

Exercices du CH06 : Espaces préhilbertiens et groupe orthogonal

Exercices de la banque INP à étudier : ex 76 (inégalité de Cauchy-Schwarz), 77 (relations d'orthogonalité), 78 (propriétés des isométries vectorielles), 79 (produit scalaire intégral), 80 (calcul de projeté orthogonal avec fonctions trigo), 81, 82 (calcul de distance avec des matrices 2×2), 92 (matrices symétriques et antisymétriques)

I Révisions espaces préhilbertiens

Exercice 1 (*Une inégalité)

Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p} \right)^2.$$

Corrigé de l'exercice 1

Soit $n \geq 2$. On va utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^{n-1} muni de son produit scalaire canonique, avec les vecteurs $u = (\sqrt{p})_{1 \leq p \leq n-1}$ et $v = \left(\frac{\sqrt{p}}{n-p}\right)_{1 \leq p \leq n-1}$.

$$\left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p} \right)^2 = (u|v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2 = \left(\sum_{p=1}^{n-1} p \right) \times \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \right) = \frac{n(n-1)}{2} \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \right),$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Exercice 2 (*Gram-Schmidt dans \mathbb{R}^4)

On considère \mathbb{R}^4 muni de son produit scalaire canonique et F l'ensemble défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + 3z - t = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et en déterminer une base \mathcal{B} .
2. Grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base \mathcal{B} , construire une base orthonormée de F .

Corrigé de l'exercice 2

1. On remarque que :

$$F = \{(y - 3z + t, y, z, t) / (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)).$$

La famille $(u_1, u_2, u_3) = ((1, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$ est donc une famille génératrice de F qui est donc bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

On montre facilement que cette famille est aussi libre. Donc $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de F .

2. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base \mathcal{B} .

- On pose $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- On pose $\tilde{v}_2 = u_2 - (u_2|v_1)v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis $v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• On pose $\tilde{v}_3 = u_3 - (u_3|v_1)v_1 - (u_3|v_2)v_2 = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$ puis

$$v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{132}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{33}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) est une base orthonormée du sous-espace vectoriel F .

Exercice 3 (*Projection et symétrie orthogonales)

On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel et le sous-espace vectoriel

$$F = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

1. Déterminer une base orthonormale de F .
2. Déterminer une base orthonormale de F^\perp .
3. Calculer l'expression de $p_F(x)$, la projection orthogonale d'un vecteur x quelconque sur F .
4. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, calculer $d(x, F)$.
5. Écrire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale s_F par rapport à F .

Corrigé de l'exercice 3

1. Facilement, on obtient que la famille

$$u_1 = (1, -1, 0), \quad u_2 = (1, 0, -1)$$

est une base de F . En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à (u_1, u_2) , on obtient une base orthonormée (v_1, v_2) de F :

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0).$$

$$\tilde{v}_2 = u_2 - (u_2|v_1)v_1 = (1, 0, -1) - \frac{1}{2}(1, -1, 0) = \frac{1}{2}(1, 1, -2),$$

$$v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Finalement, $(v_1, v_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2))$ est une BON de F .

2. On a $\dim(F^\perp) = 3 - \dim(F) = 1$, donc il suffit de trouver un vecteur unitaire et orthogonal au plan F pour avoir une base orthonormée de la droite F^\perp . Vue l'équation cartésienne de F , le vecteur $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ convient (son opposé aussi d'ailleurs, et ce sont les deux seuls choix possibles).

Sinon, puisqu'on est dans \mathbb{R}^3 , on peut utiliser le produit vectoriel ... (le vecteur $v_3 = v_1 \wedge v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ convient).

Finalement, $(v_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ est une BON de F^\perp .

3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans \mathbb{R}^3 . Vu que (v_1, v_2) est une BON de F , on a directement :

$$p_F(x) = (x|v_1)v_1 + (x|v_2)v_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}v_1 + \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{\sqrt{6}}v_2,$$

c'est-à-dire

$$p_F(x) = \frac{x_1 - x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Remarque

On peut faire quelques vérifications simples : si $x \in F$ (par exemple $x = (1, -1, 0)$), on a $p_F(x) = x$. Et si $x \in F^\perp$ (par exemple $x = (1, 1, 1)$), on a $p_F(x) = \vec{0}$.

On peut vérifier aussi que $p_F \circ p_F = p_F$.

4. Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans \mathbb{R}^3 . On a :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|.$$

On peut calculer cette quantité directement à partir de l'expression de $p_F(x)$ précédemment déterminée :

$$x - p_F(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$d(x, F) = \frac{|x_1 + x_2 + x_3|}{\sqrt{3}}.$$

Ou alors on utilise la BON (v_3) de F^\perp :

$$p_{F^\perp}(x) = (x|v_3)v_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}}v_3,$$

ce qui conduit au même résultat :

$$d(x, F) = \left\| \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}}v_3 \right\| = \frac{|x_1 + x_2 + x_3|}{\sqrt{3}}.$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a, par définition d'une symétrie orthogonale :

$$s_F(x) = p_F(x) - p_{F^\perp}(x) = 2p_F(x) - x.$$

Donc, en notant \mathcal{B}_0 la base canonique de \mathbb{R}^3 , on a

$$Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = 2Mat_{\mathcal{B}}(p_F) - I_3 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Noyau et image)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer $Ker(A)$ et $Ker(A^\top A)$ puis $Im(A)$ et $Im(AA^\top)$.

Corrigé de l'exercice 4

- Si $x \in \mathbb{R}^n$, alors

$$x \in Ker(A) \iff Ax = 0 \implies A^\top Ax = A^\top 0 = 0 \implies x \in Ker(A^\top A),$$

ce qui montre que $Ker(A) \subset Ker(A^\top A)$.

Réciproquement :

$$x \in Ker(A^\top A) \implies \|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = (Ax)^\top (Ax) = x^\top \underbrace{(A^\top Ax)}_{=0} = 0 \implies Ax = 0,$$

donc $Ker(A^\top A) \subset Ker(A)$.

