

Exercices du CH07 : Topologie des espaces vectoriels normés

Exercices de la banque INP à étudier : ex 1 (normes équivalentes), 13 (compacité), 34 (adhérence d'un sev, d'un convexe), 35 (caractérisation séquentielle de la continuité), 36 (caractérisation de la continuité des applications linéaires), 37 (non équivalences de normes), 38 (normes triples), 39 (suites de carré sommables), 44 (adhérence d'une réunion, d'une intersection), 45 (convexité et distance), 54 (application linéaire définie par une série)

I Notions générales de topologie

Exercice 1 (*Ouverts ? Fermés ?)

Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$:

1. La partie $\mathbb{Z}$ est-elle ouverte ? fermée ?
2. Même question avec $\mathbb{Q}$.
3. Même question avec $X = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Corrigé de l'exercice 1

1. • Tout d'abord, la partie $\mathbb{Z}$ n'est pas ouverte car $0 \in \mathbb{Z}$ mais $\mathbb{Z}$ n'est pas voisinage de 0, puisque pour tout $r > 0$, $B(0, r) =]-r, r[\not\subset \mathbb{Z}$.
• Montrons que la partie $\mathbb{Z}$ est fermée.

* **Première méthode :** le complémentaire est

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k, k+1[,$$

et cette partie est ouverte (car réunion d'intervalles ouverts, donc réunion de parties ouvertes).

* **Seconde méthode :** si (x_n) est une suite de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in \mathbb{R}$, alors on a $|x - x_n| \leq 1/4$ à partir d'un certain rang n_0 , donc

$$n \geq n_0 \implies x_n \in [x - 1/4, x + 1/4] \cap \mathbb{Z}.$$

Puisque $[x - 1/4, x + 1/4]$ est un intervalle de largeur $1/2$, donc il contient au plus un entier, et donc la suite (x_n) stationne à partir du rang n_0 . Donc $x = x_{n_0} \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve par le critère séquentiel que $\mathbb{Z}$ est fermée.

2. • $\mathbb{Q}$ n'est pas ouverte car (comme pour $\mathbb{Z}$), $0 \in \mathbb{Q}$ mais $\mathbb{Q}$ n'est pas voisinage de 0 (puisque pour tout réel $r > 0$, l'intervalle $] -r, r[$ contient des irrationnels).
• $\mathbb{Q}$ n'est pas fermée car $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas ouvert, puisque $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mais $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas voisinage de $\sqrt{2}$ (en effet tout intervalle $]\sqrt{2} - r, \sqrt{2} + r[$ contient des rationnels).
3. • X n'est pas ouverte car $1 \in X$ mais X n'est pas voisinage de 1 (en effet, pour tout $r > 0$, l'intervalle $]1 - r, 1 + r[$ contient des irrationnels, donc des éléments hors de X).
• X n'est pas fermée car la suite $(x_n) = (1/n)_{n \geq 1}$ est à valeurs dans X et converge vers $0 \notin X$.

Exercice 2 (**Intersection de parties denses)

Soient A et B deux parties denses d'un espace vectoriel normé E .

1. On suppose la partie A ouverte. Montrer que $A \cap B$ est une partie dense.
2. Et si A n'est plus supposée ouverte ?

Corrigé de l'exercice 2

1. Soit $x \in E$ et $r > 0$. Montrons que $B(x, r)$ contient au moins un élément de $A \cap B$.
 Déjà, $\bar{A} = E$ donc $B(x, r)$ contient un élément $a \in A$.
 Ensuite, A étant ouverte, l'intersection finie $A \cap B(x, r)$ est aussi ouverte donc il existe $\rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \subset A \cap B(x, r)$.
 Enfin, puisque $\bar{B} = E$, la boule $B(a, \rho)$ contient un élément $b \in B$, qui est aussi dans A puisque $B(a, \rho) \subset A$. Donc $b \in (A \cap B) \cap B(x, r)$, ce qui montre que $A \cap B$ est dense dans E .
2. Dans le cas général, l'intersection de deux parties denses dans E n'est pas nécessairement dense dans E . Dans le pire des cas, cette intersection peut même être vide. Par exemple dans $\mathbb{R}$, les parties $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses (puisque tout intervalle réel $]x - r, x + r[$ contient des rationnels et des irrationnels) mais $A \cap B = \emptyset$ (donc n'est pas dense).

Exercice 3 (Propriétés ensemblistes de l'intérieur et de l'adhérence)**

Soit A et B des parties d'un espace vectoriel normé E :

1. Comparer $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$.
2. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$.
3. Comparer $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ et $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
4. Comparer $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Corrigé de l'exercice 3

1. $\boxed{\subset}$ Puisque $A \subset \bar{A}$ et $B \subset \bar{B}$, on a $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.
 Ainsi, $\bar{A} \cup \bar{B}$ est un fermé (comme réunion finie de fermés) qui contient $A \cup B$. Vu que $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé de E qui contient $A \cup B$, on en déduit l'inclusion $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.
 $\boxed{\supset}$ A et B sont inclus dans $A \cup B$, donc par croissance de l'adhérence (propriété triviale), on a

$$\bar{A} \subset \overline{A \cup B}, \quad \bar{B} \subset \overline{A \cup B},$$

et donc $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

$\boxed{=}$ Conclusion : on a $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

2. $\boxed{\subset}$ Puisque $A \subset \bar{A}$ et $B \subset \bar{B}$, on a $A \cap B \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
 Ainsi, $\bar{A} \cap \bar{B}$ est un fermé (comme intersection de fermés) qui contient $A \cap B$. Vu que $\overline{A \cap B}$ est le plus petit fermé de E qui contient $A \cap B$, on en déduit l'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
 $\boxed{\supset}$ Inclusion fautive. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, avec $A =]0, 1[$ et $B =]1, 2[$, on a $A \cap B = \emptyset$ donc $\overline{A \cap B} = \emptyset$, alors que $\bar{A} \cap \bar{B} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$, donc $\bar{A} \cap \bar{B} \not\subset \overline{A \cap B}$.

