Exercices du CH06 : Espaces préhilbertiens et groupe orthogonal

Exercices de la banque INP à étudier : ex 76 (inégalité de Cauchy-Schwarz), 77 (relations d'orthogonalité), 78 (propriétés des isométries vectorielles), 79 (produit scalaire intégral), 80 (calcul de projeté orthogonal avec fonctions trigo), 81, 82 (calcul de distance avec des matrices 2×2), 92 (matrices symétriques et antisymétriques)

I Révisions espaces préhilbertiens

Exercice 1 (*Une inégalité)

Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p} \right)^2.$$

Exercice 2 (*Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^4$)

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et F l'ensemble défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + 3z - t = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base $\mathcal{B}$.
2. Grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base $\mathcal{B}$, construire une base orthonormée de F .

Exercice 3 (*Projection et symétrie orthogonales)

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et le sous-espace vectoriel

$$F = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

1. Déterminer une base orthonormale de F .
2. Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.
3. Calculer l'expression de $p_F(x)$, la projection orthogonale d'un vecteur x quelconque sur F .
4. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, calculer $d(x, F)$.
5. Écrire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale s_F par rapport à F .

Exercice 4 (**Noyau et image)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer $\text{Ker}(A)$ et $\text{Ker}(A^\top A)$ puis $\text{Im}(A)$ et $\text{Im}(AA^\top)$.

Exercice 5 (**Un contre-exemple)

Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

et soit $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

1. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
2. En déduire que $E \neq F \oplus F^\perp$ et que $(F^\perp)^\perp \neq F$.

II Polynômes orthogonaux

Exercice 6 (**Polynômes de Legendre)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction polynomiale P_n , définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n).$$

Il résulte des conventions habituelles que $P_0(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que le polynôme P_n est de degré n . Quel est le coefficient du terme de degré n dans P_n ?
 - Pour quelles valeurs de n la fonction P_n est-elle paire ? impaire ?
 - Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
- Soit $n \geq 1$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq m \leq n - 1$, $\int_{-1}^1 P_n(x)x^m dx = 0$.
- On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace préhilbertien réel des fonctions continues de $[-1; 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{E}^2, \quad (u|v) = \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx.$$

- La famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle une famille orthogonale dans $\mathcal{E}$?
 - Calculer $(P_n|P_n)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
- Soit $n \geq 1$. Montrer que $\frac{d}{dx} \left((x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx}(x) \right)$ est orthogonal à x^m pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq m \leq n - 1$.
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est solution de l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n + 1)y = 0.$$

Exercice 7 (**Polynômes de Laguerre)

On note E l'ensemble des fonctions réelles f définies et continues sur $[0, +\infty[$ et telles que $t \mapsto e^{-t}(f(t))^2$ est intégrable.

On note F le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles définies sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions polynomiales de degré $\leq n$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^n e^{-t} \end{cases}$ et $L_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^t \varphi_n^{(n)}(t) \end{cases}$.

- Soit $(f, g) \in E^2$. Montrer que $t \mapsto e^{-t}f(t)g(t)$ est intégrable.
- Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que $(f|g) = \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .
- Vérifier rapidement que F est un sous-espace vectoriel de E .
- Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que L_n est un élément de F . On précisera le degré de L_n et le coefficient $a_{n,k}$ de t^k dans l'expression de L_n .
- Expliciter L_0 et L_1 .
- Montrer que pour $k < n$, $\varphi_n^{(k)}(0) = 0$.
- Calculer, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $(L_n|L_m)$.
- En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(\frac{1}{k!}L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de F_n .
- Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - (at + b))^2 dt$.

Exercice 8 (Polynômes de Hermite)**

On note E l'ensemble des fonctions réelles f définies et continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $t \mapsto e^{-t^2} (f(t))^2$ est intégrable.

On note F le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles définies sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

On définit $w : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x^2} \end{cases}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x) \end{cases}$. En particulier H_0 est la fonction constante égale à 1.

1. Soit $(f, g) \in E^2$. Montrer que $t \mapsto e^{-t^2} f(t)g(t)$ est intégrable.
2. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que $(f|g) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .
3. Vérifier rapidement que F est un sous-espace vectoriel de E .
4. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$.
5. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_n est un élément de F . On précisera le degré de H_n et son coefficient dominant.
7. Montrer, pour tout $n \geq 1$ et tout $P \in F$, $(P'|H_{n-1}) = (P|H_n)$.
8. En déduire que, pour tout $n \geq 1$ et tout $P \in F_{n-1}$, $(P|H_n) = 0$.
9. En déduire que $(H_0, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de F_n .

III Isométries**Exercice 9 (*Un exemple d'isométrie)**

Soit E un espace vectoriel euclidien non réduit à 0. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on considère l'application

$$\phi_x : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & y - \frac{2(x|y)}{\|x\|^2} x, \end{cases}$$

où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire sur E .

Montrer que ϕ_x est une isométrie vectorielle et la reconnaître.

Exercice 10 (*Noyau et image)

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp$.

Exercice 11 (Une isométrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)**

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $f_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{cases}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f_A soit une isométrie vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique (pour rappel il est défini par $(A|B) = \text{Tr}(A^\top B)$).

IV Matrices orthogonales**Exercice 12 (*Trace maximale d'une matrice orthogonale)**

Quelle est la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 13 (*Somme des coeff. d'une matrice orthogonale)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Soit u une isométrie vectorielle de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

1. Trouver un vecteur $x \in E$ tel que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = (u(x)|x)$.

2. Montrer que $\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$.

Exercice 14 (Matrices orthogonales et triangulaires)**

Quelles sont les matrices triangulaires de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 15 (Matrices orthogonales à coefficients positifs)**

Déterminer les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

Exercice 16 (Commutant de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$)**

Montrer que le commutant de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}I_n$.

C'est-à-dire qu'il faut prouver que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), M\Omega = \Omega M\} = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 17 (Décomposition QR d'une matrice inversible)**

- Justifier que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une base (non nécessairement orthonormée) de $\mathbb{R}^n$.
- On note $T_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
Déduire de la question précédente : $\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), \exists Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists R \in T_n^+(\mathbb{R}), M = QR$.

V Dimension 2**Exercice 18 (*Etude de matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$)**

Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à chacune des matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 (*Détermination de la matrice d'une rotation/réflexion en dim. 2)

- Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la rotation vectorielle d'angle $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.
- Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la symétrie orthogonale d'axe dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, 2)$.

Exercice 20 (Autre caractérisation des matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$)**

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'on a $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} \text{tr}(A^T A) = 2 \\ \det(A) = 1 \end{cases}$.

Exercice 21 (Décomposition d'une rotation plane)**

Soit E un plan euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

- Si u est un vecteur non nul de E , on note θ la mesure principale de l'angle (e_1, u) . Quelle est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la réflexion par rapport à la droite $\text{Vect}(u)$?
- Que peut-on dire de la composée de deux réflexions ?
- Que peut-on dire de la composée d'une rotation par une réflexion ?
- Montrer que le groupe $\mathcal{O}(E)$ est engendré par les réflexions.

Exercice 22 (Composées de rotations et de réflexions planes)**

Soit E un plan euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion de E .

- A quelle condition s et r commutent-elles ?
- Calculer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.