Finalement, on a l'égalité

$$Ker(A) = Ker(A^\top A).$$

- Si $y \in \mathbb{R}^n$, alors

$$y \in \text{Im}(AA^\top) \iff \exists x \in \mathbb{R}^n, y = AA^\top x = A(A^\top x) \implies y \in \text{Im}(A),$$

donc $\text{Im}(AA^\top) \subset \text{Im}(A)$.

De plus, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im}(AA^\top)) = n - \dim(\text{Ker}(AA^\top)),$$

et d'après le point précédent :

$$\text{Ker}(AA^\top) = \text{Ker}((A^\top)^\top A^\top) = \text{Ker}(A^\top).$$

Donc

$$\dim(\text{Im}(AA^\top)) = n - \dim(\text{Ker}(A^\top)) = \text{rg}(A^\top) = \text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A)).$$

Finalement, par inclusion et égalité des dimensions, on obtient l'égalité

$$\text{Im}(AA^\top) = \text{Im}(A).$$

Exercice 5 (**Un contre-exemple)

Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

et soit $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

1. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
2. En déduire que $E \neq F \oplus F^\perp$ et que $(F^\perp)^\perp \neq F$.

Corrigé de l'exercice 5

1. Soit $g \in F^\perp$. On a par définition

$$\forall f \in F, \quad \int_0^1 fg = 0. \quad (*)$$

Montrons alors que g est nulle sur $]0, 1[$. Si ce n'est pas le cas, alors il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Quitte à changer g en $-g$ (qui reste dans F^\perp), on peut supposer que $g(x_0) > 0$.

Par continuité de g en x_0 , il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset]0, 1[\quad \text{et} \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \quad g(x) > 0$$

(choisir $\varepsilon = g(x_0)/2$ dans la définition quantifiée de la continuité de g en x_0).

Construisons alors une fonction $f \in F$ qui va contredire la propriété (*). Il suffit de choisir f continue et affine par morceaux telle que

$$f \geq 0, \quad f = 0 \text{ sur } [0, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, 1], \quad f(x_0) = 1$$

(c'est possible, faire un dessin!). Avec une telle fonction, on a $f \in F$ (car f est continue sur $[0, 1]$ et $f(0) = 0$), ainsi que

$$(f|g) = \int_0^1 fg = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} fg > 0,$$

(puisque fg est continue, positive et non nulle sur le segment $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$) ce qui contredit (*). Donc g est la fonction nulle, ce qui montre bien que $F^\perp = \{0\}$.

2. D'où $F \oplus F^\perp = F \oplus \{0\} = F \neq E$ (certaines fonctions continues ne vérifient pas $f(0) = 0$).
De plus, $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E \neq F$.

II Polynômes orthogonaux

Exercice 6 (***) Polynômes de Legendre)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction polynomiale P_n , définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n).$$

Il résulte des conventions habituelles que $P_0(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que le polynôme P_n est de degré n . Quel est le coefficient du terme de degré n dans P_n ?
- (b) Pour quelles valeurs de n la fonction P_n est-elle paire ? impaire ?
- (c) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
2. Soit $n \geq 1$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq m \leq n - 1$, $\int_{-1}^1 P_n(x) x^m dx = 0$.
3. On désigne par \mathcal{E} l'espace préhilbertien réel des fonctions continues de $[-1; 1]$ dans \mathbb{R} muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{E}^2, \quad (u|v) = \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx.$$

- (a) La famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle une famille orthogonale dans \mathcal{E} ?
- (b) Calculer $(P_n|P_n)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
4. (a) Soit $n \geq 1$. Montrer que $\frac{d}{dx} \left((x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx}(x) \right)$ est orthogonal à x^m pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq m \leq n - 1$.
- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est solution de l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n + 1)y = 0.$$

Corrigé de l'exercice 6

1. Fixons $n \in \mathbb{N}$.

- (a) On a $\deg((x^2 - 1)^n) = 2n$, donc par dérivations successives :

$$\deg(P_n) = \deg\left(\frac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n)\right) = 2n - n = n.$$

Le coefficient dominant est alors :

$$cd(P_n) = \frac{1}{2^n n!} \times cd\left(\frac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n)\right) = \frac{1}{2^n n!} \times cd\left(\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n} + R_n)\right),$$

avec $\deg(R_n) < 2n$, donc

$$cd(P_n) = \frac{1}{2^n n!} \times cd\left((2n)(2n - 1) \cdots (n + 1)x^n + R_n^{(n)}\right) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

- (b) La fonction $x \mapsto (x^2 - 1)^n$ est paire, donc puisque la dérivée d'une fonction paire est impaire et réciproquement (très simple à montrer), on obtient par dérivations successives que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

Donc la fonction P_n est paire lorsque n est pair, et impaire lorsque n est impair.

- (c) D'après la formule de dérivation de Leibniz :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \times \frac{d^n}{dx^n} ((x - 1)^n (x + 1)^n) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} ((x - 1)^n) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} ((x + 1)^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^n n!} \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (x-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (x+1)^k \\
&= \frac{1}{2^n} \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k} (x+1)^k.
\end{aligned}$$

Donc en évaluant en $x = 1$, on obtient :

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n} \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 0^{n-k} 2^k = 1,$$

(il ne reste que le terme $k = n$) et par parité/imparité de P_n , on en déduit

$$P_n(-1) = (-1)^n.$$

2. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leq m \leq n-1$. On effectue $m+1$ intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
2^n n! \int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx &= \int_{-1}^1 x^m \frac{d^n}{dx^n} ((x^2-1)^n) dx \\
&= \left[x^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} ((x^2-1)^n) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} (x^m) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} ((x^2-1)^n) dx = \dots \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \left[(-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (x^m) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} ((x^2-1)^n) \right]_{-1}^1 + (-1)^{m+1} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (x^m) \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} ((x^2-1)^n) dx}_{=0},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx = \frac{1}{2^n n!} \times \sum_{k=1}^{m+1} \left[(-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (x^m) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} ((x^2-1)^n) \right]_{-1}^1$$

(cela a bien un sens car $k \in [1, m+1] \implies n-k \in [n-m-1, n-1] \subset [0, n-1]$).