3. On examine les complémentaires :

$$E \setminus \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overline{E \setminus (A \cap B)} = \overline{(E \setminus A) \cup (E \setminus B)},$$

donc d'après la question 1. :

$$E \setminus \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overline{E \setminus A \cup E \setminus B} = (E \setminus \overset{\circ}{A}) \cup (E \setminus \overset{\circ}{B}) = E \setminus (\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}),$$

ce qui montre finalement que $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

4. $\boxed{\supset}$ Avec les complémentaires :

$$E \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}) = (E \setminus \overset{\circ}{A}) \cap (E \setminus \overset{\circ}{B}) = \overline{E \setminus A} \cap \overline{E \setminus B},$$

donc d'après la question 2. :

$$E \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}) \supset \overline{(E \setminus A) \cap (E \setminus B)} = \overline{E \setminus (A \cup B)} = E \setminus \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}.$$

On en déduit finalement l'inclusion $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.

$\square$ Inclusion fautive car dans $\mathbb{R}$ avec $A = [0, 1]$ et $B = [1, 2]$, on a $\widehat{A \cup B} = \widehat{[0, 2]} =]0, 2[$, alors que $\widehat{A} \cup \widehat{B} =]0, 1[\cup]1, 2[\subsetneq]0, 2[$, donc $\widehat{A \cup B} \not\subset \widehat{A} \cup \widehat{B}$.

Exercice 4 (*Réunion de boules ouvertes)

Démontrer que toute partie ouverte d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé peut s'écrire comme une réunion de boules ouvertes.

Corrigé de l'exercice 4

Toute partie est réunion de ses singletons, donc si U est un ouvert de E , on a $U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$.

Or, pour tout $x \in U$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset U$, si bien que

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} B(x, r_x) \subset \bigcup_{x \in U} U = U,$$

et donc finalement, on a $U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x)$, c'est une réunion de boules ouvertes.

Exercice 5 (Densité et polynômes)**

1. Vérifier que l'application $N : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$N(P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)|$$

est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X], P(2) = 0\}$ est dense dans $(\mathbb{R}[X], N)$.
 3. Est-ce encore vrai pour l'ensemble $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\}$?

Corrigé de l'exercice 5

1. Fixons P, Q dans $\mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- la fonction $t \mapsto P(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc bornée sur tout segment, ce qui montre que $N(P)$ est bien défini.
- $N(P) \geq 0$ car $t \mapsto |P(t)|$ est une fonction positive
- si $N(P) = 0$, alors $|P(t)| = 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$ (par positivité de $|P|$), donc la fonction P est nulle sur $[-1, 1]$. Le polynôme P a donc une infinité de racines, ce qui amène $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
- $N(\lambda P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |\lambda P(t)| = |\lambda| \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)| = |\lambda| N(P)$, car $|\lambda| \geq 0$.
- Pour tout $t \in [-1, 1]$, on a

$$|(P+Q)(t)| = |P(t) + Q(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N(P) + N(Q),$$

donc $N(P) + N(Q)$ majore $t \mapsto |(P+Q)(t)|$ sur $[-1, 1]$, ce qui amène l'inégalité triangulaire $N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$, puisque $N(P+Q)$ est le plus petit majorant de $t \mapsto |(P+Q)(t)|$ sur $[-1, 1]$.

Donc N est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que P est limite (au sens de la norme N) d'une suite (P_n) d'éléments de E_2 . L'idée est de retrancher à P une suite de polynômes qui tend vers 0 (pour la norme N) et qui coïncide avec P en $X = 2$, en posant par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(X) = P(X) - P(2) \times (X/2)^n.$$

Cette suite convient car pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme tel que $P_n(2) = P(2) - P(2) = 0$, donc $P_n \in E_2$, et

$$N(P_n - P) = |P(2)| \times \sup_{t \in [-1, 1]} |t/2|^n = |P(2)| \times (1/2)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc (P_n) converge vers P dans l'evn $(\mathbb{R}[X], N)$. Ceci montre que E_2 est dense dans $(\mathbb{R}[X], N)$.

3. Cette fois-ci, ça ne fonctionne plus, car le point d'évaluation $x = 1$ fait partie du segment que la norme N prend en compte. Plus précisément, si (P_n) est une suite de polynômes de E_1 qui converge vers $P \in \mathbb{R}[X]$, alors on a $P_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, $P_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(1)$ car :

$$|P_n(1) - P(1)| \leq \sup_{t \in [-1, 1]} |P_n(t) - P(t)| = N(P_n - P) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc par passage à la limite :

$$P(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(1) = 0,$$

ce qui montre que $P \in E_1$, et donc que E_1 est une partie fermée de E . Elle n'est donc pas dense dans $(\mathbb{R}[X], N)$, puisque $\overline{E_1} = E_1 \subsetneq \mathbb{R}[X]$ (il existe des polynômes ne s'annulant pas en $X = 1$).

Exercice 6 (**Intérieur d'un sev)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel strict de E (c'est-à-dire $F \neq E$), alors F est d'intérieur vide.

Corrigé de l'exercice 6

Si F est d'intérieur non vide, alors il existe $a \in F$ et $r > 0$ tel que $\overline{B(a, r)} \subset F$.

Vu que F est stable par combinaison linéaire, cela entraîne que $E \subset F$, car pour tout vecteur $x \in E \setminus \{0\}$, on a

$$y = a + r \frac{x}{\|x\|} \in \overline{B(a, r)} \subset F,$$

donc $x = \frac{\|x\|}{r}(y - a) \in F$ (puisque $a \in F$, $y \in F$ et F est un sev de E).

Vu qu'on a aussi $0_E \in F$, on en déduit finalement que $E \subset F$, donc $E = F$, et c'est contradictoire. Donc F est bien d'intérieur vide.

Exercice 7 (*Fonction adhérente)

On note $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$, et on considère :

$$A = \{f \in E, f(0) = 0\}.$$

Montrer que la fonction constante égale à 1 est adhérente à l'ensemble A .

Corrigé de l'exercice 7

Il suffit de montrer que la fonction constante égale à 1 (que l'on notera 1) est limite d'une suite de $A^{\mathbb{N}}$ (donc une suite de fonctions $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f_n(0) = 0$) au sens de la norme $\|\cdot\|_1$. Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, posons $f_n(x) = nx$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 1$ si $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$ (on l'intuitue avec un dessin en notant que $\|f_n - 1\|_1$ est la différence des aires sous les courbes de f_n et 1).

Les f_n sont bien dans A pour tout $n \geq 1$, et

$$\|f_n - 1\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - 1| dx = \int_0^{1/n} |nx - 1| dx = \int_0^{1/n} (1 - nx) dx = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où le résultat.

Exercice 8 (**Fonctions de signe constant)

On note $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.

