Exercices du CH05 : Espaces vectoriels normés - généralités

Exercices de la banque INP à étudier : aucun pour l'instant, il faut attendre le second chapitre sur les evn (topologie).

I Normes et boules

Exercice 1 (*Ajuster les paramètres)
Pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, on définit $N : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & \sqrt{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2} \end{array} \right.$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (α, β, γ) pour que N soit une norme.

Corrigé de l'exercice 1
Voyons d'abord si l'application N est bien définie. Si $\alpha < 0$, alors $N(1, 0, 0) = \sqrt{\alpha}$ n'est pas défini, donc nécessairement $\alpha \geq 0$, et de même $\beta \geq 0$ et $\gamma \geq 0$.
Supposons donc $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ et voyons si N est une norme sur $\mathbb{R}^3$. Si $\alpha = 0$, alors $N(1, 0, 0) = 0$, alors que $(1, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$, donc N n'est pas une norme. De même si $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$. Les conditions $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ sont donc nécessaires pour que N soit une norme.
Montrons qu'elles sont suffisantes : si $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, alors l'application N est bien définie, à valeurs positives. La propriété de séparation est vérifiée car :

$$N(x, y, z) = 0 \iff \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0 \iff \alpha x^2 = \beta y^2 = \gamma z^2 = 0$$

(puisque c'est une somme nulle de termes positifs), et donc

$$N(x, y, z) = 0 \iff (x, y, z) = (0, 0, 0).$$

Quant à l'homogénéité et l'inégalité triangulaire, elles sont directement vérifiées car pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$N(x, y, z) = \|(\sqrt{\alpha}\, x, \sqrt{\beta}\, y, \sqrt{\gamma}\, z)\|_2,$$

où $\|.\|_2$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^3$.
Finalement, N est une norme sur $\mathbb{R}^3$ ssi α, β, γ sont strictement positifs.

Exercice 2 (*Une norme sur $\mathbb{R}^2$ et sa boule unité)

1. Montrer que $N : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \max(|x|, |y|, |x - y|) \end{array} \right.$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter la boule unité fermée pour cette norme.

Corrigé de l'exercice 2

1. Il est clair que $N(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^+$, puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les quantités $|x|$, $|y|$ et $|x - y|$ sont positives.
   Si $N(x, y) = 0$, alors $\max(|x|, |y|, |x - y|) = 0$, et par positivité de $|x|, |y|, |x - y|$, on en déduit que $|x| = |y| = |x - y| = 0$, ce qui implique $(x, y) = (0, 0)$.
   Pour tout réel λ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

   $$N(\lambda(x, y)) = N(\lambda x, \lambda y) = \max(|\lambda||x|, |\lambda||y|, |\lambda||x - y|).$$

   Vu que $|\lambda| \geq 0$, on en déduit :

   $$N(\lambda(x, y)) = |\lambda| \max(|x|, |y|, |x - y|) = |\lambda| N(x, y).$$

   Enfin, pour tout (x, y) et (a, b) dans $\mathbb{R}^2$, on a

   $$N((x, y) + (a, b)) = N(x + a, y + b) = \max(|x + a|, |y + b|, |x + a - y - b|).$$

Or, on a les inégalités

$$|x+a| \leq |x| + |a| \leq N(x,y) + N(a,b),$$
$$|y+b| \leq |y| + |b| \leq N(x,y) + N(a,b),$$
$$|x+a-y-b| \leq |x-y| + |a-b| \leq N(x,y) + N(a,b),$$

donc $\max(|x+a|, |y+b|, |x+a-y-b|) \leq N(x,y) + N(a,b)$, ce qui montre que

$$N((x,y)+(a,b)) \leq N(x,y) + N(a,b).$$

Donc N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.

