Exercices du CH07 : Topologie des espaces vectoriels normés

Exercices de la banque INP à étudier : ex 13 (compacité), 34 (adhérence d'un sev, d'un convexe), 35 (caractérisation séquentielle de la continuité), 36 (caractérisation de la continuité des applications linéaires), 37 (non équivalences de normes), 38 (normes triples), 39 (suites de carré sommables), 44 (adhérence d'une réunion, d'une intersection), 45 (convexité et distance), 54 (application linéaire définie par une série)

I Notions générales de topologie

Exercice 1 (*Ouverts ? Fermés ?)
Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$:

1. La partie $\mathbb{Z}$ est-elle ouverte ? fermée ?
2. Même question avec $\mathbb{Q}$.
3. Même question avec $X = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 2 (Intersection de parties denses)**
Soient A et B deux parties denses d'un espace vectoriel normé E.

1. On suppose la partie A ouverte. Montrer que $A \cap B$ est une partie dense.
2. Et si A n'est plus supposée ouverte ?

Exercice 3 (Propriétés ensemblistes de l'intérieur et de l'adhérence)**
Soit A et B des parties d'un espace vectoriel normé E :

1. Comparer $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.
2. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.
3. Comparer $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ et $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.
4. Comparer $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B}$.

Exercice 4 (*Réunion de boules ouvertes)
Démontrer que toute partie ouverte d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé peut s'écrire comme une réunion de boules ouvertes.

Exercice 5 (*Orthogonal d'une partie)
Soit E un espace préhilbertien réel et A une partie de E.
Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

Exercice 6 (Densité et polynômes)**

1. Vérifier que l'application $N : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par
$$N(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$$
est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(2) = 0\}$ est dense dans $(\mathbb{R}[X], N)$.
3. Est-ce encore vrai pour l'ensemble $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(1) = 0\}$?

Exercice 7 (Intérieur d'un sev)**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Montrer que si F est un sous-espace vectoriel strict de E (c'est-à-dire $F \neq E$), alors F est d'intérieur vide.

Exercice 8 (*Fonction adhérente)
On note $E = \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_1$, et on considère :

$$A = \{f \in E,\ f(0) = 0\}.$$

Montrer que la fonction constante égale à 1 est adhérente à l'ensemble A.

Exercice 9 (Fonctions de signe constant)**
On note $E = \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$.

1. Montrer que $F = \{f \in E,\ \forall x \in [0;1],\ f(x) \geq 0\}$ est un fermé de E.
2. Montrer que $U = \{f \in E,\ \forall x \in [0;1],\ f(x) > 0\}$ est un ouvert de E.

Exercice 10 (*Adhérence et intérieur d'un sev de fonctions)**
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On note F le sev de E formé par les fonctions s'annulant en 0 et en 1. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de F pour les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$.

Exercice 11 (Valeurs d'adhérence d'une suite)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E. On note $Adh(u)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence (c'est-à-dire l'ensemble des limites des suites extraites de u).
Montrer que $Adh(u) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k,\ k \geq n\}}$ et en déduire que $Adh(u)$ est fermé.

Exercice 12 (*Sous-groupes de $\mathbb{R}$)**
Démontrer que les sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ sont soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, soit denses dans $\mathbb{R}$.
Indication : de manière analogue à l'étude des sous-groupes de $\mathbb{Z}$, on se donnera un sous-groupe G de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ et on justifiera l'existence de $a = \inf(G\cap]0,+\infty[)$. Enfin on discutera selon si $a > 0$ ou $a = 0$.

II Limites et continuité

Exercice 13 (*Exemples d'étude de continuité)
Les applications suivantes sont-elles continues en $(0,0)$?

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right. ,$$

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Exercice 14 (*Image continue d'une partie dense)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application continue et surjective. Montrer que si A est une partie dense dans E, alors $f(A)$ est dense dans F.

Exercice 15 (Fonction à image rationnelle / irrationnelle)**

1. Que dire d'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $Im(f) \subset \mathbb{Q}$? et telle que $Im(f) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?
2. Existe-t-il une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que l'image de tout rationnel soit un irrationnel et telle que l'image de tout irrationnel soit un rationnel ?

Exercice 16 (Condition suffisante d'uniforme continuité)**
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application continue et admettant une limite finie en $+\infty$.
Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 17 (Caractère lipschitzien de l'inf)**
Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.
Montrer que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \inf\limits_{t \in [0,1]} f(t) \end{array} \right.$ est bien définie et lipschitzienne.

III Applications linéaires continues

Exercice 18 (*Calcul de norme triple)
Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$, que l'on munit de $\|.\|_\infty$.
On considère l'endomorphisme $\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \ell^\infty(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \ell^\infty(\mathbb{C}) \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array} \right.$.
Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}_c(E, E)$ et calculer $|||\Delta|||$.

Exercice 19 (Applications entre polynômes)**
On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme N définie par

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \implies N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|.$$

1. L'application $\varphi : P \mapsto P(X+1)$ est-elle continue ? Si oui, calculer $|||\varphi|||$.
2. Pour $A \in E$ fixé, $\psi : P \mapsto AP$ est-elle continue ? Si oui, calculer $|||\psi|||$.

