Exercices du CH06 : Espaces préhilbertiens et groupe orthogonal

Exercices de la banque INP à étudier : ex 76 (inégalité de Cauchy-Schwarz), 77 (relations d'orthogonalité), 78 (propriétés des isométries vectorielles), 79 (produit scalaire intégral), 80 (calcul de projeté orthogonal avec fonctions trigo), 81, 82 (calcul de distance avec des matrices 2*2), 92 (matrices symétriques et antisymétriques)

I Révisions espaces préhilbertiens

Exercice 1 (*Une inégalité)
Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \qquad \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p} \right)^2 .$$

Corrigé de l'exercice 1
Soit $n \geq 2$. On va utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n-1}$ muni de son produit scalaire canonique, avec les vecteurs $u = (\sqrt{p})_{1 \leq p \leq n-1}$ et $v = \left(\frac{\sqrt{p}}{n-p} \right)_{1 \leq p \leq n-1}$.

$$\left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p} \right)^2 = (u|v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2 = \left(\sum_{p=1}^{n-1} p \right) \times \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \right) = \frac{n(n-1)}{2} \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \right),$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Exercice 2 (*Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^4$)
On considère $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et F l'ensemble défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ x - y + 3z - t = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base $\mathcal{B}$.
2. Grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base $\mathcal{B}$, construire une base orthonormée de F.

Corrigé de l'exercice 2

1. On remarque que :

$$F = \{(y - 3z + t, y, z, t) / \ (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\} = Vect((1, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)).$$

La famille $(u_1, u_2, u_3) = ((1, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$ est donc une famille génératrice de F qui est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
On montre facilement que cette famille est aussi libre. Donc $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de F.

2. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}$.

- On pose $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- On pose $\tilde{v_2} = u_2 - (u_2|v_1)v_1 = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis $v_2 = \dfrac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- On pose $\tilde{v_3} = u_3 - (u_3|v_1)v_1 - (u_3|v_2)v_2 = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$ puis

$$v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{132}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{33}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) est une base orthonormée du sous-espace vectoriel F.

Exercice 3 (*Projection et symétrie orthogonales)
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.
3. Calculer l'expression de $p_F(x)$, la projection orthogonale d'un vecteur x quelconque sur F.
4. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, calculer $d(x, F)$.
5. Écrire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale s_F par rapport à F.

Corrigé de l'exercice 3

1. Facilement, on obtient que la famille

$$u_1 = (1, -1, 0), \qquad u_2 = (1, 0, -1)$$

est une base de F. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à (u_1, u_2), on obtient une base orthonormée (v_1, v_2) de F :

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0).$$

$$\tilde{v}_2 = u_2 - (u_2|v_1)v_1 = (1, 0, -1) - \frac{1}{2}(1, -1, 0) = \frac{1}{2}(1, 1, -2),$$

$$v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Finalement, $(v_1, v_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2))$ est une BON de F.

2. On a $\dim(F^\perp) = 3 - \dim(F) = 1$, donc il suffit de trouver un vecteur unitaire et orthogonal au plan F pour avoir une base orthonormée de la droite $F^\perp$. Vue l'équation cartésienne de F, le vecteur $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ convient (son opposé aussi d'ailleurs, et ce sont les deux seuls choix possibles).
Sinon, puisqu'on est dans $\mathbb{R}^3$, on peut utiliser le produit vectoriel ...(le vecteur $v_3 = v_1 \wedge v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ convient).
Finalement, $(v_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ est une BON de $F^\perp$.

3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathbb{R}^3$. Vu que (v_1, v_2) est une BON de F, on a directement :

$$p_F(x) = (x|v_1)v_1 + (x|v_2)v_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}v_1 + \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{\sqrt{6}}v_2,$$

c'est-à-dire

$$p_F(x) = \frac{x_1 - x_2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Remarque
On peut faire quelques vérifications simples : si $x \in F$ (par exemple $x = (1, -1, 0)$), on a $p_F(x) = x$. Et si $x \in F^\perp$ (par exemple $x = (1, 1, 1)$), on a $p_F(x) = \overrightarrow{0}$.
On peut vérifier aussi que $p_F \circ p_F = p_F$.

4. Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathbb{R}^3$. On a :
$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|.$$
On peut calculer cette quantité directement à partir de l'expression de $p_F(x)$ précédemment déterminée :
$$x - p_F(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
donc
$$d(x, F) = \frac{|x_1 + x_2 + x_3|}{\sqrt{3}}.$$
Ou alors on utilise la BON (v_3) de $F^\perp$:
$$p_{F^\perp}(x) = (x|v_3)v_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}} v_3,$$
ce qui conduit au même résultat :
$$d(x, F) = \left\| \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}} v_3 \right\| = \frac{|x_1 + x_2 + x_3|}{\sqrt{3}}.$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a, par définition d'une symétrie orthogonale :
$$s_F(x) = p_F(x) - p_{F^\perp}(x) = 2p_F(x) - x.$$
Donc, en notant $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a
$$Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = 2Mat_{\mathcal{B}}(p_F) - I_3 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
c'est-à-dire
$$Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Noyau et image)**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer $Ker(A)$ et $Ker(A^\top A)$ puis $Im(A)$ et $Im(AA^\top)$.

Corrigé de l'exercice 4

- Si $x \in \mathbb{R}^n$, alors
$$x \in Ker(A) \iff Ax = 0 \implies A^\top Ax = A^\top 0 = 0 \implies x \in Ker(A^\top A),$$
ce qui montre que $Ker(A) \subset Ker(A^\top A)$.
Réciproquement :
$$x \in Ker(A^\top A) \implies \|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = (Ax)^\top(Ax) = x^\top \underbrace{(A^\top Ax)}_{=0} = 0 \implies Ax = 0,$$
donc $Ker(A^\top A) \subset Ker(A)$.
Finalement, on a l'égalité
$$Ker(A) = Ker(A^\top A).$$

- Si $y \in \mathbb{R}^n$, alors

$$y \in Im(AA^\top) \iff \exists x \in \mathbb{R}^n,\ y = AA^\top x = A(A^\top x) \implies y \in Im(A),$$

donc $Im(AA^\top) \subset Im(A)$.
De plus, d'après le théorème du rang :

$$\dim(Im(AA^\top)) = n - \dim(Ker(AA^\top)),$$

et d'après le point précédent :

$$Ker(AA^\top) = Ker((A^\top)^\top A^\top) = Ker(A^\top).$$

Donc

$$\dim(Im(AA^\top)) = n - \dim(Ker(A^\top)) = rg(A^\top) = rg(A) = \dim(Im(A)).$$

Finalement, par inclusion et égalité des dimensions, on obtient l'égalité

$$Im(AA^\top) = Im(A).$$

Exercice 5 (Un contre-exemple)**
Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

et soit $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$.

1. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
2. En déduire que $E \neq F \oplus F^\perp$ et que $(F^\perp)^\perp \neq F$.