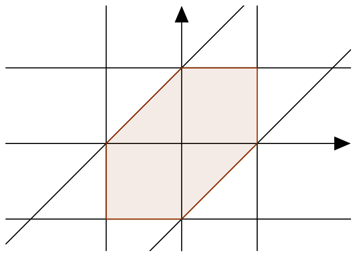
2. Notons $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ N(x,y) \leq 1\}$ la boule unitée fermée de l'evn $(\mathbb{R}^2, N)$. On a :

$$(x,y) \in B \iff |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1 \text{ et } |x-y| \leq 1,$$

c'est-à-dire

$$(x,y) \in B \iff -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ x-1 \leq y \leq x+1,$$

ce qui permet de représenter la boule B :



Exercice 3 (*Conditions équivalentes pour être une norme)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

(*i*) $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$, $N(x) > 0$.

(*ii*) $N(0_E) = 0$.

(*iii*) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $N(\lambda x + y) \leq |\lambda| N(x) + N(y)$.

Montrer que N est une norme.

Corrigé de l'exercice 3
Les propriétés (*i*) et (*ii*) assurent que $N : E \to \mathbb{R}^+$ et que $(N(x) = 0 \implies x = 0_E)$.
La propriété (*iii*) utilisée avec $\lambda = 1$ donne l'inégalité triangulaire. Reste à montrer l'homogénéité.
La propriété (*iii*) utilisée avec $y = 0$ donne (puisque $N(0_E) = 0$) :

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \qquad N(\lambda x) \leq |\lambda| N(x),$$

mais aussi

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K}^* \times E, \qquad N(x) = N\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda x)\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda x),$$

c'est-à-dire $N(\lambda x) \geq |\lambda| N(x)$, donc en définitive, on a bien

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K}^* \times E, \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x),$$

et cela reste vrai pour $\lambda = 0$. Donc N est bien une norme.

Exercice 4 (*Norme intégrale)
Soient $E = C([0,1], \mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}^*$, $(f_1, \ldots, f_p) \in E^p$ et

$$N : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^p x_k f_k(t) \right| dt \end{array} \right. .$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(f_1, \ldots, f_p)$ pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^p$.

Corrigé de l'exercice 4

L'application N est bien définie et à valeurs positives, car la fonction $t \mapsto \left|\sum_{k=1}^{p} x_k f_k(t)\right|$ est continue et positive sur le segment $[0,1]$.
N vérifie également la propriété d'homogénéité et l'inégalité triangulaire car pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \cdots, x_p), y = (y_1, \cdots, y_p) \in \mathbb{R}^p$:

$$N(\lambda x) = \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{p} \lambda x_k f_k(t)\right| dt = \int_0^1 |\lambda| \left|\sum_{k=1}^{p} x_k f_k(t)\right| dt = |\lambda| \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{p} x_k f_k(t)\right| dt = |\lambda| N(x),$$

$$N(x+y) = \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{p} (x_k + y_k) f_k(t)\right| dt \leq \int_0^1 \left(\left|\sum_{k=1}^{p} x_k f_k(t)\right| + \left|\sum_{k=1}^{p} y_k f_k(t)\right|\right) dt = N(x) + N(y),$$

par linéarité et croissance de l'intégrale. Reste à vérifier la séparation :

$$N(x) = 0 \iff \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{p} x_k f_k(t)\right| dt = 0 \iff \forall t \in [0,1], \ \left|\sum_{k=1}^{p} x_k f_k(t)\right| = 0,$$

puisque la fonction $t \mapsto \left|\sum_{k=1}^{p} x_k f_k(t)\right|$ est continue et positive. On a donc

$$N(x) = 0 \iff \sum_{k=1}^{p} x_k f_k = 0_E.$$

La propriété de séparation ($N(x) = 0 \implies x = 0$) équivaut donc à

$$\sum_{k=1}^{p} x_k f_k = 0_E \implies x_1 = \cdots = x_p = 0,$$

elle est donc vraie si et seulement si la famille $(f_1, \cdots, f_p)$ est libre.
En définitive, N est une norme si et seulement si $(f_1, \cdots, f_p)$ est une famille libre.