1. Montrer que $F = \{f \in E, \forall x \in [0; 1], f(x) \geq 0\}$ est un fermé de E .
2. Montrer que $U = \{f \in E, \forall x \in [0; 1], f(x) > 0\}$ est un ouvert de E .

Corrigé de l'exercice 8

1. Montrons que F est un fermé de E en utilisant la caractérisation séquentielle : soit $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $f \in E$ au sens de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. On a alors $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Montrons que $f \in F$, c'est-à-dire que $f(0) \geq 0$. On a :

$$|f_n(0) - f(0)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty,$$

donc $|f_n(0) - f(0)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, c'est-à-dire :

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0).$$

Puisque $f_n(0) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (étant donné que les f_n sont dans F), on en déduit par passage à la limite que $f(0) \geq 0$, donc $f \in F$.

Variante : on peut écrire F comme une intersection de fermés. En effet, on a

$$F = \bigcap_{x \in [0,1]} \{f \in E, f(x) \geq 0\} = \bigcap_{x \in [0,1]} \phi_x^{-1}(\mathbb{R}^+),$$

où $\phi_x : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto f(x) \end{cases}$. Comme $\mathbb{R}^+$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et comme chaque forme linéaire ϕ_x est continue (vu l'inégalité $|\phi_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty$), alors chaque ensemble $\phi_x^{-1}(\mathbb{R}^+)$ est un fermé de E , ce qui montre que F est fermé.

2. Montrons que U est un ouvert de E . Etant donnée $f_0 \in U$ (donc $f_0 > 0$ sur $[0,1]$), montrons qu'il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(f_0, r) \subset U$, c'est-à-dire $r > 0$ tel que

$$\|f - f_0\|_\infty \leq r \implies f \in U,$$

ou encore

$$\forall x \in [0,1], |f(x) - f_0(x)| \leq r \implies \forall x \in [0,1], f(x) > 0.$$

Déjà, f_0 étant continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée et son minimum est atteint en un point x_0 :

$$\exists x_0 \in [0,1], \min_{x \in [0,1]} f_0(x) = f_0(x_0) > 0.$$

Dès lors, le rayon $r = \frac{1}{2}f_0(x_0) > 0$ convient (faire un dessin), car :

$$\begin{aligned} \|f - f_0\|_\infty \leq r &\implies \forall x \in [0,1], -r \leq f(x) - f_0(x) \leq r \\ \implies \forall x \in [0,1], f(x) &\geq f_0(x) - r \geq f_0(x_0) - r = \frac{1}{2}f_0(x_0) > 0 \implies f \in U. \end{aligned}$$

Remarque : la méthode avec les formes linéaires ϕ_x ne donne rien ici. En effet :

$$U = \bigcap_{x \in [0,1]} \phi_x^{-1}(\mathbb{R}_+^*),$$

chaque $\phi_x^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est un ouvert de E (puisque $\phi_x \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ et puisque $\mathbb{R}_+^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$), mais une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert !

Exercice 9 (***) Adhérence et intérieur d'un sev de fonctions

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. On note F le sev de E formé par les fonctions s'annulant en 0 et en 1. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de F pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Corrigé de l'exercice 9

- Puisque F est un sev de E différent de E , l'intérieur de F est vide (pour n'importe quelle norme), d'après l'exercice 6.
- Déterminons l'adhérence de F pour $\|\cdot\|_\infty$.
Si $f \in \overline{F}$, alors il existe une suite $(f_n) \in F^\mathbb{N}$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On a donc

$$\forall x \in [0,1], |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Vu que les f_n sont dans F , on a $f_n(0) = f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc en passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ on obtient $f(0) = f(1) = 0$, donc $f \in F$. Ceci montre que F est fermé, et donc $\overline{F} = F$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

- Déterminons l'adhérence de F pour $\|\cdot\|_1$.

En fait, pour cette norme, on a $\overline{F} = E$, car étant donnée une fonction $f \in E$, on considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 2}$ définie par

$$\forall n \geq 2, \quad f_n : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f_n(x) = \begin{cases} nx f(1/n) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ f(x) & \text{si } 1/n \leq x \leq 1 - 1/n \\ n(1-x)f(1-1/n) & \text{si } 1 - 1/n \leq x \leq 1 \end{cases} \end{cases}.$$

Les f_n sont dans F (f_n est continue sur $[0, 1]$ et $f_n(0) = f_n(1) = 0$ pour tout $n \geq 2$), et on a

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 &= \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \int_0^{1/n} |nx f(1/n) - f(x)| dx + \int_{1-1/n}^1 |n(1-x)f(1-1/n) - f(x)| dx \\ &\leq n|f(1/n)| \int_0^{1/n} x dx + \int_0^{1/n} |f(x)| dx + n|f(1-1/n)| \int_{1-1/n}^1 (1-x) dx + \int_{1-1/n}^1 |f(x)| dx \\ &\leq \|f\|_\infty \left(n \times \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} + n \times \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} \right) = \frac{3\|f\|_\infty}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que f est limite (au sens de la norme $\|\cdot\|_1$) d'une suite de fonctions $(f_n) \in F^\mathbb{N}$.

Exercice 10 (**Valeurs d'adhérence d'une suite)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé E . On note $\text{Adh}(u)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence (c'est-à-dire l'ensemble des limites des suites extraites de u).

Montrer que $\text{Adh}(u) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{u_k, k \geq n\}$ et en déduire que $\text{Adh}(u)$ est fermé.

Corrigé de l'exercice 10

$\square$ Soit $\lambda \in \text{Adh}(u)$. Alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, la boule ouverte $B(\lambda, \varepsilon)$ contient tous les $u_{\varphi(n)}$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en posant $n_1 = \max(n_0, n)$, on a donc $\varphi(n_1) \geq \varphi(n) \geq n$ et $u_{\varphi(n_1)} \in B(\lambda, \varepsilon)$. On a donc trouvé un terme u_k dans la boule $B(\lambda, \varepsilon)$, avec $k = \varphi(n_1) \geq n$, ce qui montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda \in \{u_k, k \geq n\}$. D'où $\lambda \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{u_k, k \geq n\}$.