Corrigé de l'exercice 5

1. Soit $g \in F^\perp$. On a par définition

$$\forall f \in F, \qquad \int_0^1 fg = 0. \qquad (*)$$

Montrons alors que g est nulle sur $]0,1[$. Si ce n'est pas le cas, alors il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Quitte à changer g en $-g$ (qui reste dans $F^\perp$), on peut supposer que $g(x_0) > 0$.
Par continuité de g en x_0, il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset]0,1[\quad \text{et} \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\ g(x) > 0$$

(choisir $\varepsilon = g(x_0)/2$ dans la définition quantifiée de la continuité de g en x_0).
Construisons alors une fonction $f \in F$ qui va contredire la propriété $(*)$. Il suffit de choisir f continue et affine par morceaux telle que

$$f \geq 0, \qquad f = 0 \text{ sur } [0, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, 1], \qquad f(x_0) = 1$$

(c'est possible, faire un dessin !). Avec une telle fonction, on a $f \in F$ (car f est continue sur $[0,1]$ et $f(0) = 0$), ainsi que

$$(f|g) = \int_0^1 fg = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} fg > 0,$$

(puisque fg est continue, positive et non nulle sur le segment $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$) ce qui contredit $(*)$. Donc g est la fonction nulle, ce qui montre bien que $F^\perp = \{0\}$.

2. D'où $F \oplus F^\perp = F \oplus \{0\} = F \neq E$ (certaines fonctions continues ne vérifient pas $f(0) = 0$).
De plus, $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E \neq F$.

II Polynômes orthogonaux

Exercice 6 (*Polynômes de Legendre)**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction polynomiale P_n, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{d^n}{dx^n}\big((x^2-1)^n\big).$$

Il résulte des conventions habituelles que $P_0(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que le polynôme P_n est de degré n. Quel est le coefficient du terme de degré n dans P_n ?
   (b) Pour quelles valeurs de n la fonction P_n est-elle paire ? impaire ?
   (c) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
2. Soit $n \geq 1$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq m \leq n-1$, $\int_{-1}^{1} P_n(x)x^m dx = 0$.
3. On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace préhilbertien réel des fonctions continues de $[-1\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (u,v) \in \mathcal{E}^2, \qquad (u|v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx.$$

   (a) La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une famille orthogonale dans $\mathcal{E}$?
   (b) Calculer $(P_n|P_n)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
4. (a) Soit $n \geq 1$. Montrer que $\dfrac{d}{dx}\left((x^2-1)\dfrac{dP_n}{dx}(x)\right)$ est orthogonal à x^m pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq m \leq n-1$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est solution de l'équation différentielle

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

Corrigé de l'exercice 6

1. Fixons $n \in \mathbb{N}$.
   (a) On a $\deg((x^2-1)^n) = 2n$, donc par dérivations successives :

$$\deg(P_n) = \deg\left(\frac{d^n}{dx^n}\big((x^2-1)^n\big)\right) = 2n - n = n.$$

   Le coefficient dominant est alors :

$$cd(P_n) = \frac{1}{2^n n!} \times cd\left(\frac{d^n}{dx^n}\big((x^2-1)^n\big)\right) = \frac{1}{2^n n!} \times cd\left(\frac{d^n}{dx^n}\big(x^{2n} + R_n\big)\right),$$

   avec $\deg(R_n) < 2n$, donc

$$cd(P_n) = \frac{1}{2^n n!} \times cd\Big((2n)(2n-1)\cdots(n+1)x^n + R_n^{(n)}\Big) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

   (b) La fonction $x \mapsto (x^2-1)^n$ est paire, donc puisque la dérivée d'une fonction paire est impaire et réciproquement (très simple à montrer), on obtient par dérivations successives que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

   Donc la fonction P_n est paire lorsque n est pair, et impaire lorsque n est impair.
   (c) D'après la formule de dérivation de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{d^n}{dx^n}\big((x-1)^n(x+1)^n\big)$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}\big((x-1)^n\big)\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\big((x+1)^n\big)$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}(x+1)^k$$
$$= \frac{1}{2^n} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k.$$

Donc en évaluant en $x = 1$, on obtient :

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 0^{n-k} 2^k = 1,$$

(il ne reste que le terme $k = n$) et par parité/imparité de P_n, on en déduit

$$P_n(-1) = (-1)^n.$$

2. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leq m \leq n-1$. On effectue $m+1$ intégrations par parties successives :

$$2^n n! \int_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx = \int_{-1}^{1} x^m \frac{d^n}{dx^n}\big((x^2-1)^n\big)dx$$
$$= \left[x^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\big((x^2-1)^n\big)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}(x^m) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\big((x^2-1)^n\big)dx = \cdots$$
$$= \sum_{k=1}^{m+1} \left[(-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x^m) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\big((x^2-1)^n\big)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{m+1} \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^m)}_{=0} \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}\big((x^2-1)^n\big)dx,$$

c'est-à-dire

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx = \frac{1}{2^n n!} \times \sum_{k=1}^{m+1} \left[(-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x^m) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\big((x^2-1)^n\big)\right]_{-1}^{1}$$

(cela a bien un sens car $k \in [\![1, m+1]\!] \implies n-k \in [\![n-m-1, n-1]\!] \subset [\![0, n-1]\!]$).
Or, le polynôme $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ possède deux racines de multiplicité n (1 et -1), donc pour tout entier $k \in [\![1, m+1]\!]$, le polynôme $\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\big((x^2-1)^n\big)$ admet 1 et -1 pour racines (puisque $n-k < n$). Donc les crochets des IPP sont nuls, ce qui montre bien que

$$\forall n \geq 1,\ \forall m \in [\![0, n-1]\!], \qquad \int_{-1}^{1} x^m P_n(x)dx = 0.$$

3. (a) Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k < n$. D'après la question précédente, on a $(P_n|x^m) = 0$ pour tout $m \in [\![0, n-1]\!]$, donc par linéarité à droite du produit scalaire, on en déduit que $(P_n|Q) = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc en particulier $(P_n|P_k) = 0$, puisque $P_k \in \mathbb{R}_k[X] \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi, par symétrie du produit scalaire, on a ($n \neq k \implies (P_n|P_k) = 0$), donc la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathcal{E}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ (d'après la question précédente), on a

$$(P_n|P_n) = (P_n|cd(P_n)x^n) = cd(P_n) \times (P_n|x^n).$$

(les autres termes donnent des produits scalaires nuls). Si on reprend le calcul de la question 2. avec $m = n$ et n IPP cette fois, on a alors

$$2^n n! \times (P_n|x^n) = \int_{-1}^{1} x^n \frac{d^n}{dx^n}\big((x^2-1)^n\big)dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x^n) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\big((x^2-1)^n\big)\right]_{-1}^{1} + (-1)^n \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{d^n}{dx^n}(x^n)}_{=n!} \times (x^2-1)^n dx$$

$$= (-1)^n n! \int_{-1}^{1} (x-1)^n (x+1)^n dx$$

(les crochets étant nuls), c'est-à-dire

$$(P_n|x^n) = \frac{(-1)^n}{2^n} \int_{-1}^{1} (x-1)^n (x+1)^n dx.$$

En procédant encore par IPP successives (les crochets sont nuls là aussi), on obtient

$$\int_{-1}^{1} (x-1)^n (x+1)^n dx = (-1)^n n! \int_{-1}^{1} \frac{(x+1)^{2n}}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} dx$$

$$= (-1)^n n! \frac{2^{2n+1}}{(n+1)\cdots(2n)(2n+1)} = (-1)^n (n!)^2 \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

donc finalement

$$(P_n|x^n) = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!},$$

puis en multipliant par $cd(P_n) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$, on obtient

$$(P_n|P_n) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \times \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in [\![0, n-1]\!]$. Nous avons :

$$\left(\frac{d}{dx} \left((x^2-1) \frac{dP_n}{dx}(x) \right) \mid x^m \right) = \int_{-1}^{1} x^m \frac{d}{dx} \left((x^2-1) \frac{dP_n}{dx}(x) \right) dx.$$

