contient le réel $1+\frac{\varepsilon}{2}$, qui n'est pas dans B (puisque $Re((1+\varepsilon/2)^2>1$). Ainsi, l'ensemble B n'est pas voisinage de $1\in B$.
   B n'est pas borné (donc pas compact) car pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $in\in B$ (car $Re((in)^2) = -n^2\leq 1$) mais $|in| = n\to+\infty$.
3. C n'est pas ouvert car C n'est pas voisinage de $a = (1/2,1/4)\in C$ puisque pour tout $\varepsilon>0$, le point $(1/2,1/4+\varepsilon/2)$ est dans le disque ouvert $D(a,\varepsilon)$ mais pas dans C.
   C n'est pas fermé car la suite $(u_n) = (1,1-\frac{1}{n})_{n\geq1}$ est à valeurs dans C mais sa limite $(1,1)$ n'est pas dans C.
   C est borné car inclus dans le disque ouvert $D(u,1)$, où $u=(1,0)$.
   C n'est pas compact car pas fermé.

Exercice 29 (*Un convexe compact)
Prouver que la partie $K = \left\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in(\mathbb{R}_+)^n,\ \sum_{i=1}^n\lambda_i = 1\right\}$ est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$.

Corrigé de l'exercice 29
Si $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in K$, alors les λ_i sont dans $[0,1]$ (car positifs et de somme égale à 1).
Donc K est borné (puisqu'inclus dans le pavé $[0,1]^n$).
Ensuite $K = (\mathbb{R}^+)^n\cap\varphi^{-1}(\{1\})$, où $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x_1,\cdots,x_n) & \longmapsto & x_1+\cdots+x_n\end{array}\right.$ est continue (car linéaire

en dimension finie), donc K est fermé comme intersection de fermés de $\mathbb{R}^n$.
K est donc compact, puisque fermé et borné en dimension finie.
Enfin, K est convexe car si $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ sont dans K, alors pour tout $t \in [0,1]$:

$$(1-t)\lambda + t\mu = ((1-t)\lambda_1 + t\mu_1, \cdots, (1-t)\lambda_n + t\mu_n) \in K,$$

puisque pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $(1-t)\lambda_i + t\mu_i \geq 0$ (puisque ces réels sont compris entre λ_i et μ_i qui sont eux-mêmes dans $[0,1]$) et $\sum_{i=1}^{n}((1-t)\lambda_i + t\mu_i) = (1-t)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + t\sum_{i=1}^{n}\mu_i = 1 - t + t = 1$.

Exercice 30 (*Somme d'un fermé et d'un compact)
Soient (E, N) un espace vectoriel normé, A et B deux parties de E.
Montrer que si A est fermé et B est compact, alors $A + B = \{a + b,\ (a,b) \in A \times B\}$ est fermé.

Corrigé de l'exercice 30
On utilise la caractérisation séquentielle des fermés : soit (x_n) une suite à valeurs dans $A + B$ qui converge vers un élément $\ell \in E$. Montrons que $\ell \in A + B$.
Par définition, (x_n) est somme de deux suites $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$, $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ (mais on ne peut pas affirmer que ces deux suites convergent). Vu que B est compact, la suite (b_n) possède une suite extraite $(b_{\varphi(n)})$ qui converge vers $b \in B$. On déduit que $a_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - b_{\varphi(n)} \to \ell - b$. Notons $a = \ell - b$. Vu que $(a_{\varphi(n)})$ est à valeurs dans le fermé A, sa limite a est dans A, donc finalement $\ell = a + b \in A + B$.

Exercice 31 (Compact inclus dans une boule)**
Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E, incluse dans la boule unité ouverte.
Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que $K \subset B_f(0_E, r)$.

Corrigé de l'exercice 31
Par hypothèse, on a $\|x\| < 1$ pour tout $x \in K$. On peut procéder de deux manières

1. Avec le théorème des bornes atteintes : la fonction $x \mapsto \|x\|$ est continue sur le compact K donc elle atteint son maximum. Il existe donc $x_0 \in K$ tel que

   $$\forall x \in K, \qquad \|x\| \leq \|x_0\| < 1.$$

   En posant $r = \|x_0\| < 1$, on a alors $K \subset B_f(0_E, r)$.