Or, le polynôme $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ possède deux racines de multiplicité n (1 et -1),

donc pour tout entier $k \in [1, m+1]$, le polynôme $\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} ((x^2-1)^n)$ admet 1 et -1 pour racines (puisque $n-k < n$). Donc les crochets des IPP sont nuls, ce qui montre bien que

$$\forall n \geq 1, \forall m \in [0, n-1], \quad \int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx = 0.$$

3. (a) Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k < n$. D'après la question précédente, on a $(P_n | x^m) = 0$ pour tout $m \in [0, n-1]$, donc par linéarité à droite du produit scalaire, on en déduit que $(P_n | Q) = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc en particulier $(P_n | P_k) = 0$, puisque $P_k \in \mathbb{R}_k[X] \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi, par symétrie du produit scalaire, on a $(n \neq k \implies (P_n | P_k) = 0)$, donc la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de \mathcal{E} .

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ (d'après la question précédente), on a

$$(P_n | P_n) = (P_n | cd(P_n)x^n) = cd(P_n) \times (P_n | x^n).$$

(les autres termes donnent des produits scalaires nuls). Si on reprend le calcul de la question 2. avec $m = n$ et n IPP cette fois, on a alors

$$\begin{aligned}
2^n n! \times (P_n | x^n) &= \int_{-1}^1 x^n \frac{d^n}{dx^n} ((x^2-1)^n) dx \\
&= \sum_{k=1}^n \left[(-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (x^n) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} ((x^2-1)^n) \right]_{-1}^1 + (-1)^n \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^n) \times (x^2-1)^n dx}_{=n!}
\end{aligned}$$

$$= (-1)^n n! \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^n dx$$

(les crochets étant nuls), c'est-à-dire

$$(P_n | x^n) = \frac{(-1)^n}{2^n} \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^n dx.$$

En procédant encore par IPP successives (les crochets sont nuls là aussi), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^n dx &= (-1)^n n! \int_{-1}^1 \frac{(x+1)^{2n}}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} dx \\ &= (-1)^n n! \frac{2^{2n+1}}{(n+1)\cdots(2n)(2n+1)} = (-1)^n (n!)^2 \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

donc finalement

$$(P_n | x^n) = \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!},$$

puis en multipliant par $cd(P_n) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$, on obtient

$$(P_n | P_n) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \times \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in [0, n-1]$. Nous avons :

$$\left(\frac{d}{dx} \left((x^2-1) \frac{dP_n}{dx}(x) \right) \mid x^m \right) = \int_{-1}^1 x^m \frac{d}{dx} \left((x^2-1) \frac{dP_n}{dx}(x) \right) dx.$$

Si $m = 0$, cette quantité est évidemment nulle.

Si $m \geq 1$, alors en effectuant deux intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \left((x^2-1) \frac{dP_n}{dx}(x) \right) \mid x^m \right) &= -m \int_{-1}^1 x^{m-1} (x^2-1) \frac{dP_n}{dx}(x) dx \\ &= -m \int_{-1}^1 (x^{m+1} - x^{m-1}) P_n'(x) dx \\ &= +m \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d}{dx} (x^{m+1} - x^{m-1}) dx = m(P_n | Q), \end{aligned}$$

avec $\deg(Q) = m < n$, donc puisque $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$, on a $(P_n | Q) = 0$.

D'où finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in [0, n-1], \quad \left(\frac{d}{dx} \left((x^2-1) \frac{dP_n}{dx}(x) \right) \mid x^m \right) = 0.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$Q_n(x) = \frac{d}{dx} \left((x^2-1) \frac{dP_n}{dx}(x) \right) = 2xP_n'(x) + (x^2-1)P_n''(x).$$

On a $\deg(P_n) = n$, donc $Q_n \in \mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(P_0, \dots, P_n)$ (puisque $\deg(P_k) = k$ pour tout k). Il existe donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x).$$

D'après la question précédente, on a également $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = \text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})^\perp$, donc par orthogonalité de la famille (P_0, \dots, P_n) , on en déduit :

$$\forall m \in [0, n-1], \quad 0 = (Q_n | P_m) = \sum_{k=0}^n \lambda_k (P_k | P_m) = \lambda_m (P_m | P_m),$$

et donc

$$Q_n = \lambda_n P_n.$$

Finalement, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2xP'_n(x) + (x^2 - 1)P''_n(x) = \lambda_n P_n(x),$$

et on détermine λ_n en examinant les coefficients dominants dans cette égalité :

$$\lambda_n \times cd(P_n) = 2n \times cd(P_n) + n(n-1) \times cd(P_n),$$

c'est-à-dire

$$\lambda_n = n(n+1).$$

On a bien montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 - 1)P''_n(x) + 2xP'_n(x) - n(n+1)P_n(x) = 0,$$

et cela reste vrai pour $n = 0$.

Exercice 7 (**Polynômes de Laguerre)

On note E l'ensemble des fonctions réelles f définies et continues sur $[0, +\infty[$ et telles que $t \mapsto e^{-t}(f(t))^2$ est intégrable.

On note F le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles définies sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions polynomiales de degré $\leq n$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^n e^{-t} \end{cases}$ et $L_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^t \varphi_n^{(n)}(t) \end{cases}$.

1. Soit $(f, g) \in E^2$. Montrer que $t \mapsto e^{-t}f(t)g(t)$ est intégrable.
2. Montrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel et que $(f|g) = \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .
3. Vérifier rapidement que F est un sous-espace vectoriel de E .
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que L_n est un élément de F . On précisera le degré de L_n et le coefficient $a_{n,k}$ de t^k dans l'expression de L_n .
5. Expliciter L_0 et L_1 .
6. Montrer que pour $k < n$, $\varphi_n^{(k)}(0) = 0$.
7. Calculer, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $(L_n|L_m)$.
8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(\frac{1}{k!}L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de F_n .
9. Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - (at + b))^2 dt$.