Si $m = 0$, cette quantité est évidemment nulle.
Si $m \geq 1$, alors en effectuant deux intégrations par parties successives :

$$\left(\frac{d}{dx} \left((x^2-1) \frac{dP_n}{dx}(x) \right) \mid x^m \right) = -m \int_{-1}^{1} x^{m-1} (x^2-1) \frac{dP_n}{dx}(x) dx$$

$$= -m \int_{-1}^{1} (x^{m+1} - x^{m-1}) P_n'(x) dx$$

$$= +m \int_{-1}^{1} P_n(x) \frac{d}{dx} (x^{m+1} - x^{m-1}) dx = m(P_n|Q),$$

avec $deg(Q) = m < n$, donc puisque $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$, on a $(P_n|Q) = 0$.
D'où finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in [\![0, n-1]\!], \qquad \left(\frac{d}{dx} \left((x^2-1) \frac{dP_n}{dx}(x) \right) \mid x^m \right) = 0.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$Q_n(x) = \frac{d}{dx} \left((x^2-1) \frac{dP_n}{dx}(x) \right) = 2xP_n'(x) + (x^2-1)P_n''(x).$$

On a $\deg(P_n) = n$, donc $Q_n \in \mathbb{R}_n[X] = Vect(P_0, \cdots, P_n)$ (puisque $\deg(P_k) = k$ pour tout k). Il existe donc $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x).$$

D'après la question précédente, on a également $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = Vect(P_0, \cdots, P_{n-1})^\perp$, donc par orthogonalité de la famille $(P_0, \cdots, P_n)$, on en déduit :

$$\forall m \in [\![0, n-1]\!], \qquad 0 = (Q_n|P_m) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (P_k|P_m) = \lambda_m (P_m|P_m),$$

et donc
$$Q_n = \lambda_n P_n.$$

Finalement, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 2xP_n'(x) + (x^2-1)P_n''(x) = \lambda_n P_n(x),$$

et on détermine λ_n en examinant les coefficients dominants dans cette inégalité :
$$\lambda_n \times cd(P_n) = 2n \times cd(P_n) + n(n-1) \times cd(P_n),$$

c'est-à-dire
$$\lambda_n = n(n+1).$$

On a bien montré que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad (x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0,$$

et cela reste vrai pour $n = 0$.

Exercice 7 (Polynômes de Laguerre)**

On note E l'ensemble des fonctions réelles f définies et continues sur $[0,+\infty[$ et telles que $t \mapsto e^{-t}\big(f(t)\big)^2$ est intégrable.

On note F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles définies sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions polynomiales de degré $\leq n$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^n e^{-t} \end{array} \right.$ et $L_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^t \varphi_n^{(n)}(t) \end{array} \right.$.

1. Soit $(f,g) \in E^2$. Montrer que $t \mapsto e^{-t}f(t)g(t)$ est intégrable.
2. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $(f|g) = \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.
3. Vérifier rapidement que F est un sous-espace vectoriel de E.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que L_n est un élément de F. On précisera le degré de L_n et le coefficient $a_{n,k}$ de t^k dans l'expression de L_n.
5. Expliciter L_0 et L_1.
6. Montrer que pour $k < n$, $\varphi_n^{(k)}(0) = 0$.
7. Calculer, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $(L_n|L_m)$.
8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(\frac{1}{k!}L_k\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de F_n.
9. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\big(t^2 - (at+b)\big)^2\,\mathrm{d}t$.

Corrigé de l'exercice 7

1. Pour $(f,g) \in E^2$, la fonction $t \mapsto e^{-t}f(t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a pour tout réel $t \geq 0$:
$$|e^{-t}f(t)g(t)| = e^{-t}|f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}e^{-t}(f^2(t) + g^2(t)),$$
donc dans $[0,+\infty]$:
$$\int_0^{+\infty} |e^{-t}f(t)g(t)|dt \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}f^2(t)dt + \int_0^{+\infty} e^{-t}f^2(t)dt\right) < +\infty,$$
(puisque f et g sont dans E), ce qui montre que $t \mapsto e^{-t}f(t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. • La fonction nulle est clairement dans E (car continue et $t \mapsto e^{-t}0^2 = 0$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$). De plus, E est stable par combinaison linéaire car pour tout $(f,g,\lambda) \in E \times E \times \mathbb{R}$, on a $\lambda f + g$ continue sur $\mathbb{R}^+$ et
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad e^{-t}(\lambda f(t) + g(t))^2 = \lambda^2 e^{-t}f^2(t) + 2\lambda e^{-t}f(t)g(t) + e^{-t}g^2(t),$$

donc $t \mapsto e^{-t}(\lambda f(t) + g(t))^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ comme combinaison linéaire de trois fonctions intégrables (en utilisant le fait que f et g sont dans E et la question précédente), c'est-à-dire $\lambda f + g \in E$.
Ceci montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- L'application $(f, g) \mapsto (f|g)$ est bien définie d'après la question 1. puisque pour tout $(f, g) \in E^2$, $(f|g) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)g(t)dt$ est une intégrale convergente. De plus, cette application est clairement bilinéaire (par linéarité de l'intégrale) et symétrique. Enfin, pour tout $f \in E$, on a $(f|f) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f^2(t)dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale et
$$(f|f) = 0 \iff \int_0^{+\infty} e^{-t} f^2(t)dt = 0 \implies \forall t \in \mathbb{R}^+,\ e^{-t} f^2(t) = 0 \implies f = 0_E,$$
puisque la fonction $t \mapsto e^{-t} f^2(t)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. Donc $(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire sur E.

3. On sait que l'ensemble F des fonctions polynomiales $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est stable par combinaison linéaire et contient la fonction nulle. Il reste à vérifier l'inclusion $F \subset E$: si $f : t \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k t^k \in F$ (avec $d \in \mathbb{N}$ et $a_d \neq 0$), alors f est continue donc $t \mapsto e^{-t} f^2(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a
$$e^{-t} f^2(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} a_d^2 t^{2d} e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}(1/t^2),$$
donc $t \mapsto e^{-t} f^2(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Ceci montre que F est un SEV de E.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la formule de Leibniz :
$$\varphi_n^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}(t^n) \times \frac{d^k}{dt^k}(e^{-t}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} t^k (-1)^k e^{-t},$$
donc
$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n-k)!} t^k,$$
ce qui montre que $L_n \in F$, $\deg(F_n) = n$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le coefficient de t^k dans L_n est $a_{n,k} = \frac{(-1)^k}{(n-k)!}$.
5. On déduit de la question précédente :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad L_0(t) = 1, \qquad L_1(t) = 1 - t.$$
6. Soit $0 \leq k < n$ (ce qui suppose $n \geq 1$). Toujours par la formule de Leibniz :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \varphi_n^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k}(t^n e^{-t}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{n!}{(n-j)!} t^{n-j} (-1)^{k-j} e^{-t},$$
donc en évaluant en $t = 0$, on obtient $\varphi_n^{(k)}(0) = 0$ (puisque pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $n-j \geq n-k > 0$).
7. Soient deux entiers m, n tels que $0 \leq m \leq n$. Nous avons :
$$(L_n|L_m) = \int_0^{+\infty} e^{-t} L_n(t)L_m(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n)} L_m dt.$$
En effectuant m IPP généralisées successives, on obtient :
$$(L_n|L_m) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \left[\varphi_n^{(n-1-k)} L_m^{(k)}\right]_0^{+\infty} + (-1)^m \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-m)} L_m^{(m)} dt.$$
Les crochets sont nuls car
$$\forall k < n, \qquad \varphi_n^{(n-1-k)}(0) = 0,$$
(d'après la question précédente), ainsi que
$$\forall k < n, \qquad \varphi_n^{(n-k-1)} L_m^{(k)} \underset{+\infty}{\to} 0$$