2. Par l'absurde : si pour tout $0 \leq r < 1$, $K \not\subset B_f(0_E, r)$, alors a fortiori pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in K$ tel que $x_n \notin B_f(0_E, 1 - \frac{1}{n})$. Ceci permet de construire une suite (x_n) à valeurs dans K telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|x_n\| > 1 - \frac{1}{n}$. Par compacité de K on peut alors extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $x \in K$. En passant à la limite dans la relation $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|x_{\varphi(n)}\| > 1 - \frac{1}{\varphi(n)}$, on obtient $\|x\| \geq 1$, ce qui est impossible car $x \in K$.
   D'où l'existence d'un réel $r \in [0,1[$ tel que $K \subset B_f(0_E, r)$.

Exercice 32 (Zéros d'une surjection continue)**
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective.
Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est un fermé de cardinal infini.
On pourra illustrer par un dessin !

Corrigé de l'exercice 32
Notons $Z = \{x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ l'ensemble des zéros de f. Puisque f est continue et $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, on en déduit que Z est un fermé relatif à $\mathbb{R}^+$: il existe donc F fermé de $\mathbb{R}$ tel que $Z = F \cap \mathbb{R}^+$. En tant qu'intersection de fermés de $\mathbb{R}$, Z est alors un fermé de $\mathbb{R}$.
Supposons maintenant que Z est fini, notons $z_0 = \max(Z)$ si Z est non vide, ou $z_0 = 1$ (valeur arbitraire !) si Z est vide. Ainsi, la fonction f ne s'annule pas sur l'intervalle $]z_0, +\infty[$, donc puisqu'elle est continue, f est de signe constant strict sur $]z_0, +\infty[$ par le théorème des valeurs intermédiaires. Sans perte de généralité (quitte à changer f en $-f$), on peut supposer que $f > 0$ sur $]z_0, +\infty[$.

Cela contredit alors la surjectivité de f, car l'image du segment $[0, z_0]$ est un segment $[m, M]$ (par continuité de f), donc

$$f(\mathbb{R}^+) = f([0, z_0]) \cup f(]z_0, +\infty[) \subset [m, M] \cup]0, +\infty[\subsetneq \mathbb{R}.$$

Par l'absurde, on en déduit que Z est infini.

Exercice 33 (*Réunion de deux connexes par arcs)
Prouver que la réunion de deux connexes par arcs non disjoints est un connexe par arcs.

Corrigé de l'exercice 33
Soit A et B deux parties connexes par arcs de E (un evn), notons $X = A \cup B$. Puisque $A \cap B \neq \emptyset$, notons $c \in A \cap B$. Montrons grâce à ce point que X est connexe par arcs. Fixons a et b dans X.

- Si a et b sont dans A, alors puisque A est connexe par arcs, il existe un chemin dans A qui relie a à b, et *a fortiori* ce chemin est dans X.
- Si a et b sont dans B, idem.
- Si $a \in A$ et $b \in B$: puisque $c \in A$ et A connexe par arcs, il existe un chemin qui relie a à c dans A. De même, il existe un chemin qui relie c à b dans B. Puisque X contient A et B, ces deux chemins sont tracés dans X, et par transitivité, on peut relier a à c en restant dans X.
- L'autre cas est symétrique.

On a montré tous points a, b dans X sont reliables par un chemin dans X, donc X est connexe par arcs.

Exercice 34 (Homéomorphismes)**
On dit que deux parties A et B de deux espaces vectoriels normés E et F sont **homéomorphes** lorsqu'il existe une bijection $f : A \to B$ telle que f et f^{-1} soient continues (une telle bijection est alors appelée **homéomorphisme**).

1. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est connexe par arcs.
2. Démontrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
3. Démontrer que $[0,1]$ et le cercle trigonométrique ne sont pas homéomorphes.

Corrigé de l'exercice 34

1. Soit a et b dans $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   - Si le segment $[a, b]$ ne contient pas $(0,0)$, alors ce segment est un chemin reliant a à b dans X ($\gamma : t \mapsto (1-t)a + tb$).
   - Si $(0,0) \in [a, b]$, alors on passe par un autre point $c \notin [a, b]$ (faire un dessin) : les segments $[a, c]$ et $[c, b]$ sont tracés dans X (ils ne contiennent pas $(0,0)$), donc par transitivité, il existe un chemin (qui n'est pas un segment mais une ligne brisée) qui relie a à b dans X.