Corrigé de l'exercice 7

Exercice 8 (Polynômes de Hermite)**

On note E l'ensemble des fonctions réelles f définies et continues sur \mathbb{R} et telles que $t \mapsto e^{-t^2} (f(t))^2$ est intégrable.

On note F le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles définies sur \mathbb{R} et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

On définit $w : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x^2} \end{cases}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x) \end{cases}$. En particulier H_0 est la fonction constante égale à 1.

1. Soit $(f, g) \in E^2$. Montrer que $t \mapsto e^{-t^2} f(t)g(t)$ est intégrable.
2. Montrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel et que $(f|g) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .
3. Vérifier rapidement que F est un sous-espace vectoriel de E .
4. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$.
5. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_n est un élément de F . On précisera le degré de H_n et son coefficient dominant.
7. Montrer, pour tout $n \geq 1$ et tout $P \in F$, $(P'|H_{n-1}) = (P|H_n)$.
8. En déduire que, pour tout $n \geq 1$ et tout $P \in F_{n-1}$, $(P|H_n) = 0$.
9. En déduire que (H_0, \dots, H_n) est une base orthogonale de F_n .

Corrigé de l'exercice 8**III Isométries****Exercice 9 (*Un exemple d'isométrie)**

Soit E un espace vectoriel euclidien non réduit à 0. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \phi_x : E &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto y - \frac{2\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x, \end{aligned}$$

où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire sur E .

Montrer que ϕ_x est une isométrie vectorielle et la reconnaître.

Corrigé de l'exercice 9

1. Tout d'abord, ϕ_x est linéaire car pour tous $(y, z) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\phi_x(\lambda y + z) = \lambda y + z - \frac{2\langle x, \lambda y + z \rangle}{\|x\|^2} x = \lambda y + z - \lambda \frac{2\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x - \frac{2\langle x, z \rangle}{\|x\|^2} x = \lambda \phi_x(y) + \phi_x(z).$$

De plus, ϕ_x conserve la norme car pour tout $y \in E$:

$$\begin{aligned} \|\phi_x(y)\|^2 &= \left\| y - \frac{2\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x \right\|^2 = \|y\|^2 - 2 \left\langle \frac{2\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x, y \right\rangle + \left\| \frac{2\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x \right\|^2 \\ &= \|y\|^2 - \frac{4\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} \langle x, y \rangle + 4 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^2} = \|y\|^2, \end{aligned}$$

et donc $\|\phi_x(y)\| = \|y\|$.

Ceci montre que ϕ_x est une isométrie vectorielle.

2. Montrons que ϕ_x est une symétrie :

$$\forall y \in E, \quad (\phi_x \circ \phi_x)(y) = \phi_x \left(y - \frac{2\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x \right) = \phi_x(y) - \frac{2\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} \phi_x(x)$$

Or, $\phi_x(x) = y - \frac{2\langle x, x \rangle}{\|x\|^2}x = x - 2x = -x$, donc

$$(\phi_x \circ \phi_x)(y) = \phi_x(y) + \frac{2\langle x, y \rangle}{\|x\|^2}x = y.$$

On a $\phi_x \circ \phi_x = Id$, donc ϕ_x est une symétrie.

Déterminons ses éléments caractéristiques :

- les éléments de $Ker(\phi_x - Id)$ sont les vecteurs $y \in E$ tels que

$$\phi_x(y) = y \iff -\frac{2\langle x, y \rangle}{\|x\|^2}x = 0 \iff \langle y, x \rangle = 0.$$

On a donc $Ker(\phi_x - Id) = \{x\}^\perp$, c'est l'hyperplan orthogonal à la droite engendrée par x , notons-le H .

- le sous-espace $Ker(\phi_x + Id)$ est un supplémentaire de H dans E (puisque ϕ_x est une symétrie), il s'agit donc d'une droite (E étant de dimension finie). Vu que $\phi_x(x) = -x$, on a $x \in Ker(\phi_x + Id)$, et donc $Ker(\phi_x + Id) = Vect(x)$, il s'agit de la droite orthogonale à H .

Les sous-espaces $Ker(\phi_x - Id)$ et $Ker(\phi_x + Id)$ sont des supplémentaires orthogonaux dans E , donc la symétrie ϕ_x est une symétrie orthogonale.

En conclusion, Φ_x est la réflexion par rapport à l'hyperplan $H = \{x\}^\perp$.

Remarque

On peut faire très rapidement cet exercice si on remarque que $\phi_x = Id - 2p$, où p est la projection orthogonale sur la droite $\mathcal{D} = Vect(x)$. En effet, le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ forme une base orthonormée de \mathcal{D} , donc la projection orthogonale sur \mathcal{D} a pour expression :

$$y \mapsto p(y) = \left\langle y, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \frac{x}{\|x\|} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2}x.$$

En notant $y = y_1 + y_2$ la décomposition d'un vecteur sur la somme directe $E = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp$, on a alors

$$\phi_x(y) = y - 2p(y) = y_1 + y_2 - 2y_1 = -y_1 + y_2,$$

ce qui est bien l'expression de la symétrie par rapport à \mathcal{D}^\perp et parallèlement à \mathcal{D} , c'est-à-dire la réflexion d'hyperplan \mathcal{D}^\perp .

Exercice 10 (*Noyau et image)

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $Ker(f - Id_E) = Im(f - Id_E)^\perp$.

Corrigé de l'exercice 10 — Montrons que $Ker(f - Id_E) \subset Im(f - Id_E)^\perp$.

Soit $\vec{u} \in Ker(f - Id_E)$. On souhaite montrer que $\vec{u} \in Im(f - Id_E)^\perp$.