(par croissances comparées puisqu'il s'agit d'un polynôme multiplié par e^{-t}).
De plus, en utilisant la formule obtenue en 4., on a pour tout réel $t \geq 0$:

$$L_m^{(m)}(t) = \frac{d^m}{dt^m}\left(\sum_{k=0}^{m} a_{m,k}t^k\right) = m!a_{m,m} = (-1)^m m!,$$

donc

$$\forall 0 \leq m \leq n, \qquad (L_n|L_m) = m! \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-m)}.$$

On distingue alors deux cas :

- Si $0 \leq m < n$, alors $(L_n|L_m) = \left[\varphi_n^{(n-m-1)}\right]_0^{+\infty} = 0$ (mêmes arguments que précédemment), et par symétrie, on obtient aussi $(L_n|L_m) = 0$ pour $n < m$.
- Si $m = n$, alors $(L_n|L_n) = n! \int_0^{+\infty} \varphi_n(t) = n! \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = (n!)^2$ (calcul classique par IPP successives).

Finalement, $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ (L_n|L_m) = (n!)^2 \delta_{m,n}$.

8. La question précédente montre que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \qquad \left(\frac{L_n}{n!} \mid \frac{L_m}{m!}\right) = \delta_{n,m},$$

donc la famille $\left(\frac{L_k}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est orthonormée. De plus, c'est une famille de polynômes non nuls de degrés étagés, donc c'est une base de F.
Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, la sous-famille $\left(\frac{L_k}{k!}\right)_{0\leq k\leq n}$ est donc une base orthonormée de F_n (puisque de degrés $0, 1, \cdots, n$ et orthonormée).

9. En notant $f : t \mapsto t^2 \in F_2$, nous avons :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - (at+b))^2 dt = \inf_{g\in F_1} (f-g|f-g) = \inf_{g\in F_1} \|f-g\|^2 = d(f,F_1)^2,$$

Puisque F_1 est un SEV de dimension finie de E, on sait d'après le cours que cette distance est atteinte en un seul point : $g = p_{F_1}(f)$ (le projeté orthogonal de f sur F_1). En utilisant la base orthonormée (L_0, L_1) de F_1, nous avons directement

$$p_{F_1}(f) = (f|L_0)L_0 + (f|L_1)L_1,$$

$$(f|L_0) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^2 dt = 2! = 2,$$

$$(f|L_1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^2(1-t)dt = 2! - 3! = -4,$$

donc

$$p_{F_1}(f) = 2L_0 - 4L_1 = (t \mapsto 4t - 2).$$

Finalement, par le théorème de Pythagore :

$$d(f,F_1)^2 = \|f - p_{F_1}(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|p_{F_1}(f)\|^2,$$

$$\|f\|^2 = \int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt = 4! = 24,$$

$$\|p_{F_1}(f)\|^2 = \int_0^{+\infty} (4t-2)^2 e^{-t} dt = 16 \times 2! - 16 \times 1! + 4 \times 0! = 20,$$

donc

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - (at+b))^2 dt = d(f,F_1)^2 = 24 - 20 = 4.$$

Remarque (Pour les 5/2)
La projection orthogonale ici sert à justifier **l'existence** *du minimum, mais on n'a pas besoin d'expliciter la projection orthogonale pour faire le calcul du minimum. On peut plutôt expliciter l'intégrale :*

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2-(at+b))^2dt = 2a^2+2ab+b^2-12a-4b+24 \end{array} \right. ,$$

puis étudier les extrema de cette fonction de deux variables. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale et

$$\nabla f(a,b) = 2(2a+b-6, a+b-2),$$

donc elle possède un seul point critique : $(a,b) = (4,-2)$.
Puisque f possède un minimum sur $\mathbb{R}^2$, il est donc forcément atteint au point $(4,-2)$, et sa valeur est $f(4,-2) = 4$.

Exercice 8 (Polynômes de Hermite)**
On note E l'ensemble des fonctions réelles f définies et continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $t \mapsto e^{-t^2}\big(f(t)\big)^2$ est intégrable.
On note F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles définies sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
On définit $w : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x^2} \end{array} \right.$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x) \end{array} \right.$. En particulier H_0 est la fonction constante égale à 1.

1. Soit $(f,g) \in E^2$. Montrer que $t \mapsto e^{-t^2} f(t)g(t)$ est intégrable.
2. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $(f|g) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.
3. Vérifier rapidement que F est un sous-espace vectoriel de E.
4. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$.
5. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_n est un élément de F. On précisera le degré de H_n et son coefficient dominant.
7. Montrer, pour tout $n \geq 1$ et tout $P \in F$, $(P'|H_{n-1}) = (P|H_n)$.
8. En déduire que, pour tout $n \geq 1$ et tout $P \in F_{n-1}$, $(P|H_n) = 0$.
9. En déduire que $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de F_n.

Corrigé de l'exercice 8
Les questions 1,2,3 se traitent **exactement** comme celles de l'exercice précédent, en remplaçant e^{-t} par e^{-t^2} (et tout fonctionnerait de la même manière avec e^{-t^γ} pour $\gamma > 0$.

4. En dérivant w trois fois, on obtient facilement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2,\ H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

5. Soit $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. On a par définition :

$$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}e^{x^2}w^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{d}{dx}(w^{(n)}(x)) = (-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{d}{dx}((-1)^n e^{-x^2}H_n(x)),$$

et donc

$$H_{n+1}(x) = -e^{x^2}\frac{d}{dx}(e^{-x^2}H_n(x)) = -e^{x^2}(-2xH_n(x) + H_n'(x))e^{-x^2} = 2xH_n(x) - H_n'(x).$$

6. $H_0 = 1$, donc par récurrence triviale, la relation précédemment obtenue montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est une fonction polynomiale (donc un élément de F) de degré n et de coefficient dominant 2^n.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in F$. On a par IPP généralisée :

$$(P'|H_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)e^{-x^2} H_{n-1}(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\left[P(x)e^{-x^2} H_{n-1}(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \underbrace{\left(-2xH_{n-1}(x) + H'_{n-1}(x)\right)}_{=-H_n(x)} e^{-x^2} dx \right).$$

   Le crochet est nul par croissances comparées (le produit d'un polynôme et de e^{-x^2} a des limites nulles en $\pm\infty$), donc

$$(P'|H_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = (P|H_n).$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $P \in F_{n-1}$, alors par itération du résultat de la question précédente :

$$(P|H_n) = (P'|H_{n-1}) = \cdots = (P^{(n)}|H_0) = 0,$$

   car $P^{(n)} = 0$ (puisque $\deg(P) < n$ par hypothèse).
9. Si $0 \leq i < j \leq n$, le polynôme $H_j \in F_j$ est orthogonal au sous-espace F_{j-1} d'après ce qui précède, et donc en particulier au polynôme H_i. D'où $(H_i|H_j) = 0$, ce qui montre que la famille $(H_0, \cdots, H_n)$ est orthogonale. De plus ces polynômes sont de degrés $0, 1, \cdots, n$, donc il s'agit d'une base orthogonale de F_n.