   Finalement, X est bien connexe par arcs.
2. S'il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, alors en enlevant un point, on obtient par restriction un homéomorphisme $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \setminus \{t\}$, où $t = f(0,0)$. Puisque g est continue et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est connexe par arcs, on devrait avoir $g(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ connexe par arcs, c'est-à-dire $\mathbb{R} \setminus \{t\}$ connexe par arcs, mais ce n'est pas le cas (réunion disjointe de deux intervalles).
   On a donc une contradiction, ce qui rend impossible l'existence d'un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.
3. On utilise le même argument qu'à la question précédente. S'il existe un homéomorphisme $f : S \to [0,1]$, où S est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$, alors en enlevant un point intérieur au segment (par exemple $1/2$), on obtient par restriction un homéomorphisme $g : S^1 \setminus \{x\} \to [0,1] \setminus \{1/2\}$ (en notant $x = f^{-1}(1/2)$), ce qui est impossible car $S^1 \setminus \{x\}$ est connexe par arcs (faire un dessin !), alors que $[0,1] \setminus \{1/2\}$ ne l'est pas.

Exercice 35 (Injection continue)**

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective.
   En considérant $D = \{(x, y) \in I^2,\ x < y\}$ et $h : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(y) - f(x) \end{array} \right.$, démontrer que f est strictement monotone.
2. Existe-t-il une fonction $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \circ f = -Id_{\mathbb{R}}$? Justifier.

Corrigé de l'exercice 35

1. D est connexe par arcs, et même convexe (c'est un triangle, faire un dessin). La fonction h est continue sur D (car $h = f \circ p_2 - f \circ p_1$, où $p_1 : (x, y) \mapsto x$ et $p_2 : (x, y) \mapsto y$), donc son image $h(D)$ est connexe par arcs dans $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle. Puisque f est injective, $0 \notin h(D)$ (sinon on aurait $x < y$ dans I tels que $f(x) = f(y)$, impossible). Ainsi, $h(D)$ est un intervalle inclus dans $]0, +\infty[$ ou dans $]-\infty, 0[$. Dans le premier cas, $h > 0$, donc $(x < y \implies f(x) < f(y))$, c'est-à-dire que f est strictement croissante. Dans le second cas, f est strictement décroissante. Dans tous les cas, f est strictement monotone.
2. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie $f \circ f = -Id_{\mathbb{R}}$, alors cette composée est bijective. Or, de façon générale, $u \circ v$ injective implique v injective, et $u \circ v$ surjective implique u surjective). Donc ici, on obtient f injective et surjective, donc f est une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc strictement monotone d'après la question précédente. En distinguant les cas selon la monotonie de f, on obtient alors que $f \circ f$ est strictement croissante, ce qui est faux car $f \circ f = -Id_{\mathbb{R}}$, qui est strictement décroissante. Une telle fonction f n'existe donc pas.

Exercice 36 (Etude de la connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{K})$)**

1. Démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Corrigé de l'exercice 36

1. L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue (car polynomiale en les coefficients), donc si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe par arcs, son image $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ serait connexe par arcs dans $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas le cas puisque $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.
2. Puisque $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, l'argument précédent ne peut plus être utilisé. Soit A, B dans $GL_n(\mathbb{C})$. Montrons que l'on peut relier A à B par un chemin à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$.
   La première idée est de tester un segment :
   $$\left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & (1-t)A + tB \end{array} \right. ,$$
   mais ce segment n'est pas nécessairement à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$, puisque $t \mapsto \det((1-t)A+tB)$ peut s'annuler sur $[0, 1]$ même si $\det(A)$ et $\det(B)$ sont non nuls. L'idée est la suivante : plutôt que de rester sur l'axe réel, on va "serpenter" entre les racines de $z \mapsto \det((1 - z)A + zB)$ dans le plan complexe. Posons donc $P : z \mapsto \det((1-z)A+zB)$. Cette fonction est polynomiale, donc ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans $\mathbb{C}$. En notant Z l'ensemble de ses racines, on observe que $\mathbb{C} \setminus Z$ est connexe par arcs (puisque Z est fini), donc on peut tracer un chemin $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ qui relie 0 à 1 (pas dans Z puisque $P(0) = \det(A) \neq 0$ et $P(1) = \det(B) \neq 0$) en restant dans $\mathbb{C} \setminus Z$. On compose alors en considérant le chemin
   $$\zeta : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & (1-\gamma(t))A + \gamma(t)B \end{array} \right. .$$
   La fonction ζ est bien continue par composition, est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ car $\forall t \in [0, 1],\ \det(\zeta(t)) = P(\gamma(t)) \neq 0$ (puisque $\gamma(t) \notin Z$), et $\zeta(0) = A$, $\zeta(1) = B$.
   Ainsi, on a relié tout couple de matrices inversibles par un chemin dans $GL_n(\mathbb{C})$, ce qui montre que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

VI TD du lundi 16/11

1) MPI* seulement

Exercice 37 (*Adhérence des matrices de rang donné)**
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $r \in [\![0, n]\!]$, on note $J_r(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r.