Pour tout $\vec{y} \in Im(f - Id_E)$, il existe $\vec{w} \in E$ tel que $\vec{y} = f(\vec{w}) - \vec{w}$. On a donc :

$$\langle \vec{u} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{u} | f(\vec{w}) - \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} | f(\vec{w}) \rangle - \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle.$$

Or, $\vec{u} \in Ker(f - Id_E)$ donc $\vec{u} = f(\vec{u})$ et donc $\langle \vec{u} | f(\vec{w}) \rangle = \langle f(\vec{u}) | f(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle$ car f conserve le produit scalaire.

Ainsi, $\langle \vec{u} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle - \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle = 0$ et $\vec{u} \in Im(f - Id_E)^\perp$.

On a bien $Ker(f - Id_E) \subset Im(f - Id_E)^\perp$.

- Montrons que $\dim(Ker(f - Id_E)) = \dim(Im(f - Id_E)^\perp)$.

On sait, d'après le théorème du rang, que $\dim(Ker(f - Id_E)) = \dim(E) - \dim(Im(f - Id_E))$.

De plus, comme E est de dimension finie, $Im(f - Id_E)$ et $Im(f - Id_E)^\perp$ sont supplémentaires donc

$$\dim(Im(f - Id_E)) + \dim(Im(f - Id_E)^\perp) = \dim(E).$$

On a donc bien $\dim(Ker(f - Id_E)) = \dim(Im(f - Id_E)^\perp)$.

Grâce aux deux points précédents on a montré que $Ker(f - Id_E) = Im(f - Id_E)^\perp$.

Exercice 11 (Une isométrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)**

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $f_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{cases}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f_A soit une isométrie vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique (pour rappel il est défini par $(A|B) = \text{Tr}(A^T B)$).

Corrigé de l'exercice 11

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application f_A est linéaire et on a

$$\begin{aligned} f_A \in \mathcal{O}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) &\iff \forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, (f_A(M)|f_A(N)) = (M|N) \\ &\iff \forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, (AM|AN) = (M|N) \\ &\iff \forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \text{Tr}(M^T A^T AN) = \text{Tr}(M^T N). \end{aligned}$$

On remarque alors que la condition $A^T A = I_n$ est suffisante pour que f_A soit une isométrie vectorielle. Voyons maintenant si cette condition est nécessaire.

Si f_A est une isométrie, alors en particulier pour les matrices élémentaires $M = E_{i,j}$ et $N = E_{i',j'}$ (où i, j, i', j' sont dans $[1, n]$), on a

$$(*) \quad (AE_{i,j}|AE_{i',j'}) = (E_{i,j}|E_{i',j'}) = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'},$$

puisque le produit scalaire se calcule à l'aide de la formule :

$$(A|B) = \text{Tr}(A^T B) = \sum_{k,l} a_{k,l} b_{k,l}.$$

En outre, en notant $(a_{i,j})$ les coefficients de A , on a

$$AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,i} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(où la colonne non nulle est en j^e position), donc

$$(AE_{i,j}|AE_{i',j'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq j' \\ \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,i'} & \text{si } j = j'. \end{cases}$$

En choisissant $j = j'$, la relation (*) donne donc :

$$\forall (i, i') \in [1, n]^2, \quad \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,i'} = \delta_{i,i'},$$

c'est-à-dire

$$\forall (i, i') \in [1, n]^2, \quad \langle C_i(A), C_{i'}(A) \rangle = \delta_{i,i'},$$

où $\langle C_i(A), C_{i'}(A) \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de deux colonnes de A . Ainsi, les colonnes de A forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n , et donc A est bien une matrice orthogonale.

Finalement :

$$f_A \in \mathcal{O}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \iff A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

IV Matrices orthogonales**Exercice 12 (*Trace maximale d'une matrice orthogonale)**

Quelle est la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

Corrigé de l'exercice 12

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Du fait que chaque colonne de A est de norme euclidienne 1, on a

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \quad a_{i,j}^2 \leq \sum_{k=1}^n a_{k,j}^2 = \|C_j(A)\|^2 = 1,$$

donc chaque coefficient de A vérifie $|a_{i,j}| \leq 1$.

On en déduit alors que $\text{tr}(A) \leq n$.

Enfin, il existe des matrices orthogonales de trace n (par exemple I_n), donc la trace maximale d'une matrice orthogonale est n .

Exercice 13 (*Somme des coeff. d'une matrice orthogonale)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Soit u une isométrie vectorielle de E et A la matrice de u dans la base \mathcal{B} .

1. Trouver un vecteur $x \in E$ tel que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = (u(x)|x)$.

2. Montrer que $\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$.

Corrigé de l'exercice 13

1. Soit $x \in E$, et $X = (x_1 \cdots x_n)^T$ le vecteur colonne des coordonnées de x dans \mathcal{B} . Les coordonnées de $u(x)$ sont données par le vecteur colonne AX .

Puisque la base \mathcal{B} est orthonormée, on a

$$(u(x)|x) = (AX)^T X = X^T AX = \sum_{i=1}^n x_i (AX)_i = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Le vecteur $x = e_1 + \cdots + e_n$ vérifie alors $x_i = 1$ pour tout i , donc

$$(u(x)|x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}.$$

2. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient alors

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| = |(u(x)|x)| \leq \|u(x)\| \times \|x\| = \|x\|^2$$

(puisque u est une isométrie), et on a $\|x\|^2 = X^T X = n$, donc finalement

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n.$$

Exercice 14 (Matrices orthogonales et triangulaires)**

Quelles sont les matrices triangulaires de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

Corrigé de l'exercice 14

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geq 2$) triangulaire supérieure. On a alors

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. En effectuant un produit par blocs, on a

$$I_n = A^T A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ B^T & M^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda B \\ B^T \lambda & B^T B + M^T M \end{pmatrix},$$

donc en identifiant, $\lambda^2 = 1$, $\lambda B = 0$, $B^T B + M^T M = I_{n-1}$, ce qui amène

$$\lambda = \pm 1, \quad B = 0, \quad M^T M = I_{n-1},$$

c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

avec $M \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. On en déduit facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$(A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ triangulaire supérieure}) \implies (A \text{ diagonale avec les } a_{i,i} = \pm 1).$$