Exercice 5 (Inégalités avec une norme)**
Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$.
2. Soit $(x,y,z) \in E^3$ tel que $x + y + z = 0_E$.
   Montrer : $3(\|x\| + \|y\| + \|z\|) \leq 2(\|x-y\| + \|y-z\| + \|z-x\|)$.

Corrigé de l'exercice 5

1. On décompose :
$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, \qquad y = \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}.$$
   On obtient alors par l'inégalité triangulaire :
$$\|x\| + \|y\| \leq \left\|\frac{x+y}{2}\right\| + \left\|\frac{x-y}{2}\right\| + \left\|\frac{x+y}{2}\right\| + \left\|\frac{y-x}{2}\right\| = \|x+y\| + \|x-y\|.$$

2. Là encore, il faut décomposer astucieusement :
$$x = \underbrace{\frac{x+y+z}{3}}_{=0_E} + \frac{x-y}{3} + \frac{x-z}{3},$$
   donc par inégalité triangulaire :
$$\|x\| \leq \frac{1}{3}(\|x-y\| + \|x-z\|).$$

De même, on a

$$\|y\| \leq \frac{1}{3}(\|y-z\|+\|y-x\|), \qquad \|z\| \leq \frac{1}{3}(\|z-x\|+\|z-y\|),$$

donc en additionnant :

$$\|x\|+\|y\|+\|z\| \leq \frac{2}{3}(\|x-y\|+\|x-z\|+\|y-z\|).$$

Exercice 6 (Diamètre d'une partie bornée)**

1. Montrer que si A est une partie non vide et bornée d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, alors l'ensemble $D=\{d(x,y),\ (x,y)\in A^2\}$ possède une borne supérieure.
   On appelle par la suite cette borne supérieure le ***diamètre*** *de A.*
2. Déterminer le diamètre d'une boule ouverte et d'une boule fermée (dans un espace vectoriel normé E non nul).

Corrigé de l'exercice 6

1. L'ensemble $D=\{d(x,y),\ (x,y)\in A^2\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car A^2 est non vide puisque A est non vide) et majorée : en effet, par hypothèse, il existe $M>0$ tel que $\forall x\in A,\ \|x\|\leq M$, donc
   $$(x,y)\in A^2 \implies d(x,y)=\|x-y\|\leq\|x\|+\|y\|\leq 2M.$$
   Donc D possède une borne supérieure. On pose $\delta(A)=\sup(D)$ le diamètre de A.
2. Soit $a\in E$ et $r>0$. Montrons que $\delta(B(a,r))=2r$.
   Déjà, pour x et y dans $B(a,r)$, on a
   $$d(x,y)\leq d(x,a)+d(a,y)<r+r=2r,$$
   donc $2r$ est un majorant de D. Montrons maintenant que $2r$ est le plus petit majorant de D : fixons $\varepsilon>0$ et montrons que $2r-\varepsilon$ ne majore plus D. Il suffit pour cela de construire deux points x,y diamétralement opposés de $B(a,r)$, tels que $d(x,y)>2r-\varepsilon$, en posant :
   $$x=a+(r-\varepsilon/4)\frac{u}{\|u\|}, \qquad y=a-(r-\varepsilon/4)\frac{u}{\|u\|},$$
   où $u\in E\setminus\{0\}$. On a bien
   $$\|x-a\|=\|y-a\|=r-\varepsilon/4<r, \qquad \|x-y\|=2r-\varepsilon/2>2r-\varepsilon.$$
   Finalement, on a bien $\delta(B(a,r))=\sup(D)=2r$, et de même pour la boule fermée $B_f(a,r)$ puisque $B(a,r)\subset B_f(a,r)$, donc
   $$\delta(B_f(a,r))\geq\delta(B(a,r))=2r,$$
   et pour tout x,y dans $B_f(a,r)$:
   $$d(x,y)\leq d(x,a)+d(a,y)\leq r+r=2r,$$
   ce qui permet de conclure que $\delta(B_f(a,r))=2r$.