$\supseteq$ Réciproquement, supposons que $\lambda \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{u_k, k \geq n\}$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists k \geq n, \quad \|u_k - \lambda\| < \varepsilon.$$

En choisissant convenablement $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on peut alors construire par récurrence forte une suite extraite $(u_{\varphi(k)})$ qui converge vers λ à la vitesse désirée (par exemple plus vite que $(1/2)^k$). En effet :

- * en posant $\varepsilon = 1$ et $n = 0$, il existe $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_{\varphi(0)} - \lambda\| < 1$.
- * en posant $\varepsilon = 1/2$ et $n = \varphi(0) + 1$, il existe un entier $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $\|u_{\varphi(1)} - \lambda\| < 1/2$.
- * si $\varphi(0) < \dots < \varphi(k)$ sont des entiers construits tels que $\|u_{\varphi(p)} - \lambda\| < 1/2^p$ pour tout $p \leq k$, alors en posant $\varepsilon = 1/2^{k+1}$ et $n = \varphi(k) + 1$, il existe un entier $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ tel que $\|u_{\varphi(k+1)} - \lambda\| < 1/2^{k+1}$.

Ainsi, λ est limite de la suite $(u_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ construite (puisque $\|u_{\varphi(k)} - \lambda\| < 1/2^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$) donc $\lambda \in \text{Adh}(u)$.

Conclusion Ainsi, $\text{Adh}(u)$ est une intersection de fermés, donc un fermé de E .

ATTENTION !

On pourrait croire que " λ valeur d'adhérence de u " signifie simplement que λ est adhérent à l'ensemble des termes de la suite, c'est-à-dire

$$\lambda \in \overline{\{u_k, k \in \mathbb{N}\}},$$

mais cela ne suffit pas. Se méfier du vocabulaire !

Exercice 11 (Sous-groupes de $\mathbb{R}$)**

Démontrer que les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, soit denses dans $\mathbb{R}$.
Indication : de manière analogue à l'étude des sous-groupes de $\mathbb{Z}$, on se donnera un sous-groupe G de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ et on justifiera l'existence de $a = \inf(G \cap]0, +\infty[)$. Enfin on discutera selon si $a > 0$ ou $a = 0$.

Corrigé de l'exercice 11

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ différent de $\{0\}$. G contient donc un élément non nul, et son opposé (par stabilité), donc G contient un élément strictement positif. Ainsi, la partie $G \cap]0, +\infty[$ est non vide et minorée par 0 dans $\mathbb{R}$, donc elle possède une borne inférieure. Notons :

$$a = \inf(G \cap]0, +\infty[) \in \mathbb{R}^+.$$

- Si $a > 0$, alors $2a > a$ ne minore pas $G \cap]0, +\infty[$, donc il existe $x \in G$ tel que $a \leq x < 2a$.
 Si de plus $a < x$, alors x ne minore pas $G \cap]0, +\infty[$, donc il existe $y \in G$ tel que $a \leq y < x < 2a$.
 Mais alors $0 < x - y < a$ avec $x - y \in G$ (par stabilité), ce qui est impossible par définition de a .
 Donc $a = x$, ce qui montre que $a \in G$. Il s'ensuit facilement $a\mathbb{Z} \subset G$.
 Réciproquement, si $x \in G$, alors en notant n le plus grand entier tel que $na \leq x$ (i.e. $n = \lfloor x/a \rfloor$), on a $x = na + r$ avec $0 \leq r < a$, mais aussi $r = x - na \in G$, puisque x et a sont dans G . Donc $r = 0$ (par le caractère minimal de a), et $x \in a\mathbb{Z}$. D'où l'égalité $G = a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
- Si $a = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, ε ne minore pas $G \cap]0, +\infty[$, donc il existe $x \in G$ tel que $0 < x < \varepsilon$.
 Etant donné un réel y , notons n le plus grand entier tel que $nx \leq y$ (i.e. $n = \lfloor y/x \rfloor$).
 On a $nx \leq y < (n+1)x$, donc $y - nx \in]0, x[\subset]0, \varepsilon[$ et $nx \in G$. Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $z \in G$ tel que $|y - z| < \varepsilon$, ce qui montre que $\overline{G} = \mathbb{R}$.

Finalement, on a montré que les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}^+$ (en rajoutant le cas du sous-groupe nul), ou alors sont denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (Points isolés, parties discrètes)**

Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in X$. On dit que x est un **point isolé** de X lorsqu'il existe un ouvert O de $\mathbb{R}$ tel que $O \cap X = \{x\}$. Et on dit que X est **discrète** lorsque tous ses points sont isolés.

1. Exhiber des parties discrètes et infinies de $\mathbb{R}$. De telles parties peuvent-elles être bornées ?
2. Soit X une partie discrète de $\mathbb{R}$. On se propose de montrer que X est au plus dénombrable.
 Pour cela, on introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble :

$$X_n = \left\{ x \in X, \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\cap X = \{x\} \right\}.$$

- (a) Déterminer une relation entre les $(X_n)_{n \geq 1}$ et X .
- (b) Que dire de la distance entre deux points de X_n ?
- (c) En déduire une injection $X_n \rightarrow \mathbb{Z}$ et conclure.

Corrigé de l'exercice 12

1. $\mathbb{Z}$ est une partie discrète et infinie de $\mathbb{R}$, car pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $]x-1, x+1[\cap \mathbb{Z} = \{x\}$.
 Il existe également des parties discrètes, infinies et bornées. C'est le cas de $X = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ par exemple, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left] \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \right[\cap X = \left\{ \frac{1}{n} \right\},$$

et $X \subset [0, 1]$.

2. (a) X est discrète et tout ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x contient un intervalle du type $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Donc :

$$\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{N}^*, \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\cap X = \{x\},$$

ce qui montre l'inclusion $X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X_n$. Mais chaque X_n est par définition dans X , donc on a l'inclusion réciproque, et finalement l'égalité

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X_n.$$

(b) Si $(x, y) \in X_n^2$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), alors

$$|x - y| < \frac{1}{n} \implies y \in]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\implies y = x,$$

donc

$$x \neq y \implies |x - y| \geq \frac{1}{n}.$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on va exploiter l'idée que chaque $x \in X_n$ est dans un seul intervalle du type $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, en considérons l'application

$$\varphi_n : \begin{cases} X_n & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto [nx] \end{cases}$$

(en d'autres termes, $\varphi_n(x)$ est l'unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$). Cette application est injective car, pour tout $(x, y) \in X_n^2$:

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(y) \implies (x, y) \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[^2 \implies |x - y| < \frac{1}{n} \implies x = y.$$

Vu que $\mathbb{Z}$ est dénombrable, on en déduit que X_n est au plus dénombrable, et donc X est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.

