Exercices du CH06 : Espaces préhilbertiens et groupe orthogonal

---

Exercices de la banque INP à étudier : ex 76 (inégalité de Cauchy-Schwarz), 77 (relations d'orthogonalité), 78 (propriétés des isométries vectorielles), 79 (produit scalaire intégral), 80 (calcul de projeté orthogonal avec fonctions trigo), 81, 82 (calcul de distance avec des matrices 2*2), 92 (matrices symétriques et antisymétriques)

I Révisions espaces préhilbertiens

Exercice 1 (*Une inégalité)
Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \qquad \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p} \right)^2 .$$

Exercice 2 (*Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^4$)
On considère $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et F l'ensemble défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ x - y + 3z - t = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base $\mathcal{B}$.
2. Grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base $\mathcal{B}$, construire une base orthonormée de F.

Exercice 3 (*Projection et symétrie orthogonales)
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.
3. Calculer l'expression de $p_F(x)$, la projection orthogonale d'un vecteur x quelconque sur F.
4. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, calculer $d(x, F)$.
5. Écrire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale s_F par rapport à F.

Exercice 4 (Noyau et image)**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer $Ker(A)$ et $Ker(A^\top A)$ puis $Im(A)$ et $Im(AA^\top)$.

Exercice 5 (Un contre-exemple)**
Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

et soit $F = \{f \in E, \ f(0) = 0\}$.

1. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
2. En déduire que $E \neq F \oplus F^\perp$ et que $(F^\perp)^\perp \neq F$.

II Polynômes orthogonaux

Exercice 6 (*Polynômes de Legendre)**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction polynomiale P_n, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{d^n}{dx^n}\big((x^2-1)^n\big).$$

Il résulte des conventions habituelles que $P_0(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que le polynôme P_n est de degré n. Quel est le coefficient du terme de degré n dans P_n ?
   (b) Pour quelles valeurs de n la fonction P_n est-elle paire ? impaire ?
   (c) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
2. Soit $n \geq 1$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq m \leq n-1$, $\int_{-1}^{1} P_n(x) x^m dx = 0$.
3. On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace préhilbertien réel des fonctions continues de $[-1\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (u,v) \in \mathcal{E}^2, \qquad (u|v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx.$$

   (a) La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une famille orthogonale dans $\mathcal{E}$?
   (b) Calculer $(P_n|P_n)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
4. (a) Soit $n \geq 1$. Montrer que $\dfrac{d}{dx}\left((x^2-1)\dfrac{dP_n}{dx}(x)\right)$ est orthogonal à x^m pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq m \leq n-1$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est solution de l'équation différentielle

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

Exercice 7 (Polynômes de Laguerre)**
On note E l'ensemble des fonctions réelles f définies et continues sur $[0,+\infty[$ et telles que $t \mapsto e^{-t}\big(f(t)\big)^2$ est intégrable.
On note F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles définies sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions polynomiales de degré $\leq n$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : \left\{\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^n e^{-t} \end{array}\right.$ et $L_n : \left\{\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^t \varphi_n^{(n)}(t) \end{array}\right.$.

1. Soit $(f,g) \in E^2$. Montrer que $t \mapsto e^{-t} f(t)g(t)$ est intégrable.
2. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $(f|g) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.
3. Vérifier rapidement que F est un sous-espace vectoriel de E.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que L_n est un élément de F. On précisera le degré de L_n et le coefficient $a_{n,k}$ de t^k dans l'expression de L_n.
5. Expliciter L_0 et L_1.
6. Montrer que pour $k < n$, $\varphi_n^{(k)}(0) = 0$.
7. Calculer, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $(L_n|L_m)$.
8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(\frac{1}{k!} L_k\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de F_n.
9. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\big(t^2 - (at+b)\big)^2 \,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 (Polynômes de Hermite)**
On note E l'ensemble des fonctions réelles f définies et continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $t \mapsto e^{-t^2}\big(f(t)\big)^2$ est intégrable.
On note F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles définies sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
On définit $w : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x^2}\end{array}\right.$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)\end{array}\right.$. En particulier H_0 est la fonction constante égale à 1.

1. Soit $(f,g) \in E^2$. Montrer que $t \mapsto e^{-t^2} f(t)g(t)$ est intégrable.
2. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $(f|g) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.
3. Vérifier rapidement que F est un sous-espace vectoriel de E.
4. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$.
5. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_n est un élément de F. On précisera le degré de H_n et son coefficient dominant.
7. Montrer, pour tout $n \geq 1$ et tout $P \in F$, $(P'|H_{n-1}) = (P|H_n)$.
8. En déduire que, pour tout $n \geq 1$ et tout $P \in F_{n-1}$, $(P|H_n) = 0$.
9. En déduire que $(H_0, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de F_n.

III Isométries

Exercice 9 (*Un exemple d'isométrie)
Soit E un espace vectoriel euclidien non réduit à 0. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi_x : & E & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & y - \dfrac{2(x|y)}{\|x\|^2}x, \end{array}$$

où $(.|.)$ désigne le produit scalaire sur E.
Montrer que ϕ_x est une isométrie vectorielle et la reconnaître.

Exercice 10 (*Noyau et image)
Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $Ker(f - Id_E) = Im(f - Id_E)^{\perp}$.

Exercice 11 (Une isométrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)**
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $f_A : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM\end{array}\right.$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f_A soit une isométrie vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique (pour rappel il est défini par $(A|B) = Tr(A^{\top}B)$).

IV Matrices orthogonales

Exercice 12 (*Trace maximale d'une matrice orthogonale)
Quelle est la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 13 (*Somme des coeff. d'une matrice orthogonale)
Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit u une isométrie vectorielle de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

1. Trouver un vecteur $x \in E$ tel que $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = (u(x)|x)$.
2. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}\right| \leq n$.

Exercice 14 (Matrices orthogonales et triangulaires)**
Quelles sont les matrices triangulaires de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 15 (*Matrices orthogonales à coefficients positifs)**
Déterminer les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

Exercice 16 (Commutant de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$)**
Montrer que le commutant de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}I_n$.
C'est-à-dire qu'il faut prouver que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ M\Omega = \Omega M\} = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 17 (Décomposition QR d'une matrice inversible)**

1. Justifier que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une base (non nécessairement orthonormée) de $\mathbb{R}^n$.
2. On note $T_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
Déduire de la question précédente : $\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), \exists Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists R \in T_n^+(\mathbb{R}), M = QR$.

V Dimension 2

Exercice 18 (*Etude de matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$)
Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à chacune des matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 (*Détermination de la matrice d'une rotation/réflexion en dim. 2)

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la rotation vectorielle d'angle $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la symétrie orthogonale d'axe dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 2)$.

Exercice 20 (Autre caractérisation des matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$)**
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'on a $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} tr(A^\top A) = 2 \\ \det(A) = 1 \end{cases}$.

Exercice 21 (Décomposition d'une rotation plane)**
Soit E un plan euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

1. Si u est un vecteur non nul de E, on note θ la mesure principale de l'angle (e_1, u). Quelle est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la réflexion par rapport à la droite $Vect(u)$?
2. Que peut-on dire de la composée de deux réflexions ?
3. Que peut-on dire de la composée d'une rotation par une réflexion ?
4. Montrer que le groupe $\mathcal{O}(E)$ est engendré par les réflexions.

Exercice 22 (Composées de rotations et de réflexions planes)**
Soit E un plan euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion de E.

1. A quelle condition s et r commutent-elles ?
2. Calculer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.