Exercice 7 (Boules confondues)**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, N_1 et N_2 deux normes sur E, $a\in E$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$.
On suppose $B_f^{N_1}(a,r)=B_f^{N_2}(a,r)$ (c'est-à-dire que les boules fermées de centre a et de rayon r sont les mêmes pour les deux normes). Prouver qu'on a $N_1=N_2$.

Corrigé de l'exercice 7

Soit $x\in E\setminus\{0_E\}$. En posant $y=a+r\frac{x}{N_1(x)}$, on a $y\in B_f^{N_1}(a,r)$ car $N_1(y-a)=r$. Donc, par hypothèse d'égalité des boules, on en déduit que $y\in B_f^{N_2}(a,r)$, c'est-à-dire $N_2(y-a)\leq r$, ou encore

$$r\frac{N_2(x)}{N_1(x)}\leq r.$$

Donc, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $N_2(x) \leq N_1(x)$, et par symétrie des rôles, $N_2(x) = N_1(x)$. Cela reste vrai pour $x = 0_E$ (toute norme est nulle en 0_E), donc on a bien $N_1 = N_2$.

Exercice 8 (*Normes de Hölder sur $\mathbb{K}^n$)**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]1; +\infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ (*inégalité de Young*).

   On introduit $\|.\|_p$: $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \left(\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}\right.$ et on définit $\|.\|_q$ selon le même principe.
2. Montrer, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$:
   (a) $\left|\sum\limits_{k=1}^n \overline{x_k} y_k\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ (*inégalité de Hölder*, qui généralise celle de Cauchy-Schwarz).
   (b) $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ (*inégalité de Minkowski*).
3. En déduire que $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$, appelée **norme de Hölder**.
4. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$: $\|x\|_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \|x\|_\infty$.

Corrigé de l'exercice 8

1. On utilise la concavité de la fonction ln (sa dérivée seconde est négative) : puisque $1/p$ et $1/q$ sont positifs et de somme 1, on a, pour tout $a, b > 0$:
$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab),$$
   donc par croissance de exp, on en déduit
$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$
   et cela reste vrai lorsque $a = 0$ ou $b = 0$.
2. (a) Plaçons-nous dans le cas $x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ et $y \neq 0_{\mathbb{K}^n}$. On a alors $\|x\|_p > 0$ et $\|y\|_q > 0$ (facilement d'après l'expression de $\|.\|_p$). Il s'agit ici de montrer que
$$\left|\sum_{k=1}^n \frac{\overline{x_k}}{\|x\|_p} \times \frac{y_k}{\|y\|_q}\right| \leq 1,$$
   et cela résulte directement de l'inégalité de Young précédemment montrée, puisque
$$\left|\sum_{k=1}^n \frac{\overline{x_k}}{\|x\|_p} \times \frac{y_k}{\|y\|_q}\right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \times \frac{|y_k|}{\|y\|_q} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{|x_k|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|x_k|^q}{q\|x\|_q^q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
   On a donc bien
$$\left|\sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$
   Dans le cas où $x = 0_{\mathbb{K}^n}$ ou $y = 0_{\mathbb{K}^n}$, cette inégalité reste vraie, puisque ses deux membres sont nuls.

   (b) Nous avons, par inégalité triangulaire "classique" sur $\mathbb{C}$:
$$\begin{aligned} \|x+y\|_p^p &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} |x_k| + \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} |y_k| \end{aligned}$$

On applique alors l'inégalité de Hölder aux deux sommes :

$$\|x+y\|_p^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \|x\|_p + \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \|y\|_p,$$

ce qui se réécrit :

$$\|x+y\|_p^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}} \|x\|_p + \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}} \|y\|_p,$$

ou encore

$$\|x+y\|_p^p \leq \|x+y\|_p^{p-1}(\|x\|_p + \|y\|_p),$$

Si $x+y$ est non nul, on obtient en divisant par $\|x+y\|_p^{p-1} > 0$ l'inégalité voulue :

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p,$$

qui reste évidemment vraie si $x+y = 0_{\mathbb{K}^n}$.