Vu que la transposée d'une matrice orthogonale est aussi orthogonale, la même implication reste vraie pour les matrices orthogonales triangulaires inférieures. Et enfin, les 2^n matrices diagonales obtenues sont bien orthogonales, car leurs colonnes forment bien une base orthonormée de \mathbb{R}^n . Donc finalement :

$$(A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ triangulaire}) \iff (A \text{ diagonale avec les } a_{i,i} = \pm 1).$$

Exercice 15 (***) Matrices orthogonales à coefficients positifs

Déterminer les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

Corrigé de l'exercice 15

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs ou nuls. Vu que les colonnes de A forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n , on a

$$\forall j \neq j', \quad \sum_{i=1}^n a_{i,j} a_{i,j'} = 0,$$

c'est une somme nulle de réels positifs, donc

$$(*) \quad \forall j \neq j', \forall i \in [1, n], \quad a_{i,j} a_{i,j'} = 0.$$

Fixons alors $i \in [1, n]$. La ligne $L_i(A)$ est non nulle (puisque'elle est de norme 1), donc il existe $j \in [1, n]$ tel que $a_{i,j} \neq 0$. La relation (*) montre alors que

$$\forall j' \neq j, \quad a_{i,j'} = 0.$$

Ainsi, le seul coefficient non nul de la ligne $L_i(A)$ est $a_{i,j}$, et il vaut nécessairement 1, puisque $a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 = \|L_i(A)\|^2 = 1$ et puisque $a_{i,j} \geq 0$.

En résumé, pour tout $i \in [1, n]$, il existe $\sigma(i) \in [1, n]$ tel que

$$a_{i,j} = \delta_{j, \sigma(i)}.$$

Cela définit une application $\sigma : \begin{cases} [1, n] & \longrightarrow [1, n] \\ i & \longmapsto \sigma(i) \end{cases}$, qui est nécessairement injective (sinon, A possède deux lignes égales et non nulles, donc non orthogonales, ce qui contredit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$), donc σ est une permutation de S_n . Ainsi,

$$\exists \sigma \in S_n, \quad \forall (i, j) \in [1, n]^2, \quad a_{i,j} = \delta_{j, \sigma(i)}.$$

Réciproquement, toute matrice A de cette forme est bien orthogonale et à coefficients positifs, puisque ses lignes forment une permutation de la base canonique de \mathbb{R}^n , donc une base orthonormée de \mathbb{R}^n . Finalement, les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs sont les "matrices de permutation", c'est-à-dire les matrices $A = (a_{i,j})$ pour lesquelles il existe $\sigma \in S_n$ telles que $\forall (i, j) \in [1, n]$, $a_{i,j} = \delta_{j, \sigma(i)} = \delta_{i, \sigma^{-1}(j)}$ (donc un seul 1 par ligne, mais aussi par colonne, et les autres coefficients nuls).

Remarque

On peut montrer facilement que

$$\varphi : \begin{cases} (S_n, \circ) & \longrightarrow (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times) \\ \sigma & \longmapsto P_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n} \end{cases}$$

est un morphisme de groupes injectif, dont l'image est l'ensemble des matrices de permutation (P_σ est la matrice binaire telle que chaque colonne C_j comporte un seul élément non nul : $P_\sigma[\sigma(j), j] = 1$). Ainsi, les matrices de permutation forment un sous-groupe de $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$, donc de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

On peut également montrer que $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ pour toute permutation $\sigma \in S_n$ (à partir de la formule du déterminant).

Exercice 16 (Commutant de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$)**

Montrer que le commutant de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}I_n$.

C'est-à-dire qu'il faut prouver que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), M\Omega = \Omega M\} = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Corrigé de l'exercice 16

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec toutes les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Montrons que $M \in \mathbb{R}I_n$, c'est-à-dire M est diagonale avec $m_{1,1} = \dots = m_{n,n}$.

1. Méthode "naïve" (à la main par calcul matriciel)

En particulier, M commute avec toutes les matrices de permutations $P_\sigma = (\delta_{j,\sigma(i)})_{1 \leq i,j \leq n}$ vues à l'exercice précédent (ce sont les matrices orthogonales les plus simples). Donc

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \forall \sigma \in S_n, \quad (MP_\sigma)[i, j] = (P_\sigma M)[i, j],$$

c'est-à-dire

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \forall \sigma \in S_n, \quad \sum_{k=1}^n m_{i,k} \delta_{j,\sigma(k)} = \sum_{k=1}^n \delta_{k,\sigma(i)} m_{k,j},$$

ou encore

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \forall \sigma \in S_n, \quad m_{i,\sigma^{-1}(j)} = m_{\sigma(i),j}.$$

En choisissant $\sigma = \tau_{i,j}$ (la transposition qui échange i et j), on obtient

$$i \neq j \implies m_{i,i} = m_{j,j}.$$

Reste à montrer que $m_{i,j} = 0$ lorsque $i \neq j$.

Pour cela, on peut faire appel à d'autres matrices orthogonales simples, en modifiant les matrices de permutation P_σ de la façon suivante :

$$\forall \sigma \in S_n, \quad Q_\sigma = (\varepsilon_i \delta_{j,\sigma(i)})_{1 \leq i,j \leq n}, \quad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}.$$

On a bien $Q_\sigma \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour tout $\sigma \in S_n$ et en reprenant le calcul précédent :

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \forall \sigma \in S_n, \quad \sum_{k=1}^n m_{i,k} \varepsilon_k \delta_{j,\sigma(k)} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_i \delta_{k,\sigma(i)} m_{k,j},$$

et donc

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \forall \sigma \in S_n, \quad \varepsilon_{\sigma^{-1}(j)} m_{i,\sigma^{-1}(j)} = \varepsilon_i m_{\sigma(i),j}.$$

En particulier, avec $\sigma = Id$, $i \neq j$ et $1 = \varepsilon_i = -\varepsilon_j$, on obtient

$$i \neq j \implies m_{i,j} = -m_{i,j} \implies m_{i,j} = 0,$$

donc M est diagonale, avec $m_{1,1} = \dots = m_{n,n}$.