1. Montrer que $\bigcup_{k=0}^{r} J_k(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\overline{J_r(\mathbb{K})} = \bigcup_{k=0}^{r} J_k(\mathbb{K})$.
3. En déduire que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Déterminer $\overbrace{J_r(\mathbb{K})}^{\circ}$.

Corrigé de l'exercice 37

1. Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\bigcup_{k=0}^{r} J_k(\mathbb{K})$ qui converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $rg(M_k) \leq r$ donc aucune sous-matrice $(r+1) \times (r+1)$ extraite des M_k n'est inversible. Cela signifie que pour toutes parties I, J de $[\![1, n]\!]$ avec $|I| = |J| = r+1$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det((M_k)_{I,J}) = 0$ (où $(M_k)_{I,J}$ désigne la matrice extraite de M_k d'indices $(i, j) \in I \times J$).
   Par continuité du déterminant on obtient par passage à la limite que $\det(M_{I,J}) = 0$.
   Ainsi, aucune sous-matrice $(r+1) \times (r+1)$ extraite de M n'est inversible, donc $rg(M) \leq r$.
   On a ainsi montré que l'ensemble $\bigcup_{k=0}^{r} J_k(\mathbb{K})$ est stable par passage à la limite, donc fermé.

2. L'ensemble $\bigcup_{k=0}^{r} J_k(\mathbb{K})$ est un fermé (d'après la question précédente) contenant $J_r(\mathbb{K})$, donc il contient son adhérence (qui est le plus petit fermé contenant $J_r(\mathbb{K})$).
   Ceci montre que $\overline{J_r(\mathbb{K})} \subset \bigcup_{k=0}^{r} J_k(\mathbb{K})$.
   Réciproquement, si $M \in \bigcup_{k=0}^{r} J_k(\mathbb{K})$ (i.e. $rg(M) \leq r$), montrons que M est adhérent à $J_r(\mathbb{K})$.
   Pour cela, on note $q = rg(M) \in [\![0, r]\!]$.
   Il existe P, Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ telles que $Q^{-1}MP = D$, où D est la matrice diagonale de diagonale $(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ (avec exactement q "1"). Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, D_k la matrice diagonale de diagonale $(1, \cdots, 1, \frac{1}{k}, \cdots, \frac{1}{k}, 0, \cdots, 0)$, où l'on a rajouté $r - q$ coefficients $1/k$ afin d'avoir $rg(D_k) = r$ pour tout k. Vu que l'équivalence de matrices conserve le rang, la suite $(M_k) = (QD_kP^{-1})_{k\geq 1}$ est formée de matrices de rang r, et converge (par continuité du produit matriciel) vers $QDP^{-1} = M$, ce qui montre bien que $M \in \overline{J_r(\mathbb{K})}$, d'où l'égalité $\bigcup_{k=0}^{r} J_k(\mathbb{K}) = \overline{J_r(\mathbb{K})}$.

3. $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car c'est l'image réciproque de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ (ouvert dans $\mathbb{K}$) par la fonction continue $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
   De plus, $GL_n(\mathbb{K}) = J_n(\mathbb{K})$ donc d'après la question précédente, $\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \bigcup_{k=0}^{n} J_k(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ce qui montre que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Si $r = n$, $J_n(\mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert donc $\overbrace{J_n(\mathbb{K})}^{\circ} = J_n(\mathbb{K})$.
   Si $r < n$, alors $J_r(\mathbb{K}) \subset F$, où $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$ est un fermé d'intérieur vide (puisque son complémentaire est un ouvert dense). Donc $\overbrace{J_r(\mathbb{K})}^{\circ} \subset \mathring{F} = \emptyset$, d'où $\overbrace{J_r(\mathbb{K})}^{\circ} = \emptyset$.

Exercice 38 (*Projection sur une partie convexe compacte)**
Soit C une partie convexe compacte non vide d'un espace préhilbertien réel E.

1. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in C$ tel que $d(x,C) = \|x - x_0\|$.
   On note dans la suite $x_0 = p_C(x)$ et on appelle x_0 le projeté de x sur C.
2. Montrer que pour tout $x \in E$, on a : $\forall y \in C,\ \big(x - p_C(x) | y - p_C(x)\big) \leq 0$.

Corrigé de l'exercice 38

1. On rappelle que $d(x,C) = \inf_{y\in C} \|x-y\|$ (qui est bien défini dans $\mathbb{R}^+$ car C est non vide et $\|x-y\| \geq 0$). Vu que la fonction $y \mapsto \|x-y\|$ est continue sur le compact C, cet inf est atteint donc il existe $x_0 \in C$ tel que $d(x,C) = \|x - x_0\|$.
   Pour l'unicité, on utilise la convexité de C : si x_0, x_1 sont deux points de C tels que $d(x,C) = \|x-x_0\| = \|x-x_1\|$, alors le milieu $m = \frac{x_0+x_1}{2}$ est aussi dans C (par convexité), donc

   $$\|x - m\|^2 \geq d(x,C)^2,$$

   c'est-à-dire

   $$\|(x-x_0) + (x-x_1)\|^2 \geq 4d(x,C)^2.$$

   En outre,

   $$\|(x-x_0)+(x-x_1)\|^2 + \|(x-x_0)-(x-x_1)\|^2 = 2(\|x-x_0\|^2 + \|x-x_1\|^2)$$

   (*identité du parallélogramme*), donc

   $$\|x_0 - x_1\|^2 = 2(\|x-x_0\|^2 + \|x-x_1\|^2) - \|(x-x_0)+(x-x_1)\|^2 = 4d(x,C)^2 - \|(x-x_0)+(x-x_1)\|^2 \leq 0,$$

   donc $x_1 = x_0$, ce qui prouve l'unicité du point $x_0 \in C$ qui réalise la distance $d(x,C)$.
2. Toujours par convexité de C, on a $x_0 = p_C(x) \in C$ donc

   $$\forall y \in C,\ \forall t \in [0,1], \quad (1-t)x_0 + ty = x_0 + t(y - x_0) \in C,$$

   ce qui amène l'inégalité

   $$\forall y \in C,\ \forall t \in [0,1], \quad \|x - x_0 - t(y-x_0)\|^2 \geq \|x - x_0\|^2,$$

   c'est-à-dire en développant et simplifiant :

   $$\forall y \in C,\ \forall t \in [0,1], \quad t^2\|y-x_0\|^2 - 2t(x-x_0|y-x_0) \geq 0,$$

   en divisant par $t \in]0,1]$ et en prenant la limite lorsque $t \to 0^+$, on obtient :

   $$\forall y \in C, \qquad (x-x_0|y-x_0) \leq 0.$$

2) MPI/MPI*

Exercice 39 (*Orthogonal d'une partie)
Soit E un espace préhilbertien réel et A une partie de E.
Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

Corrigé de l'exercice 39

- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E car :
  * $0_E \in A^\perp$ car 0_E est orthogonal à tout vecteur de E, donc de A.
  * $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times A^\perp \times A^\perp,\ \lambda x + y \in A^\perp$ car

    $$\forall a \in A, \qquad (\lambda x + y | a) = \lambda(x|a) + (y|a) = \lambda \times 0 + 0 = 0.$$

- Montrons que $A^\perp$ est fermé.
  Soit (x_n) une suite de vecteurs de $A^\perp$ qui converge vers $x \in E$. On a

$$(*) \qquad \forall a \in A,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (x_n|a) = 0.$$

  En outre, $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n|a) = (x|a)$, puisque par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(x_n|a) - (x|a)| = |(x_n - x|a)| \leq \|a\| \times \|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

  Donc en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans $(*)$, on en déduit

$$\forall a \in A, \quad (x|a) = 0,$$

  donc $x \in A^\perp$. Ainsi, par le critère séquentiel, $A^\perp$ est bien un fermé de E.
  Variante : On écrit $A^\perp$ comme une intersection de fermés :

$$A^\perp = \{x \in E,\ \forall a \in A,\ (x|a) = 0\} = \bigcap_{a\in A} \phi_a^{-1}(\{0\}),$$

  où $\phi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x|a) \end{array} \right.$. Comme pour tout $a \in E$ la forme linéaire ϕ_a est continue (puisque $\forall x \in E$, $|\phi_a(x)| \leq \|a\| \times \|x\|$) et comme $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, alors $\phi_a^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E. Ainsi, $A^\perp$ est fermé comme intersection de fermés de E.