On a donc montré que **toute partie discrète de $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable**.

II Limites et continuité

Exercice 13 (*Exemples d'étude de continuité)

Les applications suivantes sont-elles continues en $(0, 0)$?

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases},$$

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}.$$

Corrigé de l'exercice 13

1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x||y|}{\|(x, y)\|_2}.$$

Vu que $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, on a la majoration

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq \frac{\|(x, y)\|_2^2}{\|(x, y)\|_2} = \|(x, y)\|_2$$

(qui reste vraie pour $(x, y) = (0, 0)$).

Donc en posant $\delta = \varepsilon > 0$, on a

$$\|(x, y) - (0, 0)\|_2 \leq \delta \implies |f(x, y) - f(0, 0)| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve la continuité de f en $(0, 0)$.

2. L'application g n'est pas continue en $(0,0)$ d'après le critère séquentiel car la suite $u_n = (1/n, 1/n)$ tend vers $(0,0)$ mais $g(u_n) = g(1/n, 1/n) = \frac{1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $g(0,0) = 0$.

Exercice 14 (*Image continue d'une partie dense)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et $f : E \rightarrow F$ une application continue et surjective. Montrer que si A est une partie dense dans E , alors $f(A)$ est dense dans F .

Corrigé de l'exercice 14

Montrons que tout point $y \in F$ est limite d'une suite de points de $f(A)$.

Etant donné $y \in F$, il existe, par surjectivité de f , un point $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $\overline{A} = E$, il existe une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow x$. Par continuité de f au point x , on a $f(x_n) \rightarrow f(x) = y$. Ainsi, y est limite de la suite $(f(x_n)) \in f(A)^{\mathbb{N}}$, ce qui montre que $F \subset \overline{f(A)}$. L'inclusion réciproque étant automatique (par définition de l'adhérence), on a $F = \overline{f(A)}$, c'est-à-dire $f(A)$ dense dans F .

Exercice 15 (Fonction à image rationnelle / irrationnelle)**

1. Que dire d'une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $Im(f) \subset \mathbb{Q}$? et telle que $Im(f) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?
2. Existe-t-il une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que l'image de tout rationnel soit un irrationnel et telle que l'image de tout irrationnel soit un rationnel?

Corrigé de l'exercice 15

1.
 - Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{Q}$, alors f est nécessairement constante. En effet, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ d'après le TVI (puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle et f est continue), et tout intervalle non vide et non singleton contient des irrationnels, donc $f(\mathbb{R})$ (qui ne contient que des rationnels par hypothèse) est un singleton, c'est-à-dire f constante.
 - Même conclusion si f est à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, car si l'intervalle non vide $f(\mathbb{R})$ était non singleton, alors il contiendrait aussi des rationnels, ce qui est exclu par hypothèse, donc $f(\mathbb{R})$ est un singleton.
2. Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$x \in \mathbb{Q} \implies f(x) \notin \mathbb{Q}, \quad x \notin \mathbb{Q} \implies f(x) \in \mathbb{Q}.$$

Alors, l'application continue $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{cases}$ vérifie

$$x \in \mathbb{Q} \implies f(x) \notin \mathbb{Q} \implies g(x) = f(x) - x \notin \mathbb{Q},$$

$$x \notin \mathbb{Q} \implies f(x) \in \mathbb{Q} \implies g(x) = f(x) - x \notin \mathbb{Q},$$

donc $Im(g) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ce qui entraîne g constante d'après la question 1. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - x = f(0) - 0,$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x + f(0).$$

En particulier $f(f(0)) = 2f(0)$, ce qui pose problème car $f(0) \notin \mathbb{Q}$ (par hypothèse sur f), et donc $2f(0) = f(f(0)) \in \mathbb{Q}$. Donc une telle application f n'existe pas.

Exercice 16 (Condition suffisante d'uniforme continuité)**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Corrigé de l'exercice 16

Notons $\ell = \lim_{+\infty} f \in \mathbb{R}$ et fixons un réel $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite en $+\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$t \geq A, \implies |f(t) - \ell| \leq \varepsilon/2,$$

et donc en particulier

$$A \leq x \leq y \implies |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| \leq \varepsilon.$$

En outre, sur le segment $[0, A]$ (qui est compact), f est uniformément continue d'après le théorème de Heine donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, A]^2, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On a donc en définitive ($|x - y| \leq \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$) dans les cas $A \leq x \leq y$ et $0 \leq x \leq y \leq A$. **Mais** que se passe-t-il dans le cas du chevauchement, i.e. $x \leq A \leq y$?

On peut en fait inclure ce dernier cas dans les précédents, car si on applique le théorème de Heine sur $[0, A + 1]$ (au lieu de $[0, A]$), alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, A + 1]^2, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Le problème du chevauchement est alors réglé si on choisit $\delta < 1$, car pour tout couple (x, y) tel que $y \geq x \geq 0$:

- * si $x \geq A$, alors $y \geq x \geq A$ donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$;
- * si $x < A$, alors pour tout $y \geq x$, on a

$$|x - y| \leq \delta \implies y \leq x + \delta < x + 1 \implies (x, y) \in [0, A + 1]^2 \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On a montré qu'il existe $\delta \in]0, 1[$ tel que $\forall y \geq x \geq 0$, ($|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$), et donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 17 (**Caractère lipschitzien de l'inf)

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Montrer que l'application $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \inf_{t \in [0, 1]} f(t) \end{cases}$ est bien définie et lipschitzienne.

Corrigé de l'exercice 17

- Déjà, φ est bien définie sur E car toute fonction f continue sur le segment $[0, 1]$ est bornée, donc minorée, et donc $\varphi(f)$ existe dans $\mathbb{R}$.
- Soit $(f, g) \in E^2$. Encadrons $\varphi(f) - \varphi(g)$ à l'aide de $\|f - g\|_\infty$.
 - * Tout d'abord, on a l'inégalité :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \|f - g\|_\infty \geq f(t) - g(t) \geq \inf_{t \in [0, 1]} f - g(t) = \varphi(f) - g(t),$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in [0, 1], \quad \varphi(f) - \|f - g\|_\infty \leq g(t).$$

Ainsi, la constante $\varphi(f) - \|f - g\|_\infty$ minore g , donc

$$\varphi(f) - \|f - g\|_\infty \leq \inf_{t \in [0, 1]} g = \varphi(g),$$

(puisque $\varphi(g)$ est par définition le plus grand minorant de g), c'est-à-dire

$$\varphi(f) - \varphi(g) \leq \|f - g\|_\infty.$$

- * Symétriquement, on obtient

$$\varphi(g) - \varphi(f) \leq \|g - f\|_\infty = \|f - g\|_\infty.$$

En définitive, on a montré

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad -\|f - g\|_\infty \leq \varphi(f) - \varphi(g) \leq \|f - g\|_\infty,$$

c'est-à-dire

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad |\varphi(f) - \varphi(g)| \leq \|f - g\|_\infty.$$

Donc φ est bien lipschitzienne.