III Isométries

Exercice 9 (*Un exemple d'isométrie)
Soit E un espace vectoriel euclidien non réduit à 0. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi_x : & E & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & y - \dfrac{2(x|y)}{\|x\|^2} x, \end{array}$$

où $(.|.)$ désigne le produit scalaire sur E.
Montrer que ϕ_x est une isométrie vectorielle et la reconnaître.

Corrigé de l'exercice 9

1. Tout d'abord, ϕ_x est linéaire car pour tous $(y, z) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\phi_x(\lambda y + z) = \lambda y + z - \frac{2\langle x, \lambda y + z\rangle}{\|x\|^2} x = \lambda y + z - \lambda \frac{2\langle x, \lambda y\rangle}{\|x\|^2} x - \frac{2\langle x, z\rangle}{\|x\|^2} x = \lambda\phi_x(y) + \phi_x(z).$$

   De plus, ϕ_x conserve la norme car pour tout $y \in E$:

$$\begin{aligned} \|\phi_x(y)\|^2 &= \left\| y - \frac{2\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} x \right\|^2 = \|y\|^2 - 2 \left\langle \frac{2\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} x, y \right\rangle + \left\| \frac{2\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} x \right\|^2 \\ &= \|y\|^2 - \frac{4\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} \langle x, y\rangle + 4 \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|x\|^2} = \|y\|^2, \end{aligned}$$

   et donc $\|\phi_x(y)\| = \|y\|$.
   Ceci montre que ϕ_x est une isométrie vectorielle.
2. Montrons que ϕ_x est une symétrie :

$$\forall y \in E, \qquad (\phi_x \circ \phi_x)(y) = \phi_x \left(y - \frac{2\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} x \right) = \phi_x(y) - \frac{2\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} \phi_x(x)$$

Or, $\phi_x(x) = y - \dfrac{2\langle x, x\rangle}{\|x\|^2}x = x - 2x = -x$, donc

$$(\phi_x \circ \phi_x)(y) = \phi_x(y) + \frac{2\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}x = y.$$

On a $\phi_x \circ \phi_x = Id$, donc ϕ_x est une symétrie.
Déterminons ses éléments caractéristiques :

- les éléments de $Ker(\phi_x - Id)$ sont les vecteurs $y \in E$ tels que

$$\phi_x(y) = y \iff -\frac{2\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}x = 0 \iff \langle y, x\rangle = 0.$$

  On a donc $Ker(\phi_x - Id) = \{x\}^\perp$, c'est l'hyperplan orthogonal à la droite engendrée par x, notons-le H.
- le sous-espace $Ker(\phi_x + Id)$ est un supplémentaire de H dans E (puisque ϕ_x est une symétrie), il s'agit donc d'une droite (E étant de dimension finie). Vu que $\phi_x(x) = -x$, on a $x \in Ker(\phi_x + Id)$, et donc $Ker(\phi_x + Id) = Vect(x)$, il s'agit de la droite orthogonale à H.

Les sous-espaces $Ker(\phi_x - Id)$ et $Ker(\phi_x + Id)$ sont des supplémentaires orthogonaux dans E, donc la symétrie ϕ_x est une symétrie orthogonale.
En conclusion, Φ_x est la réflexion par rapport à l'hyperplan $H = \{x\}^\perp$.

Remarque
On peut faire très rapidement cet exercice si on remarque que $\phi_x = Id - 2p$, où p est la projection orthogonale sur la droite $\mathcal{D} = Vect(x)$. En effet, le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ forme une base orthonormée de $\mathcal{D}$, donc la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ a pour expression :

$$y \mapsto p(y) = \left\langle y, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \frac{x}{\|x\|} = \frac{\langle x, y\rangle x}{\|x\|^2}.$$

En notant $y = y_1 + y_2$ la décomposition d'un vecteur sur la somme directe $E = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp$, on a alors

$$\phi_x(y) = y - 2p(y) = y_1 + y_2 - 2y_1 = -y_1 + y_2,$$

ce qui est bien l'expression de la symétrie par rapport à $\mathcal{D}^\perp$ et parallèlement à $\mathcal{D}$, c'est-à-dire la réflexion d'hyperplan $\mathcal{D}^\perp$.

Exercice 10 (*Noyau et image)
Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $Ker(f - Id_E) = Im(f - Id_E)^\perp$.

Corrigé de l'exercice 10 — Montrons que $Ker(f - Id_E) \subset Im(f - Id_E)^\perp$.
Soit $\overrightarrow{u} \in Ker(f - Id_E)$. On souhaite montrer que $\overrightarrow{u} \in Im(f - Id_E)^\perp$.
Pour tout $\overrightarrow{y} \in Im(f - Id_E)$, il existe $\overrightarrow{w} \in E$ tel que $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{w}) - \overrightarrow{w}$. On a donc :

$$\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{y}\rangle = \langle \overrightarrow{u} | f(\overrightarrow{w}) - \overrightarrow{w}\rangle = \langle \overrightarrow{u} | f(\overrightarrow{w})\rangle - \langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{w}\rangle .$$

Or, $\overrightarrow{u} \in Ker(f - Id_E)$ donc $\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{u})$ et donc $\langle \overrightarrow{u} | f(\overrightarrow{w})\rangle = \langle f(\overrightarrow{u}) | f(\overrightarrow{w})\rangle = \langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{w}\rangle$ car f conserve le produit scalaire.
Ainsi, $\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{y}\rangle = \langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{w}\rangle - \langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{w}\rangle = 0$ et $\overrightarrow{u} \in Im(f - Id_E)^\perp$.
On a bien $Ker(f - Id_E) \subset Im(f - Id_E)^\perp$.

— Montrons que $\dim(Ker(f - Id_E)) = \dim(Im(f - Id_E)^\perp)$.
On sait, d'après le théorème du rang, que $\dim(Ker(f - Id_E)) = \dim(E) - \dim(Im(f - Id_E))$.
De plus, comme E est de dimension finie, $Im(f - Id_E)$ et $Im(f - Id_E)^\perp$ sont supplémentaires donc
$\dim(Im(f - Id_E)) + \dim(Im(f - Id_E)^\perp) = \dim(E)$.
On a donc bien $\dim(Ker(f - Id_E)) = \dim(Im(f - Id_E)^\perp)$.

Grâce aux deux points précédents on a montré que $Ker(f - Id_E) = Im(f - Id_E)^\perp$.

Exercice 11 (Une isométrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)**
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f_A soit une isométrie vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique (pour rappel il est défini par $(A|B) = Tr(A^\top B)$).