Exercice 40 (Topologie des matrices diagonales)**
Déterminer les propriétés topologiques (fermé ? ouvert ? borné ? compact ? connexe par arcs ?) de l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 40
Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|M\|_\infty = \max_{i,j} |m_{i,j}|$.
On suppose $n \geq 2$ (le cas $n = 1$ n'est pas intéressant puisque $\mathcal{D}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.
L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ n'est pas ouvert car la matrice nulle est diagonale mais pour tout $\varepsilon > 0$, la matrice $\varepsilon E_{1,2}$ n'est pas diagonale mais appartient à la boule fermée $B_f(0, \varepsilon)$, donc $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un voisinage de la matrice nulle.
L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est fermé car si on considère une suite (M_k) de matrices diagonales qui converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $M_k[i, j] \underset{k\to+\infty}{\to} M[i, j]$ (la convergence se fait coefficient par coefficient). Donc si $i \neq j$, $M[i, j] = \lim\limits_{k\to+\infty} M_k[i, j] = \lim\limits_{k\to+\infty} 0 = 0$, ce qui montre que $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.
L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ n'est pas borné car pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice λI_n est diagonale mais $\|\lambda I_n\| = |\lambda|$ est aussi grand que voulu.
L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ n'est pas compact car non borné.
Enfin, en tant que SEV, l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est convexe donc connexe par arcs.

Exercice 41 (Existence d'une norme sous-multiplicative)**
Soit $(E, +, \cdot, \times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie.
En considérant l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x \times y \end{array} \right.$, montrer qu'il existe une norme N sur E qui soit sous-multiplicative, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ N(x \times y) \leq N(x)N(y).$$

Corrigé de l'exercice 41
Tout d'abord, on peut toujours construire une norme sur E en fixant une base $(e_1, \cdots, e_n)$ du $\mathbb{K}$-ev E et en posant $\|.\|_\infty : x \mapsto \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$, où $(x_1, \cdots, x_n)$ désignent les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans $(e_1, \cdots, e_n)$.
Pour cette norme (et toutes les autres d'ailleurs, qui lui sont équivalentes) l'application $\varphi : (x, y) \mapsto$

$x \times y$ est bilinéaire en dimension finie donc continue : d'après la caractérisation des applications bilinéaires continues, il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \|x \times y\|_\infty \leq C\|x\|_\infty \|y\|_\infty.$$

Il ne reste plus qu'à modifier la norme en posant $N = C\|.\|_\infty$. Cette nouvelle norme N vérifie bien :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad N(x \times y) = C\|x \times y\|_\infty \leq C^2 \|x\|_\infty \|y\|_\infty = N(x)N(y),$$

donc N est sous-multiplicative.

Exercice 42 (Généralisation du théorème des segments emboîtés)**
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides et bornés d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On suppose que $\delta(F_n) \to 0$, où l'on note $\delta(F_n) = \sup_{(x,y)\in F_n^2} \|y - x\|$.
Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

Corrigé de l'exercice 42
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $(x,y) \mapsto \|y - x\|$ est continue sur F_n^2, qui est compact (en effet, F_n est compact en tant que fermé borné en dimension finie et un produit fini de compacts est compact). D'après le théorème des bornes atteintes, il existe donc un couple $(x_n, y_n) \in F_n^2$ tel que

$$\delta(F_n) = \|y_n - x_n\|.$$

On a donc construit une suite (x_n, y_n) à valeurs dans F_n^2, donc dans F_0^2 (par décroissance des (F_n)). L'ensemble F_0^2 étant compact, il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \to (x,y) \in F_0^2$. En outre $\delta(F_{\varphi(n)})$ tend vers 0 (par hypothèse) mais aussi vers $\|y - x\|$ (par continuité de la norme), donc $\|y - x\| = 0$, c'est-à-dire $y = x$.
Reste à montrer que ce point x est dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Si on fixe $m \in \mathbb{N}$, alors

$$n \geq m \implies \varphi(n) \geq n \geq m \implies F_{\varphi(n)} \subset F_m \implies x_{\varphi(n)} \in F_m,$$

or F_m est fermé donc en passant à la limite : $x = \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} \in F_m$.
Ceci étant vrai pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$: cette intersection est donc non vide.
Enfin, si $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|x - z\| \leq \delta(F_n) \to 0$$

(puisque $(x,z) \in F_n^2$), donc $x = z$, et on conclut que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.