Exercice 20 (Normes polynomiales)**
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose, pour $P \in E$:

$$N_1(P) = \sup\{|P(x)|, x \in [0,1]\}, \qquad N_2(P) = \sup\{|P(x)|, x \in [1,2]\}.$$

On définit enfin la forme linéaire $\phi : P \in E \mapsto P(0) \in \mathbb{R}$ et on munit $\mathbb{R}$ de la valeur absolue.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Montrer que ϕ est une application linéaire continue sur (E, N_1) et calculer $|||\phi|||$.
3. Montrer que ϕ n'est pas continue sur (E, N_2) (en considérant $P_n(X) = (1 - X/2)^n$).
4. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?
5. Soit $\mathcal{O} = \{P \in E, \ P(0) \neq 0\}$.
   Montrer que $\mathcal{O}$ est un ouvert de l'evn (E, N_1), mais pas un ouvert de (E, N_2).
   Indication : considérer $1 - P_n$.

Exercice 21 (*Calcul de norme triple 2)**
Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$. On munit $\mathbb{R}$ de la valeur absolue.
On définit, pour $f \in E$:

$$\phi(f) = \int_0^1 f(t)dt - \int_{-1}^0 f(t)dt.$$

1. Montrer que ϕ est une forme linéaire continue sur E, et que $|||\phi||| = 2$.
2. Existe-il $f \in E$ de norme 1 tel que $|\phi(f)| = 2$?

Exercice 22 (Calcul explicite des normes matricielles 1 et ∞)**
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer les normes subordonnées $|||A|||_1$ et $|||A|||_\infty$ en fonction des coefficients $a_{i,j}$ de A.

Exercice 23 (Un autre critère de continuité)**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que f est continue ssi pour toute suite $(u_n) \in E^\mathbb{N}$ telle que $u_n \to 0_E$, $\big(f(u_n)\big)$ est bornée.

IV Compacité

Exercice 24 (*Somme d'un fermé et d'un compact)
Soient (E, N) un espace vectoriel normé, A et B deux parties de E.
Montrer que si A est fermé et B est compact, alors $A + B = \{a + b,\ (a, b) \in A \times B\}$ est fermé.

Exercice 25 (Compact inclus dans une boule)**
Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E, incluse dans la boule unité ouverte.
Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que $K \subset B_f(0_E, r)$.

Exercice 26 (Zéros d'une surjection continue)**
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective.
Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est un fermé de cardinal infini.
On pourra illustrer par un dessin !

Exercice 27 (*Un théorème de point fixe)**
Soit A une partie compacte d'un $\mathbb{K}$-evn E et $f : A \to A$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in A^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que f possède un unique point fixe.
   Pour l'existence, on pourra considérer l'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|f(x) - x\| \end{array} \right.$.
2. Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'elle converge vers l'unique point fixe de f.

Exercice 28 (*Suite convergente et compacité)**
Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente quelconque d'un $\mathbb{K}$-evn E, et si $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ alors $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

V Connexité par arcs

Exercice 29 (*Réunion de deux connexes par arcs)
Prouver que la réunion de deux connexes par arcs non disjoints est un connexe par arcs.

Exercice 30 (Homéomorphismes)**
On dit que deux parties A et B de deux espaces vectoriels normés E et F sont **homéomorphes** lorsqu'il existe une bijection $f : A \to B$ telle que f et f^{-1} soient continues (une telle bijection est alors appelée **homéomorphisme**).

1. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est connexe par arcs.
2. Démontrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
3. Démontrer que $[0, 1]$ et le cercle trigonométrique ne sont pas homéomorphes.

Exercice 31 (Injection continue)**

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective.
   En considérant $D = \{(x, y) \in I^2,\ x < y\}$ et $h : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(y) - f(x) \end{array} \right.$, démontrer que f est strictement monotone.
2. Existe-t-il une fonction $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \circ f = -Id_{\mathbb{R}}$? Justifier.

Exercice 32 (Etude de la connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{K})$)**

1. Démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

VI Dimension finie

Exercice 33 (*Etude de la topologie de parties du plan)
Les parties suivantes sont-elles ouvertes ? fermées ? bornées ? compactes ?

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy < x+y\}$.
2. $B = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z^2) \leq 1\}$.
3. $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-1)^2 + y^2 < 1 \text{ et } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{16}\right\}$.

Exercice 34 (*Un convexe compact)
Prouver que la partie $K = \left\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\}$ est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 35 (Topologie des matrices diagonales)**
Déterminer les propriétés topologiques (fermé ? ouvert ? borné ? compact ? connexe par arcs ?) de l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 36 (*Adhérence des matrices de rang donné)**
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $r \in [\![0, n]\!]$, on note $J_r(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r.

1. Montrer que $\bigcup\limits_{k=0}^{r} J_k(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\overline{J_r(\mathbb{K})} = \bigcup\limits_{k=0}^{r} J_k(\mathbb{K})$.
3. En déduire que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Déterminer $\overset{\circ}{\widehat{J_r(\mathbb{K})}}$.

Exercice 37 (Existence d'une norme sous-multiplicative)**
Soit $(E, +, \cdot, \times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie.
En considérant l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x \times y \end{array} \right.$, montrer qu'il existe une norme N sur E qui soit sous-multiplicative, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ N(x \times y) \leq N(x)N(y).$$

Exercice 38 (Généralisation du théorème des segments emboîtés)**
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides et bornés d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On suppose que $\delta(F_n) \to 0$, où l'on note $\delta(F_n) = \sup\limits_{(x,y)\in F_n^2} \|y - x\|$.
Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.