3. Les propriétés de positivité, séparation et homogénéité de l'application $x \mapsto \|x\|_p$ sont évidentes. L'inégalité triangulaire est l'inégalité de Minskowski précedemment montrée. Donc $x \mapsto \|x\|^p$ est bien une norme sur $\mathbb{K}^n$ pour tout réel $p > 1$.
4. Fixons $x \in \mathbb{K}^n$. Pour tout réel $p > 1$, nous avons

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Tous les termes de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p$ sont inférieurs ou égaux à $\|x\|_\infty^p$, et au moins l'un d'entre eux est égal à $\|x\|_\infty^p$, donc

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty.$$

En faisant tendre $p \to +\infty$, on obtient alors le résultat voulu :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \qquad \|x\|_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\|_\infty.$$

Remarque
Cette double inégalité confirme que toutes les normes $\|.\|_p$ sont équivalentes à $\|.\|_\infty$, et on montre facilement que les constantes de l'inégalité sont optimales.

II Comparaison de normes

Exercice 9 (*Normes matricielles)
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On considère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les applications N_∞, N_c et N_ℓ définies ainsi : pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$N_\infty(A) = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|, \quad N_c(A) = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|, \quad N_\ell(A) = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|,$$

Montrer que ce sont des normes, qu'elles sont équivalentes, puis déterminer les constantes de domination optimales.

Corrigé de l'exercice 9

- N_∞ **est une norme** :
  * l'application N_∞ est bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et à valeurs positives puisque pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, l'ensemble $\{|a_{i,j}|,\ 1 \leq i,j \leq n\}$ est une partie non vide et finie de $\mathbb{R}^+$, donc elle admet une borne supérieure positive (qui est même un maximum).

   * séparation : si $N_\infty(A) = 0$, alors par positivité des $|a_{i,j}|$, on a $|a_{i,j}| = 0$ pour tout couple (i, j), donc la matrice A est nulle.
   * homogénéité : pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$N_\infty(\lambda A) = \max_{1\leq i,j\leq n} |\lambda a_{i,j}| = \max_{1\leq i,j\leq n} |\lambda| \times |a_{i,j}| = |\lambda| \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| = |\lambda| N_\infty(A),$$

   car $|\lambda| \geq 0$ (donc on peut "le sortir du sup").
   * inégalité triangulaire : soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Pour tout couple (i, j), on a

$$|a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leq N_\infty(A) + N_\infty(B),$$

   donc le réel $N_\infty(A) + N_\infty(B)$ majore l'ensemble $\{|a_{i,j} + b_{i,j}|, 1 \leq i, j \leq n\}$, ce qui entraîne que

$$\max_{i,j} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq N_\infty(A) + N_\infty(B),$$

   c'est-à-dire

$$N_\infty(A + B) \leq N_\infty(A) + N_\infty(B).$$

- N_c **est une norme** :
   * l'application N_c est bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et à valeurs positives puisque pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, l'ensemble $\{\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|,\ 1 \leq j \leq n\}$ est une partie non vide et finie de $\mathbb{R}^+$, donc elle admet une borne supérieure positive (qui est même un maximum).
   * séparation : si $N_c(A) = 0$, alors par positivité des sommes $\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$, on obtient