Exercice 18 (Continuité et restriction)

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et F_1, F_2 des parties fermées de E telles que $F_1 \cup F_2 = E$. Soit une application $f : E \rightarrow G$ (où G est un autre espace normé). On suppose que les restrictions $f_1 = f|_{F_1} : F_1 \rightarrow G$ et $f_2 = f|_{F_2} : F_2 \rightarrow G$ sont continues. Montrer que f est continue.
2. Cela reste-t-il vrai si on remplace F_1, F_2 par des ouverts Ω_1, Ω_2 ?
3. Et si F_1, F_2 sont quelconques ?
4. Montrer que la fonction $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $K(s, t) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si } t < s \\ s(1-t) & \text{si } t \geq s \end{cases}$ est continue.

Corrigé de l'exercice 18

1. Le plus simple est d'utiliser la caractérisation ensembliste de la continuité, en montrant que l'image réciproque par f de tout fermé de G est un fermé de E . Soit donc Y un fermé de G . Puisque $E = F_1 \cup F_2$, on a

$$f^{-1}(Y) = \{x \in E, f(x) \in Y\} = \{x \in F_1, f_1(x) \in Y\} \cup \{x \in F_2, f_2(x) \in Y\} = f_1^{-1}(Y) \cup f_2^{-1}(Y).$$

Puisque f_1 et f_2 sont continues, les ensembles $f_1^{-1}(Y)$ et $f_2^{-1}(Y)$ sont des fermés relatifs à F_1 et F_2 , donc il existe F_3, F_4 fermés dans E tels que

$$f_1^{-1}(Y) = F_1 \cap F_3, \quad f_2^{-1}(Y) = F_2 \cap F_4,$$

et donc $f_1^{-1}(Y)$ et $f_2^{-1}(Y)$ sont des fermés de E (comme intersection de fermés de E). Par réunion finie, on en déduit que $f^{-1}(Y)$ est un fermé de E , donc f est continue.

2. Oui, même raisonnement avec des réunions/intersection d'ouverts.
3. Non. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaut 0 sur $F_1 =]-\infty, 0]$ (fermé) et 1 sur $F_2 =]0, +\infty[$ (ouvert) est discontinue en 0, et pourtant les deux restrictions f_1, f_2 sont continues (car constantes).
4. Pour éviter de s'embêter avec des topologies relatives et pouvoir appliquer directement la question 1., on va plutôt montrer que le prolongement

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, t) & \longmapsto \begin{cases} t(1-s) & \text{si } t < s \\ s(1-t) & \text{si } t \geq s \end{cases} \end{cases}$$

est continu (et le résultat s'en déduira pour K par restriction à $[0, 1]^2$).

Notons donc

$$F_1 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2, t \leq s\}, \quad F_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2, t \geq s\}.$$

Ces deux parties sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ (facile par caractérisation ensembliste : $F_1 = g^{-1}(]-\infty, 0])$ et $F_2 = g^{-1}([0, +\infty[)$, où $g : (s, t) \mapsto t - s$ est continue sur $\mathbb{R}^2$), et leur réunion (non disjointe) forme $\mathbb{R}^2$. Examinons les restrictions de f à ces deux parties :

- $f_2 = f|_{F_2}$ est clairement continue car $f_2 : (s, t) \mapsto s(1-t)$, donc f_2 est la restriction à F_2 de la fonction polynomiale $p_2 : (s, t) \mapsto s(1-t)$ continue sur tout $\mathbb{R}^2$.
- Pour f_1 , le même raisonnement fonctionne car $f_1(s, t) = t(1-s)$ si $t < s$ mais aussi si $t = s$ (car $f(t, t) = t(1-t)$ par définition de f). On a donc $f_1 : (s, t) \mapsto t(1-s)$ continue sur F_2 .

D'après la question 1., on en déduit la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$, et donc celle de K sur $[0, 1]^2$.

III Applications linéaires continues**Exercice 19 (*Calcul de norme triple)**

Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des suites bornées de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$, que l'on munit de $\|\cdot\|_\infty$.

On considère l'endomorphisme $\Delta : \begin{cases} \ell^\infty(\mathbb{C}) & \longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{C}) \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto \Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$.
Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}_c(E, E)$ et calculer $\|\Delta\|$.

Corrigé de l'exercice 19

- Déjà, $\Delta : E \rightarrow E$ est bien définie car si u est une suite bornée, alors $\Delta(u)$ aussi puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\Delta(u)_n| = |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2\|u\|_\infty.$$

- Soit $(\lambda, u, v) \in \mathbb{C} \times E \times E$. On a :

$$\Delta(\lambda u + v) = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1} - \lambda u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_{n+1} - v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda\Delta(u) + \Delta(v),$$

donc Δ est un endomorphisme de E .

- D'après le premier point, on a l'inégalité linéaire

$$\forall u \in E, \quad \|\Delta(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty$$

ce qui montre que Δ est continue et $\|\Delta\| \leq 2$.

De plus, avec la suite $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $u \in E$, $\|u\|_\infty = 1$ et

$$\|\Delta(u)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |2(-1)^{n+1}| = 2 = 2\|u\|_\infty,$$

donc la constante $C = 2$ est bien optimale dans l'inégalité linéaire.

En conclusion, $\Delta \in \mathcal{L}_c(E, E)$ et $\|\Delta\| = 2$.

Exercice 20 (**Applications entre polynômes)

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme N définie par

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \implies N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|.$$

- L'application $\varphi : P \mapsto P(X+1)$ est-elle continue ? Si oui, calculer $\|\varphi\|$.
- Pour $A \in E$ fixé, $\psi : P \mapsto AP$ est-elle continue ? Si oui, calculer $\|\psi\|$.