Corrigé de l'exercice 11
Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application f_A est linéaire et on a

$$\begin{aligned} f_A \in \mathcal{O}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) &\iff \forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ (f_A(M)|f_A(N)) = (M|N) \\ &\iff \forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ (AM|AN) = (M|N) \\ &\iff \forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ Tr(M^T A^T A N) = Tr(M^T N). \end{aligned}$$

On remarque alors que la condition $A^T A = I_n$ est suffisante pour que f_A soit une isométrie vectorielle. Voyons maintenant si cette condition est nécessaire.
Si f_A est une isométrie, alors en particulier pour les matrices élémentaires $M = E_{i,j}$ et $N = E_{i',j'}$ (où i, j, i', j' sont dans $[\![1, n]\!]$), on a

$$(*) \qquad (AE_{i,j}|AE_{i',j'}) = (E_{i,j}|E_{i',j'}) = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'},$$

puisque le produit scalaire se calcule à l'aide de la formule :

$$(A|B) = Tr(A^T B) = \sum_{k,l} a_{k,l} b_{k,l}.$$

En outre, en notant $(a_{i,j})$ les coefficients de A, on a

$$AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,i} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(où la colonne non nulle est en j^e position), donc

$$(AE_{i,j}|AE_{i',j'}) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si } j \neq j' \\ \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,i'} & \text{si } j = j'. \end{array} \right.$$

En choisissant $j = j'$, la relation $(*)$ donne donc :

$$\forall (i,i') \in [\![1, n]\!]^2, \qquad \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,i'} = \delta_{i,i'},$$

c'est-à-dire

$$\forall (i,i') \in [\![1, n]\!]^2, \qquad \langle C_i(A), C_{i'}(A) \rangle = \delta_{i,i'},$$

où $\langle C_i(A), C_{i'}(A) \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de deux colonnes de A. Ainsi, les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, et donc A est bien une matrice orthogonale.
Finalement :

$$f_A \in \mathcal{O}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \iff A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

IV Matrices orthogonales

Exercice 12 (*Trace maximale d'une matrice orthogonale)
Quelle est la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

Corrigé de l'exercice 12
Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Du fait que chaque colonne de A est de norme euclidienne 1, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad a_{i,j}^2 \leq \sum_{k=1}^n a_{k,j}^2 = \|C_j(A)\|^2 = 1,$$

donc chaque coefficient de A vérifie $|a_{i,j}| \leq 1$.
On en déduit alors que $tr(A) \leq n$.
Enfin, il existe des matrices orthogonales de trace n (par exemple I_n), donc la trace maximale d'une matrice orthogonale est n.

Exercice 13 (*Somme des coeff. d'une matrice orthogonale)
Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit u une isométrie vectorielle de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

1. Trouver un vecteur $x \in E$ tel que $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = (u(x)|x)$.
2. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}\right| \leq n$.

Corrigé de l'exercice 13

1. Soit $x \in E$, et $X = (x_1 \cdots x_n)^T$ le vecteur colonnne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. Les coordonnées de $u(x)$ sont données par le vecteur colonne AX.
   Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a
   $$(u(x)|x) = (AX)^T X = X^T AX = \sum_{i=1}^{n} x_i(AX)_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}x_ix_j.$$
   Le vecteur $x = e_1 + \cdots + e_n$ vérifie alors $x_i = 1$ pour tout i, donc
   $$(u(x)|x) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}.$$
2. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient alors
   $$\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}\right| = |(u(x)|x)| \leq \|u(x)\| \times \|x\| = \|x\|^2$$
   (puisque u est une isométrie), et on a $\|x\|^2 = X^T X = n$, donc finalement
   $$\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}\right| \leq n.$$

Exercice 14 (Matrices orthogonales et triangulaires)**
Quelles sont les matrices triangulaires de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

Corrigé de l'exercice 14
Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geq 2$) triangulaire supérieure. On a alors
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix},$$
avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. En effectuant un produit par blocs, on a
$$I_n = A^T A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ B^T & M^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda B \\ B^T\lambda & B^TB + M^TM \end{pmatrix},$$
donc en identifiant, $\lambda^2 = 1$, $\lambda B = 0$, $B^TB + M^TM = I_{n-1}$, ce qui amène
$$\lambda = \pm 1, \qquad B = 0, \qquad M^TM = I_{n-1},$$
c'est-à-dire
$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

avec $M \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. On en déduit facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$(A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ triangulaire supérieure}) \implies (A \text{ diagonale avec les } a_{i,i} = \pm 1).$$

Vu que la transposée d'une matrice orthogonale est aussi orthogonale, la même implication reste vraie pour les matrices orthogonales triangulaires inférieures. Et enfin, les 2^n matrices diagonales obtenues sont bien orthogonales, car leurs colonnes forment bien une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Donc finalement :

$$(A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ triangulaire}) \iff (A \text{ diagonale avec les } a_{i,i} = \pm 1).$$

Exercice 15 (*Matrices orthogonales à coefficients positifs)**
Déterminer les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

Corrigé de l'exercice 15
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs ou nuls. Vu que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\forall j \neq j', \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} a_{i,j'} = 0,$$

c'est une somme nulle de réels positifs, donc

$$(*) \qquad \forall j \neq j',\ \forall i \in [\![1,n]\!], \qquad a_{i,j} a_{i,j'} = 0.$$

Fixons alors $i \in [\![1,n]\!]$. La ligne $L_i(A)$ est non nulle (puisqu'elle est de norme 1), donc il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_{i,j} \neq 0$. La relation $(*)$ montre alors que

$$\forall j' \neq j, \quad a_{i,j'} = 0.$$

Ainsi, le seul coefficient non nul de la ligne $L_i(A)$ est $a_{i,j}$, et il vaut nécessairement 1, puisque $a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = \|L_i(A)\|^2 = 1$ et puisque $a_{i,j} \geq 0$.
En résumé, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $\sigma(i) \in [\![1,n]\!]$ tel que

$$a_{i,j} = \delta_{j,\sigma(i)}.$$

Cela définit une application $\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \\ i & \longmapsto & \sigma(i) \end{array} \right.$, qui est nécessairement injective (sinon, A possède deux lignes égales et non nulles, donc non orthogonales, ce qui contredit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$), donc σ est une permutation de S_n. Ainsi,

$$\exists \sigma \in S_n, \qquad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad a_{i,j} = \delta_{j,\sigma(i)}.$$

Réciproquement, toute matrice A de cette forme est bien orthogonale et à coefficients positifs, puisque ses lignes forment une permutation de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
Finalement, les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs sont les "matrices de permutation", c'est-à-dire les matrices $A = (a_{i,j})$ pour lesquelles il existe $\sigma \in S_n$ telles que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} = \delta_{j,\sigma(i)} = \delta_{i,\sigma^{-1}(j)}$ (donc un seul 1 par ligne, mais aussi par colonne, et les autres coefficients nuls).

Remarque
On peut montrer facilement que

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (S_n, \circ) & \longrightarrow & (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times) \\ \sigma & \longmapsto & P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n} \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes injectif, dont l'image est l'ensemble des matrices de permutation (P_σ est la matrice binaire telle que chaque colonne C_j comporte un seul élément non nul : $P_\sigma[\sigma(j), j] = 1$). Ainsi, les matrices de permutation forment un sous-groupe de $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$, donc de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.
On peut également montrer que $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ pour toute permutation $\sigma \in S_n$ (à partir de la formule du déterminant).