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| = 0.$$

   Par positivité des termes $|a_{i,j}|$ cela entraîne

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,j}| = 0,$$

   donc la matrice A est nulle.
   * homogénéité : pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$N_c(\lambda A) = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |\lambda a_{i,j}| = \max_{1\leq j\leq n} |\lambda| \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| = |\lambda| \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| = |\lambda| N_c(A),$$

   car $|\lambda| \geq 0$ (donc on peut "le sortir du sup").
   * inégalité triangulaire : soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\sum_{i=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{i=1}^n |b_{i,j}| \leq N_c(A) + N_c(B),$$

   donc le réel $N_c(A)+N_c(B)$ majore l'ensemble $\{\sum_{i=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}|,\ 1 \leq j \leq n\}$, ce qui entraîne que

$$\max_j \sum_{i=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq N_c(A) + N_c(B),$$

   c'est-à-dire

$$N_c(A + B) \leq N_c(A) + N_c(B).$$

- N_ℓ **est une norme** : similaire à N_c, économisons le papier !
  Ou alors on remarque que $N_\ell(A) = N_c(A^T)$ et ça va tout seul.
- **Comparaison** N_∞/N_c : on obtient facilement

$$N_\infty \leq N_c \leq nN_\infty,$$

  donc N_∞ et N_c sont équivalentes. De plus, ces constantes sont optimales car avec $A = I_n$, on a $N_\infty(A) = N_c(A) = 1$ et avec B la matrice dont tous les coefficients valent 1, on obtient $N_c(B) = n = n \times N_\infty(B)$.

- **Comparaison** N_∞/N_ℓ : en tout point identique à la comparaison précédente. Les inégalités optimales sont
$$N_\infty \leq N_\ell \leq nN_\infty.$$
- **Comparaison** N_c/N_ℓ : en utilisant les deux comparaisons précédentes, on a
$$N_c \leq nN_\infty \leq nN_\ell,$$
ainsi que
$$N_\ell \leq nN_\infty \leq nN_c,$$
d'où l'encadrement
$$\frac{1}{n}N_c \leq N_\ell \leq nN_c.$$
De plus, ces deux constantes sont optimales car avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, on a $N_\ell(A) = 1 = \frac{1}{n}N_c(A)$, et avec $B = A^T$, on a $N_\ell(B) = n = nN_c(B)$.

Exercice 10 (*Normes polynomiales)
Pour $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_1(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N_\infty(P) = \max\{|a_k|,\ 0 \leq k \leq n\}$.
1. Montrer que N_1 et N_∞ définissent des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Laquelle des deux domine l'autre ?
   Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Corrigé de l'exercice 10

1. • N_1 **est une norme sur** $\mathbb{R}[X]$:
   * L'application N_1 est bien définie sur $\mathbb{R}[X]$ et à valeurs positives (somme finie de réels positifs).
   * Séparation : si $N_1(P) = 0$, alors par positivité des $|a_k|$, la nullité de la somme $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ entraîne que $|a_k| = 0$ pour tout k, donc le polynôme P est nul.
   * Homogénéité : pour tout $(P, \lambda) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}$:
   $$N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{n} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^{n} |a_k| = |\lambda| N_1(P).$$
   * Inégalité triangulaire : pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on peut noter (quitte à rajouter des coefficients nuls) :
   $$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \qquad Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k,$$
   avec $n \in \mathbb{N}$, , donc
   $$P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k.$$
   Ainsi, par inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$:
   $$N_1(P+Q) = \sum_{k=0}^{n} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=0}^{n} (|a_k| + |b_k|) = N_1(P) + N_1(Q).$$

   • N_∞ **est une norme sur** $\mathbb{R}[X]$:
   * L'application N_∞ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]$ et à valeurs positives car pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ fixé, l'ensemble $\{|a_k|,\ 0 \leq k \leq n\}$ est une partie non vide et finie de $\mathbb{R}^+$, donc elle possède un maximum dans $\mathbb{R}^+$.