Corrigé de l'exercice 20

- On remarque que $\varphi \in \mathcal{L}(E, E)$ (par linéarité de l'évaluation), donc φ est continue si et seulement si

$$(*) \quad \exists C > 0, \forall P \in E, \quad N(\varphi(P)) \leq CN(P).$$

Examinons ce qui se passe avec la suite des monômes $P_n = X^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$). On a

$$\varphi(P_n) = (X+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k,$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $N(\varphi(P_n)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Vu que $N(P_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité linéaire $(*)$ est impossible car elle entraînerait

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \leq C,$$

ce qui est absurde (la suite (2^n) n'est pas bornée). Ainsi, l'endomorphisme φ n'est pas continu.

- On remarque que $\psi \in \mathcal{L}(E, E)$ (par bilinéarité du produit de deux polynômes). Notons

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, \quad P = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k X^k$$

(sommes finies car les suites de coefficients (a_k) et (x_k) sont presque nulles). Par définition du produit de deux polynômes, on a

$$\psi(P) = AP = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^k a_p x_{k-p} \right) X^k,$$

donc

$$N(\psi(P)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \sum_{p=0}^k a_p x_{k-p} \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^k |a_p| |x_{k-p}| = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{k=p}^{+\infty} |a_p| |x_{k-p}|,$$

en permutant les deux sommes (on peut car la somme est en réalité finie, mais de toute façon on peut travailler dans $[0, +\infty]$ avec des séries à termes positifs). D'où l'inégalité :

$$N(\psi(P)) \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=p}^{+\infty} |x_{k-p}| \right)}_{=N(P)} |a_p| = N(A)N(P),$$

qui montre que ψ est continue et $\|\psi\| \leq N(A)$.

Enfin, le polynôme $P = 1$ réalise l'égalité :

$$\psi(1) = A \text{ donc } N(\psi(1)) = N(A) = N(A)N(1),$$

donc $\|\psi\| = N(A)$.

Exercice 21 (**Normes polynomiales)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose, pour $P \in E$:

$$N_1(P) = \sup\{|P(x)|, x \in [0, 1]\}, \quad N_2(P) = \sup\{|P(x)|, x \in [1, 2]\}.$$

On définit enfin la forme linéaire $\phi : P \in E \mapsto P(0) \in \mathbb{R}$ et on munit $\mathbb{R}$ de la valeur absolue.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E .
2. Montrer que ϕ est une application linéaire continue sur (E, N_1) et calculer $\|\phi\|$.
3. Montrer que ϕ n'est pas continue sur (E, N_2) (en considérant $P_n(X) = (1 - X/2)^n$).
4. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?
5. Soit $\mathcal{O} = \{P \in E, P(0) \neq 0\}$.
Montrer que $\mathcal{O}$ est un ouvert de l'evn (E, N_1) , mais pas un ouvert de (E, N_2) .
Indication : considérer $1 - P_n$.

Corrigé de l'exercice 21

1. Voir la question 1. de l'exercice 5.
2. On a l'inégalité linéaire :

$$\forall P \in E, \quad |\phi(P)| = |P(0)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |P| = N_1(P),$$

donc ϕ est continue par rapport à la norme N_1 et $\|\phi\| \leq 1$.

De plus, avec $P = 1$, on a $|\phi(P)| = 1 = N_1(P)$, donc $\|\phi\| = 1$.

3. La suite $(P_n) = (1 - X/2)^n$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$N_2(P_n) = \sup_{x \in [1,2]} |1 - x/2|^n = \sup_{x \in [1,2]} (1 - x/2)^n = (1/2)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

donc la suite (P_n) tend vers 0_E dans l'evn (E, N_2) .

Mais pour la suite image :

$$\phi(P_n) = P_n(0) = 1 \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = \phi(0_E),$$

donc ϕ n'est pas continue en 0, ce qui montre que ϕ n'est pas continue par rapport à la norme N_2 .

4. N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, car $\phi : (E, N_1) \rightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ est continue, alors que $\phi : (E, N_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ ne l'est pas.

5. On a $\mathcal{O} = \phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Comme $\phi : (E, N_1) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue et comme $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (comme réunion de deux intervalles ouverts), on en déduit que $\mathcal{O}$ est un ouvert de l'evn (E, N_1) . En revanche, $\mathcal{O}$ n'est pas un ouvert de (E, N_2) car son complémentaire $Y = \{P \in E, P(0) = 0\}$ n'est pas fermé dans (E, N_2) . En effet, la suite $(Q_n) = (1 - P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans Y (vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(0) = 1 - P_n(0) = 0$), converge vers le polynôme 1 pour la norme N_2 (car $N_2(1 - Q_n) = N_2(P_n) \rightarrow 0$ comme montré en 3.), mais $1 \notin Y$.

Exercice 22 (Calcul de norme triple 2)**

Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On munit $\mathbb{R}$ de la valeur absolue.

On définit, pour $f \in E$:

$$\phi(f) = \int_0^1 f(t)dt - \int_{-1}^0 f(t)dt.$$

1. Montrer que ϕ est une forme linéaire continue sur E , et que $\|\phi\| = 2$.
2. Existe-il $f \in E$ de norme 1 tel que $|\phi(f)| = 2$?

Corrigé de l'exercice 22

1.
 - L'application $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie car toute fonction continue sur $[-1, 1]$ est intégrable sur tout segment de $[-1, 1]$.
 - La linéarité de ϕ est évidente par linéarité de l'intégrale, ϕ est donc bien une forme linéaire sur E .
 - Ensuite, on obtient facilement l'inégalité linéaire :

$$\forall f \in E, \quad |\phi(f)| \leq \int_0^1 |f| + \int_{-1}^0 |f| = \int_{-1}^1 |f| \leq \int_{-1}^1 \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty,$$

donc ϕ est continue et $\|\phi\| \leq 2$.

- Montrons maintenant que $C = 2$ est la constante optimale dans l'inégalité linéaire. La question 2. suggère qu'il est inutile de chercher une fonction f non nulle qui réalisera l'égalité $|\phi(f)| = 2\|f\|_\infty$. On doit établir que

$$\sup_{f \in E \setminus \{0_E\}} \frac{|\phi(f)|}{\|f\|_\infty} = 2.$$

Pour cela, il suffit de montrer que le majorant $C = 2$ est adhérent à l'ensemble qu'il majore, en construisant une suite $(f_n) \in E^\mathbb{N}$ telle que $\frac{|\phi(f_n)|}{\|f_n\|_\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$, ou (cela revient au même par homogénéité), une suite $(f_n) \in E^\mathbb{N}$ telle que $\|f_n\|_\infty = 1$ et $|\phi(f_n)| \rightarrow 2$.