Exercice 16 (Commutant de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$)**
Montrer que le commutant de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}I_n$.
C'est-à-dire qu'il faut prouver que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ M\Omega = \Omega M\} = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Corrigé de l'exercice 16
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec toutes les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Montrons que $M \in \mathbb{R}I_n$, c'est-à-dire M est diagonale avec $m_{1,1} = \cdots = m_{n,n}$.

1. **Méthode "naïve"** (à la main par calcul matriciel)
En particulier, M commute avec toutes les matrices de permutations $P_\sigma = (\delta_{j,\sigma(i)})_{1\leq i,j\leq n}$ vues à l'exercice précédent (ce sont les matrices orthogonales les plus simples). Donc
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \forall \sigma \in S_n, \qquad (MP_\sigma)[i,j] = (P_\sigma M)[i,j],$$
c'est-à-dire
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \forall \sigma \in S_n, \qquad \sum_{k=1}^n m_{i,k}\delta_{j,\sigma(k)} = \sum_{k=1}^n \delta_{k,\sigma(i)} m_{k,j},$$
ou encore
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \forall \sigma \in S_n, \qquad m_{i,\sigma^{-1}(j)} = m_{\sigma(i),j}.$$
En choisissant $\sigma = \tau_{i,j}$ (la transposition qui échange i et j), on obtient
$$i \neq j \implies m_{i,i} = m_{j,j}.$$
Reste à montrer que $m_{i,j} = 0$ lorsque $i \neq j$.
Pour cela, on peut faire appel à d'autres matrices orthogonales simples, en modifiant les matrices de permutation P_σ de la façon suivante :
$$\forall \sigma \in S_n, \qquad Q_\sigma = (\varepsilon_i \delta_{j,\sigma(i)})_{1\leq i,j\leq n}, \qquad \varepsilon_i \in \{\pm 1\}.$$
On a bien $Q_\sigma \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour tout $\sigma \in S_n$ et en reprenant le calcul précédent :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \forall \sigma \in S_n, \qquad \sum_{k=1}^n m_{i,k}\varepsilon_k\delta_{j,\sigma(k)} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_i\delta_{k,\sigma(i)} m_{k,j},$$
et donc
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \forall \sigma \in S_n, \qquad \varepsilon_{\sigma^{-1}(j)} m_{i,\sigma^{-1}(j)} = \varepsilon_i m_{\sigma(i),j}.$$
En particulier, avec $\sigma = Id$, $i \neq j$ et $1 = \varepsilon_i = -\varepsilon_j$, on obtient
$$i \neq j \implies m_{i,j} = -m_{i,j} \implies m_{i,j} = 0,$$
donc M est diagonale, avec $m_{1,1} = \cdots = m_{n,n}$.

2. **Méthode "pro"**
On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M. Puisque M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, u commute avec toutes les isométries vectorielles, donc en particulier avec toutes les réflexions de $\mathbb{R}^n$. Etant donné un vecteur $x \neq 0$, on a, en notant s la réflexion d'hyperplan $\{x\}^\perp$, $u \circ s = s \circ u$, donc puisque $s(x) = -x$, on en déduit
$$s(u(x)) = u(s(x)) = u(-x) = -u(x),$$
donc $u(x) \in Ker(s + Id) = Vect(x)$. On a donc montré :
$$\forall x \neq 0,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = \lambda_x x.$$
Reste à montrer que le coefficient λ_x ne dépend pas de x, c'est un exercice classique : soit x, y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$, on a
$$u(x) = \lambda_x x, \qquad u(y) = \lambda_y y,$$
ainsi que
$$\begin{cases} u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y \\ u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y \end{cases},$$

donc si (x, y) est libre, on obtient par identification $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$. Et si (x, y) est liée, alors y est colinéaire à x (ou l'inverse). Si par exemple $y = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (l'autre cas est symétrique), alors

$$\begin{cases} u(y) = \alpha u(x) = \alpha\lambda_x x \\ u(y) = \lambda_y y = \alpha\lambda_y x, \end{cases}$$

donc $\lambda_x = \lambda_y$ également (puisque $\alpha x \neq 0$).
Finalement :

$$\exists\lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \neq 0, \quad u(x) = \lambda x,$$

et cela reste vrai pour $x = 0$ (vu que $u(0) = 0$), donc $u = \lambda Id$, et $M = \lambda I_n$.

Enfin, les matrices λI_n (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) commutent avec tout élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (et même avec tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), donc le commutant de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}I_n$ (c'est aussi le commutant de tout l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Exercice 17 (Décomposition QR d'une matrice inversible)**

1. Justifier que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une base (non nécessairement orthonormée) de $\mathbb{R}^n$.
2. On note $T_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
Déduire de la question précédente : $\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), \exists Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists R \in T_n^+(\mathbb{R}), M = QR$.

Corrigé de l'exercice 17

1. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, c'est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. En notant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M, on a u bijectif, donc $\mathcal{B}' = (u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Enfin :
$$M = Mat_{\mathcal{B}}(u) = Mat_{\mathcal{B}}(u(e_1), \cdots, u(e_n)) = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'),$$
donc M est la matrice de passage de la base orthonormée $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
2. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Avec les notations de la question précédente : notons $\mathcal{B}'' = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ obtenue à partir de la base $\mathcal{B}' = (u(e_1), \cdots, u(e_n))$ par le procédé de Gram-Schmidt. On a
$$\varepsilon_1 = \frac{u(e_1)}{\|u(e_1)\|},$$
$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \qquad \varepsilon_{k+1} = \frac{u(e_{k+1}) - \sum_{j=1}^{k}(u(e_{k+1})|\varepsilon_j)\varepsilon_j}{\|u(e_{k+1}) - \sum_{j=1}^{k}(u(e_{k+1})|\varepsilon_j)\varepsilon_j\|}.$$
D'après ces formules, la matrice de passage $T = Mat_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'')$ est triangulaire supérieure (avec éléments diagonaux strictement positifs).
En outre, la matrice de passage $Q = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')$ est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (puisque les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$ sont orthonormées).
Enfin :
$$M = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id) = Mat_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(Id) \times Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(Id) = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') \times Mat_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}') = QT^{-1},$$
d'où la décomposition voulue en posant $R = T^{-1}$ qui est bien triangulaire supérieure (en tant qu'inverse d'une matrice triangulaire supérieure, exercice classique).

V Dimension 2

Exercice 18 (*Etude de matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$)
Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à chacune des matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 18

1. — A est une matrice orthogonale car ses colonnes forment une famille orthonormée.
   — A n'est pas une matrice symétrique donc f est une rotation d'angle θ tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad (mod\ 2\pi).$$

   — En conclusion, f est la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ modulo 2π.
2. — B est une matrice orthogonale car ses colonnes forment une famille orthonormée.
   — B est une matrice symétrique donc f est une symétrie orthogonale.
   On cherche alors les invariants par f : $f((x,y)) = (x,y) \Leftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = (2-\sqrt{3})x$.
   $Ker(f - Id_E) = \left\{(x,(2-\sqrt{3})x)/x \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left((1, 2-\sqrt{3})\right)$.
   — En conclusion, f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $Vect\left((1, 2-\sqrt{3})\right)$.

Exercice 19 (*Détermination de la matrice d'une rotation/réflexion en dim. 2)

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la rotation vectorielle d'angle $\theta = \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la symétrie orthogonale d'axe dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1,2)$.