2. Méthode "pro"

On note u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à M . Puisque M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, u commute avec toutes les isométries vectorielles, donc en particulier avec toutes les réflexions de \mathbb{R}^n . Etant donné un vecteur $x \neq 0$, on a, en notant s la réflexion d'hyperplan $\{x\}^\perp$, $u \circ s = s \circ u$, donc puisque $s(x) = -x$, on en déduit

$$s(u(x)) = u(s(x)) = u(-x) = -u(x),$$

donc $u(x) \in \text{Ker}(s + Id) = \text{Vect}(x)$. On a donc montré :

$$\forall x \neq 0, \exists \lambda_x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = \lambda_x x.$$

Reste à montrer que le coefficient λ_x ne dépend pas de x , c'est un exercice classique : soit x, y deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n , on a

$$u(x) = \lambda_x x, \quad u(y) = \lambda_y y,$$

ainsi que

$$\begin{cases} u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y \\ u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y \end{cases},$$

donc si (x, y) est libre, on obtient par identification $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$. Et si (x, y) est liée, alors y est colinéaire à x (ou l'inverse). Si par exemple $y = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (l'autre cas est symétrique), alors

$$\begin{cases} u(y) = \alpha u(x) = \alpha \lambda_x x \\ u(y) = \lambda_y y = \alpha \lambda_y x, \end{cases}$$

donc $\lambda_x = \lambda_y$ également (puisque $\alpha x \neq 0$).

Finalement :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \neq 0, \quad u(x) = \lambda x,$$

et cela reste vrai pour $x = 0$ (vu que $u(0) = 0$), donc $u = \lambda Id$, et $M = \lambda I_n$.

Enfin, les matrices λI_n (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) commutent avec tout élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (et même avec tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), donc le commutant de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}I_n$ (c'est aussi le commutant de tout l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Exercice 17 (**Décomposition QR d'une matrice inversible)

- Justifier que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de passage d'une base orthonormée de \mathbb{R}^n à une base (non nécessairement orthonormée) de \mathbb{R}^n .
- On note $T_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
Dédurre de la question précédente : $\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), \exists Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists R \in T_n^+(\mathbb{R}), M = QR$.

Corrigé de l'exercice 17

- Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n , c'est une base orthonormée de \mathbb{R}^n . En notant u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à M , on a u bijectif, donc $\mathcal{B}' = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base de \mathbb{R}^n . Enfin :

$$M = Mat_{\mathcal{B}}(u) = Mat_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'),$$

donc M est la matrice de passage de la base orthonormée \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .

- Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Avec les notations de la question précédente : notons $\mathcal{B}'' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base orthonormée de \mathbb{R}^n obtenue à partir de la base $\mathcal{B}' = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ par le procédé de Gram-Schmidt. On a

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{u(e_1)}{\|u(e_1)\|}, \\ \forall k \in [1, n-1], \quad \varepsilon_{k+1} &= \frac{u(e_{k+1}) - \sum_{j=1}^k (u(e_{k+1}) | \varepsilon_j) \varepsilon_j}{\|u(e_{k+1}) - \sum_{j=1}^k (u(e_{k+1}) | \varepsilon_j) \varepsilon_j\|}. \end{aligned}$$

D'après ces formules, la matrice de passage $T = Mat_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'')$ est triangulaire supérieure (avec éléments diagonaux strictement positifs).

En outre, la matrice de passage $Q = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')$ est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (puisque les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}'' sont orthonormées).

Enfin :

$$M = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = Mat_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(Id) = Mat_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(Id) \times Mat_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(Id) = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') \times Mat_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}') = QT^{-1},$$

d'où la décomposition voulue en posant $R = T^{-1}$ qui est bien triangulaire supérieure (en tant qu'inverse d'une matrice triangulaire supérieure, exercice classique).

V Dimension 2

Exercice 18 (*Etude de matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$)

Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à chacune des matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 18

- A est une matrice orthogonale car ses colonnes forment une famille orthonormée.
— A n'est pas une matrice symétrique donc f est une rotation d'angle θ tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$

- En conclusion, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ modulo 2π .
- B est une matrice orthogonale car ses colonnes forment une famille orthonormée.
— B est une matrice symétrique donc f est une symétrie orthogonale.
On cherche alors les invariants par f : $f((x, y)) = (x, y) \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = (2 - \sqrt{3})x$.
 $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \{(x, (2 - \sqrt{3})x) / x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 2 - \sqrt{3}))$.
— En conclusion, f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\text{Vect}((1, 2 - \sqrt{3}))$.

Exercice 19 (*Détermination de la matrice d'une rotation/réflexion en dim. 2)

- Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^2 de la rotation vectorielle d'angle $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.
- Déterminer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^2 de la symétrie orthogonale d'axe dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, 2)$.

Corrigé de l'exercice 19

- Lorsque f est une rotation de \mathbb{R}^2 d'angle θ sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée directe est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Donc la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^2 de la rotation d'angle $\arccos(-1/3)$ est la matrice $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$.

- Commençons par former une base orthonormée constituée d'un vecteur de l'axe et d'un vecteur de l'orthogonal de l'axe. On pose $\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$ et $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$.

La famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}', \vec{w})$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^2 (famille libre car orthogonale et contient deux vecteurs dans \mathbb{R}^2 qui est de dimension 2), et on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 à \mathcal{B}' est $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et c'est une matrice orthogonale.

On a donc : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P^{-1} = P \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 20 (Autre caractérisation des matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$)**

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'on a $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tr}(A^T A) = 2 \\ \det(A) = 1 \end{cases}$.

Corrigé de l'exercice 20

Le sens \Rightarrow est trivial.