* Séparation : si $N_\infty(P) = 0$, alors par positivité des $|a_k|$, on obtient $|a_k| = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, donc P est le polynôme nul.
* Homogénéité : pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$N_\infty(\lambda P) = \max_{0\leq k\leq n} |\lambda a_k| = \max_{0\leq k\leq n} |\lambda| \times |a_k| = |\lambda| \max_{0\leq k\leq n} |a_k| = |\lambda| N_\infty(P),$$
car $|\lambda| \geq 0$ (donc on peut le "sortir du max").
* Inégalité triangulaire : pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on peut noter (quitte à rajouter des coefficients nuls) :
$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \qquad Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k,$$
avec $n \in \mathbb{N}$, donc
$$P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k.$$
On a, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:
$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q).$$
Ainsi, le réel $N_\infty(P) + N_\infty(Q)$ majore l'ensemble $\{|a_k + b_k|, \ 0 \leq k \leq n\}$, ce qui entraîne que
$$\max_{0\leq k\leq n} |a_k + b_k| \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q),$$
c'est-à-dire
$$N_\infty(P + Q) \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q).$$

2. De façon évidente, nous avons
$$N_\infty \leq N_1,$$
puisque pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, il existe $i \in \{0, \cdots, n\}$ tel que $|a_i| = N_\infty(P)$, donc
$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \geq |a_i| = N_\infty(P).$$
Ceci montre que N_1 domine N_∞.
Montrons maintenant que N_∞ ne domine pas N_1.

Remarque
Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$:
$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq (n+1) \max_{0\leq k\leq n} |a_k| = (n+1) N_\infty(P),$$
mais cette inégalité ne montre pas la domination puisque la constante $n+1$ dépend de P (via son degré) !

Par l'absurde, supposons qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}^+$ telle que
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \qquad N_1(P) \leq C N_\infty(P).$$
En considérant alors la suite $P_n = 1 + X + \cdots + X^n$, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n + 1 \leq C,$$
ce qui est absurde ($\mathbb{N}$ n'est pas majoré). Donc N_∞ ne domine pas N_1, et ces deux normes ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$.

Remarque
Si on se limite à $\mathbb{R}_n[X]$ (où $n \in \mathbb{N}$ est fixé), alors l'encadrement

$$N_\infty \leq N_1 \leq (n+1)N_\infty$$

montre que N_1 et N_∞ sont équivalentes sur $\mathbb{R}_n[X]$ (puisque la constante $n+1$ est valable pour tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$). C'est normal, car en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (théorème difficile qu'on verra dans le cours de topologie).

Il est donc nécessaire de se placer en dimension infinie (comme dans $\mathbb{R}[X]$) pour trouver des normes non équivalentes).

Exercice 11 (Normes intégrales)**
Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose :

$$N_0(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt \quad \text{et} \quad N_1(f) = |f(1)| + \int_0^1 |f'(t)|dt.$$

Montrer que N_0 et N_1 sont des normes, puis les comparer.
Indication : pour comparer N_0 et N_1, on pourra songer à relier $f(0)$ et $f(1)$ à l'aide de f'.

Corrigé de l'exercice 11

- **N_0 est une norme sur E :**
  * L'application N_0 est bien définie sur E et à valeurs positives car étant donnée $f \in E$, les fonctions f et f' sont continues sur le segment $[0,1]$, donc $|f'|$ aussi, ce qui assure l'existence de $\int_0^1 |f'|$. La positivité des deux termes de $N_0(f)$ vient de la positivité des fonctions $|f|$ et $|f'|$.
  * Séparation : si $N_0(f) = 0$, alors $|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt = 0$. C'est une somme nulle de deux réels positifs, donc $|f(0)| = \int_0^1 |f'| = 0$. Ainsi on a $f(0) = 0$ ainsi que $f' = 0$ sur $[0,1]$ (puisque $|f'|$ est continue, positive et d'intégrale nulle). La fonction f est donc constante et nulle en 0, c'est-à-dire nulle.
  * Homogénéité : pour tout $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient par linéarité de l'intégrale :

  $$N_0(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)|dt = |\lambda| \left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt \right) = |\lambda| N_0(f).$$