Corrigé de l'exercice 19

1. Lorsque f est une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle θ sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée directe est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
   Donc la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la rotation d'angle $\arccos(-1/3)$ est la matrice $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$.
2. Commençons par former une base orthonormée constituée d'un vecteur de l'axe et d'un vecteur de l'orthogonal de l'axe. On pose $\overrightarrow{u}' = \dfrac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ et $\overrightarrow{w} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$.
   La famille $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}', \overrightarrow{w})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ (famille libre car orthogonale et contient deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2), et on a $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et c'est une matrice orthogonale.
   On a donc : $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = P\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f)P^{-1} = P\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f)P^T = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 20 (Autre caractérisation des matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$)**

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'on a $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} tr(A^\top A) = 2 \\ \det(A) = 1 \end{cases}$.

Corrigé de l'exercice 20

Le sens $\Rightarrow$ est trivial.
Pour le sens $\Leftarrow$: si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $tr(A^T A) = 2$ et $\det(A) = 1$, alors on a

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2, \qquad ad - bc = 1,$$

donc
$$0 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ad + 2bc = (a-d)^2 + (b+c)^2,$$
ce qui amène $a = d$ et $b = -c$, donc
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$
Ainsi, les colonnes de A sont orthogonales, et même orthonormées puisque $a^2+b^2 = \det(A) = 1$. Donc $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $\det(A) = 1$, c'est-à-dire $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 21 (Décomposition d'une rotation plane)**
Soit E un plan euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

1. Si u est un vecteur non nul de E, on note θ la mesure principale de l'angle (e_1, u). Quelle est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la réflexion par rapport à la droite $Vect(u)$?
2. Que peut-on dire de la composée de deux réflexions ?
3. Que peut-on dire de la composée d'une rotation par une réflexion ?
4. Montrer que le groupe $\mathcal{O}(E)$ est engendré par les réflexions.

Corrigé de l'exercice 21

1. Par hypothèse, nous avons
$$\frac{u}{\|u\|} = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$$
Notons u_1 ce vecteur, et complétons-le en une base orthonormée directe de E en posant
$$u_2 = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$$
(on a bien u_1, u_2 orthogonaux, de norme 1, et $\det_{(e_1,e_2)}(u_1,u_2) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = 1 > 0$).
Notons s la réflexion d'axe $Vect(u)$. La matrice de s dans la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est
$$D = Mat_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Donc
$$Mat_{\mathcal{B}}(s) = PDP^{-1},$$
où $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = R_\theta \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$. Finalement :
$$Mat_{\mathcal{B}}(s) = PDP^T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$
2. En notant s la réflexion d'axe $Vect(u)$ (resp. s' la réflexion d'axe $Vect(u')$), θ la mesure principale de (e_1, u) (resp. θ' la mesure principale de (e_1, u')) on a
$$Mat_{\mathcal{B}}(s \circ s') = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\theta') & \sin(2\theta') \\ \sin(2\theta') & -\cos(2\theta') \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(2(\theta-\theta')) & -\sin(2(\theta-\theta')) \\ \sin(2(\theta-\theta')) & \cos(2(\theta-\theta')) \end{pmatrix} = R_{2(\theta-\theta')},$$
donc $s \circ s'$ est la rotation d'angle $\alpha = 2(\theta - \theta')$.
3. Si r est la rotation d'angle α et s la réflexion d'axe $Vect(u)$ avec θ la mesure principale de (e_1, u), alors
$$Mat_{\mathcal{B}}(r \circ s) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+2\theta) & \sin(\alpha+2\theta) \\ \sin(\alpha+2\theta) & -\cos(\alpha+2\theta) \end{pmatrix},$$

donc d'après la question 1., $r \circ s$ est la réflexion d'axe $Vect(u')$, avec (e_1, u') de mesure principale $\beta = \frac{\alpha}{2} + \theta$.
De même,

$$Mat_{\mathcal{B}}(s \circ r) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(-\alpha + 2\theta) & \sin(-\alpha + 2\theta) \\ \sin(-\alpha + 2\theta) & -\cos(-\alpha + 2\theta) \end{pmatrix},$$

donc $s \circ r$ est la réflexion d'axe $Vect(u'')$, avec (e_1, u'') de mesure principale $\gamma = -\frac{\alpha}{2} + \theta$.

4. On sait que lorsque $\dim(E) = 2$, le groupe $\mathcal{O}(E)$ est formé des rotations et des réflexions.
Il suffit donc de montrer que toute rotation r se décompose en produit de réflexions, et c'est le cas car d'après la question 2., toute rotation r d'angle α s'écrit :

$$r = s \circ s',$$

avec par exemple, s la réflexion d'axe $Vect(u)$ tel que (e_1, u) est de mesure principale $\alpha/2$, et s' la réflexion d'axe $Vect(e_1)$ (cela correspond $(\theta, \theta') = (\alpha/2, 0)$ avec les notations de la question 2.).

Exercice 22 (Composées de rotations et de réflexions planes)**
Soit E un plan euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion de E.

1. A quelle condition s et r commutent-elles ?
2. Calculer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.

Corrigé de l'exercice 22

1. Notons α l'angle de la rotation r et u un vecteur directeur unitaire de l'axe de la réflexion s (comme dans l'exercice précédent). Si $s \circ r = r \circ s$, alors puisque $s(u) = u$, on a en particulier

$$s(r(u)) = r(s(u)) = r(u),$$

donc $r(u) \in Ker(s - Id) = Vect(u)$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $r(u) = \lambda u$, et puisque r conserve la norme, on a nécessairement $\lambda = \pm$. Donc $r(u) = \pm u$.
Si $r(u) = u$, alors $\alpha = (u, r(u)) \equiv 0\ [2\pi]$, donc $r = Id$.
Si $r(u) = -u$, alors $\alpha = (u, r(u)) = (u, -u) \equiv \pi\ [2\pi]$, donc $r = r_\pi = -Id$.
Réciproquement, $r = Id$ et $r = -Id$ commutent bien avec toute réflexion (et même avec tout endomorphisme d'ailleurs), donc

$$r \circ s = s \circ r \iff r = \pm Id.$$

Variante : on peut aussi réutiliser les calculs matriciels et les notations de l'exo précédent :

$$r \circ s = s \circ r \iff \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 2\theta) & \sin(\alpha + 2\theta) \\ \sin(\alpha + 2\theta) & -\cos(\alpha + 2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha + 2\theta) & \sin(-\alpha + 2\theta) \\ \sin(-\alpha + 2\theta) & -\cos(-\alpha + 2\theta) \end{pmatrix}$$

$$\iff \alpha + 2\theta \equiv -\alpha + 2\theta\ [2\pi] \iff 2\alpha \equiv 0\ [2\pi] \iff \alpha \equiv 0\ [\pi] \iff r = \pm Id.$$

2. Puisque $r \circ s$ est une réflexion (c'est une isométrie par composition, de déterminant $\det(r)\det(s) = -1$), on a $(r \circ s)^2 = Id$, donc

$$r \circ s \circ r \circ s = Id.$$

Ainsi, $r \circ (s \circ r \circ s) = Id$, donc $s \circ r \circ s = r^{-1} = r_{-\alpha}$.
De même, $(r \circ s \circ r) \circ s = Id$, donc $r \circ s \circ r = s^{-1} = s$.