Pour le sens \Leftarrow : si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $\text{tr}(A^T A) = 2$ et $\det(A) = 1$, alors on a

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2, \quad ad - bc = 1,$$

donc

$$0 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ad + 2bc = (a - d)^2 + (b + c)^2,$$

ce qui amène $a = d$ et $b = -c$, donc

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les colonnes de A sont orthogonales, et même orthonormées puisque $a^2 + b^2 = \det(A) = 1$. Donc $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $\det(A) = 1$, c'est-à-dire $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 21 (**Décomposition d'une rotation plane)

Soit E un plan euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

1. Si u est un vecteur non nul de E , on note θ la mesure principale de l'angle (e_1, u) . Quelle est la matrice dans la base \mathcal{B} de la réflexion par rapport à la droite $Vect(u)$?
2. Que peut-on dire de la composée de deux réflexions ?
3. Que peut-on dire de la composée d'une rotation par une réflexion ?
4. Montrer que le groupe $\mathcal{O}(E)$ est engendré par les réflexions.

Corrigé de l'exercice 21

1. Par hypothèse, nous avons

$$\frac{u}{\|u\|} = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$$

Notons u_1 ce vecteur, et complétons-le en une base orthonormée directe de E en posant

$$u_2 = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$$

(on a bien u_1, u_2 orthogonaux, de norme 1, et $\det_{(e_1, e_2)}(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = 1 > 0$).

Notons s la réflexion d'axe $Vect(u)$. La matrice de s dans la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est

$$D = Mat_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$Mat_{\mathcal{B}}(s) = PDP^{-1},$$

où $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = R_\theta \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$. Finalement :

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{B}}(s) &= PDP^T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. En notant s la réflexion d'axe $Vect(u)$ (resp. s' la réflexion d'axe $Vect(u')$), θ la mesure principale de (e_1, u) (resp. θ' la mesure principale de (e_1, u')) on a

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{B}}(s \circ s') &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\theta') & \sin(2\theta') \\ \sin(2\theta') & -\cos(2\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2(\theta - \theta')) & -\sin(2(\theta - \theta')) \\ \sin(2(\theta - \theta')) & \cos(2(\theta - \theta')) \end{pmatrix} = R_{2(\theta - \theta')}, \end{aligned}$$

donc $s \circ s'$ est la rotation d'angle $\alpha = 2(\theta - \theta')$.

3. Si r est la rotation d'angle α et s la réflexion d'axe $Vect(u)$ avec θ la mesure principale de (e_1, u) , alors

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{B}}(r \circ s) &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 2\theta) & \sin(\alpha + 2\theta) \\ \sin(\alpha + 2\theta) & -\cos(\alpha + 2\theta) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc d'après la question 1., $r \circ s$ est la réflexion d'axe $Vect(u')$, avec (e_1, u') de mesure principale $\beta = \frac{\alpha}{2} + \theta$.

De même,

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s \circ r) &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\alpha + 2\theta) & \sin(-\alpha + 2\theta) \\ \sin(-\alpha + 2\theta) & -\cos(-\alpha + 2\theta) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc $s \circ r$ est la réflexion d'axe $Vect(u'')$, avec (e_1, u'') de mesure principale $\gamma = -\frac{\alpha}{2} + \theta$.

4. On sait que lorsque $\dim(E) = 2$, le groupe $\mathcal{O}(E)$ est formé des rotations et des réflexions. Il suffit donc de montrer que toute rotation r se décompose en produit de réflexions, et c'est le cas car d'après la question 2., toute rotation r d'angle α s'écrit :

$$r = s \circ s',$$

avec par exemple, s la réflexion d'axe $Vect(u)$ tel que (e_1, u) est de mesure principale $\alpha/2$, et s' la réflexion d'axe $Vect(e_1)$ (cela correspond $(\theta, \theta') = (\alpha/2, 0)$ avec les notations de la question 2.).

Exercice 22 (**Composées de rotations et de réflexions planes)

Soit E un plan euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion de E .

1. A quelle condition s et r commutent-elles ?
2. Calculer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.

Corrigé de l'exercice 22

1. Notons α l'angle de la rotation r et u un vecteur directeur unitaire de l'axe de la réflexion s (comme dans l'exercice précédent). Si $s \circ r = r \circ s$, alors puisque $s(u) = u$, on a en particulier

$$s(r(u)) = r(s(u)) = r(u),$$

donc $r(u) \in \text{Ker}(s - Id) = Vect(u)$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $r(u) = \lambda u$, et puisque r conserve la norme, on a nécessairement $\lambda = \pm 1$. Donc $r(u) = \pm u$.

Si $r(u) = u$, alors $\alpha = (u, r(u)) \equiv 0 [2\pi]$, donc $r = Id$.

Si $r(u) = -u$, alors $\alpha = (u, r(u)) = (u, -u) \equiv \pi [2\pi]$, donc $r = r_\pi = -Id$.

Réciproquement, $r = Id$ et $r = -Id$ commutent bien avec toute réflexion (et même avec tout endomorphisme d'ailleurs), donc

$$r \circ s = s \circ r \iff r = \pm Id.$$

Variante : on peut aussi réutiliser les calculs matriciels et les notations de l'exo précédent :

$$r \circ s = s \circ r \iff \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 2\theta) & \sin(\alpha + 2\theta) \\ \sin(\alpha + 2\theta) & -\cos(\alpha + 2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha + 2\theta) & \sin(-\alpha + 2\theta) \\ \sin(-\alpha + 2\theta) & -\cos(-\alpha + 2\theta) \end{pmatrix}$$

$$\iff \alpha + 2\theta \equiv -\alpha + 2\theta [2\pi] \iff 2\alpha \equiv 0 [2\pi] \iff \alpha \equiv 0 [\pi] \iff r = \pm Id.$$

2. Puisque $r \circ s$ est une réflexion (c'est une isométrie par composition, de déterminant $\det(r) \det(s) = -1$), on a $(r \circ s)^2 = Id$, donc

$$r \circ s \circ r \circ s = Id.$$

Ainsi, $r \circ (s \circ r \circ s) = Id$, donc $s \circ r \circ s = r^{-1} = r_{-\alpha}$.

De même, $(r \circ s \circ r) \circ s = Id$, donc $r \circ s \circ r = s^{-1} = s$.