L'idée est la suivante : la "fonction signe" $\varepsilon : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (qui vaut -1 sur $[-1, 0]$, 1 sur $]0, 1]$ et 0 en 0) vérifie bien $\|\varepsilon\|_\infty = 1$ et $|\phi(\varepsilon)| = \int_0^1 1dt - \int_{-1}^0 (-1)dt = 2$, mais elle est discontinue en 0 , donc pas dans E . On va donc approcher ε par une suite de fonctions continues de sorte à ne pas trop modifier l'aire sous la courbe. En faisant un dessin, on considère l'approximation affine par morceaux :

$$\forall n \geq 1, \quad f_n : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{cases} \quad f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < -\frac{1}{n} \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues et impaires, et on a $\|f_n\|_\infty = 1$, ainsi que

$$\forall n \geq 1, \quad |\phi(f_n)| = 2 \int_0^1 f_n = 2 \left(\frac{1}{2n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2.$$

(somme des aires d'un triangle et d'un rectangle).

On conclut que $\|\phi\| = 2$.

2. Supposons que $\|f\|_\infty = 1$ et $|\phi(f)| = 2$, avec $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On a alors

$$\int_0^1 f - \int_{-1}^0 f = 2 = \int_0^1 1 - \int_{-1}^0 (-1),$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 (1-f) + \int_{-1}^0 (1+f) = 0.$$

Vu que les fonctions $1-f$ et $1+f$ sont continues sur $[-1, 1]$ et positives (étant donné que $-1 \leq f \leq 1$ par hypothèse), les deux intégrales sont positives de somme nulle, donc

$$\int_0^1 (1-f) = \int_{-1}^0 (1+f) = 0.$$

On en déduit alors (par continuité et positivité des deux intégrandes sur les deux segments) que $1-f=0$ sur $[0, 1]$ et $1+f=0$ sur $[-1, 0]$, ce qui est impossible ($f(0)$ serait alors égal à 1 et -1 à la fois). Donc il n'existe pas de $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $\phi(f) = 2$.

Il n'existe pas non plus de $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $\phi(f) = -2$, sinon $-f$ nous ramènerait au cas précédent.

En conclusion, il n'existe pas de $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $|\phi(f)| = 2$.

Exercice 23 (**Calcul explicite des normes matricielles 1 et ∞)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer les normes subordonnées $\|A\|_1$ et $\|A\|_\infty$ en fonction des coefficients $a_{i,j}$ de A .

Corrigé de l'exercice 23

Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ (que l'on identifie à un vecteur colonne).

- On a

$$\|AX\|_1 = \sum_{i=1}^n |(AX)_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) |x_j| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) \|X\|_1,$$

donc f_A est bien continu pour la norme 1 et on a

$$\|A\|_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| = \max_{1 \leq j \leq n} \|C_j(A)\|_1$$

(où $C_j(A)$ désigne la j^e colonne de A).

En fait, on a

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|C_j(A)\|_1.$$

En effet, en notant j_0 l'indice de $[1, n]$ tel que

$$\|C_{j_0}(A)\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|C_j(A)\|_1,$$

et $X_0 = e_{j_0}$ le j_0^e vecteur de la base canonique, on a $\|X_0\|_1 = 1$, et

$$\|AX_0\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} \delta_{j,j_0} \right| = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}| = \|C_{j_0}(A)\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|C_j(A)\|_1 \|X_0\|_1,$$

donc $\max_{1 \leq j \leq n} \|C_j(A)\|_1$ est bien la constante optimale.

- On a

$$\|AX\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |(AX)_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \|X\|_\infty,$$

donc f_A est bien continu pour la norme ∞ et on a

$$\|A\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i(A)\|_1$$

(où $L_i(A)$ désigne la i^e ligne de A).

En fait, on a

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i(A)\|_1.$$

En effet, en notant i_0 l'indice de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$\|L_{i_0}(A)\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i(A)\|_1,$$

et $X_0 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|}$ si $a_{i_0,j} \neq 0$ et $\varepsilon_j = 1$ sinon, on a $\|X_0\|_\infty = 1$ (puisque $|\varepsilon_j| = 1$ pour tout j), et

$$\|AX_0\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} \varepsilon_j \right|.$$

Vu que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} \varepsilon_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \|L_i(A)\|_1 \leq \|L_{i_0}(A)\|_1, \quad \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \varepsilon_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = \|L_{i_0}(A)\|_1,$$

on en déduit que

$$\|AX_0\|_\infty = \|L_{i_0}(A)\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i(A)\|_1 \|X_0\|_\infty.$$

Donc $\max_{1 \leq i \leq n} \|L_i(A)\|_1$ est bien la constante optimale.

Exercice 24 (**Un autre critère de continuité)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Montrer que f est continue ssi pour toute suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \rightarrow 0_E$, $(f(u_n))$ est bornée.

Corrigé de l'exercice 24

$\Rightarrow$ Si f est continue et si $u_n \rightarrow 0_E$, alors $f(u_n) \rightarrow f(0_E) = 0_F$, donc $(f(u_n))$ est bornée (toute suite convergente est bornée).

$\Leftarrow$ Supposons que f vérifie la propriété

$$\forall u \in E^{\mathbb{N}}, \quad (u_n \rightarrow 0_E \implies (f(u_n)) \text{ bornée}),$$

et montrons que f est continue en 0_E (cela suffira à établir la continuité de f sur tout E puisque f est linéaire).

Si f était discontinue en 0_E , cela signifierait

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in E, \|x\|_E \leq \delta \text{ et } \|f(x)\|_F > \varepsilon.$$

En particulier, pour tout entier $n \geq 1$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\|_E \leq \frac{1}{n}$ et $\|f(x_n)\|_F > \varepsilon$.

La suite $(u_n) = (\sqrt{n}x_n)$ vérifie alors :

$$\|u_n\|_E \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad \|f(u_n)\|_F > \varepsilon \sqrt{n} \rightarrow +\infty,$$

(par linéarité de f) ce qui contredit la propriété supposée.

Donc f est continue en 0 , et par suite, $f : E \rightarrow F$ est continue.