  * Inégalité triangulaire : pour $f, g \in E$, on a par linéarité de la dérivation :

  $$N_0(f+g) = |f(0) + g(0)| + \int_0^1 |f'(t) + g'(t)|dt.$$

  Par inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ et croissance de l'intégrale :

  $$N_0(f+g) \leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 (|f'(t)| + |g'(t)|)\, dt,$$

  c'est-à-dire (par linéarité de l'intégrale) :

  $$N_0(f+g) \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'| + |g(0)| + \int_0^1 |g'| = N_0(f) + N_0(g).$$

- **N_1 est une norme sur E** : identique à N_0.
- **Comparaison de N_0 et N_1** : soit $f \in E$. On a

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f',$$

donc

$$N_1(f) = |f(1)| + \int_0^1 |f'| = \left| f(0) + \int_0^1 f' \right| + \int_0^1 |f'| \leq |f(0)| + 2\int_0^1 |f'|,$$

ce qui entraîne $N_1 \leq 2N_0$. Symétriquement, on a $N_0 \leq 2N_1$, d'où l'encadrement

$$\frac{1}{2}N_0 \leq N_1 \leq 2N_0,$$

qui montre que N_0 et N_1 sont deux normes équivalentes.

Remarque
Les constantes de cet encadrement sont optimales puisqu'avec $f : x \mapsto x$, on a

$$N_0(f) = |0| + \int_0^1 |1| = 1, \qquad N_1(f) = |1| + \int_0^1 |1| = 2,$$

et avec $g : x \mapsto 1 - x$, on a

$$N_0(g) = |1| + \int_0^1 |-1| = 2, \qquad N_1(g) = |0| + \int_0^1 |-1| = 1.$$

Exercice 12 (*Normes intégrales, concours Mines-Telecom)**
Pour $f \in E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, on définit $N(f) = \left[f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer : $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
3. Les normes N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Corrigé de l'exercice 12

1. On a affaire ici à une norme issue d'un produit scalaire. En effet, l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & (f|g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'g' \end{array} \right.$$

est bien définie (car $f'g'$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale est bien définie), c'est une forme bilinéaire symétrique (facile par linéarité de l'intégrale), et définie positive car

$$(f|f) = f(0)^2 + \int_0^1 (f')^2 \geq 0$$

(comme somme de deux termes positifs par positivité de l'intégrale) et

$$(f|f) = 0 \iff f(0)^2 + \int_0^1 (f')^2 = 0 \implies f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 (f')^2 = 0 \implies f(0) = 0 \text{ et } f' = 0 \implies f = 0_E$$

(car c'est une somme nulle de deux réels positifs, et car la fonction $(f')^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle, donc elle est nulle). Vu que pour tout $f \in E$, $N(f) = (f|f)^{1/2}$, on en déduit que N est une norme sur E (et elle est associée au produit scalaire $(.|.)$).

2. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0,1]$, nous avons

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'.$$

Pour majorer $|f(x)|$, nous allons généraliser les arguments de la question 1. Pour $x \in [0,1]$ fixé, l'application

$$(f,g) \mapsto (f|g)_x = f(0)g(0) + \int_0^x f'g'$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0,x],\mathbb{R})$ (de façon complèment similaire). On peut donc utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz : en posant $g : t \mapsto 1+t$, on a $g \in \mathcal{C}^1([0,x],\mathbb{R})$ et

$$f(x) = (f|g)_x,$$

donc

$$|f(x)| = |(f|g)_x| \leq \sqrt{(f|f)_x (g|g)_x} = \sqrt{1+x} \times \sqrt{f(0)^2 + \int_0^x (f')^2}.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in [0,1]$, on peut majorer indépendamment de x :

$$\forall x \in [0,1], \qquad |f(x)| \leq \sqrt{2} \times \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 (f')^2} = \sqrt{2} N(f),$$

(puisque $(f')^2 \geq 0$). On conclut donc que $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$.

3. La norme N n'est pas dominée par $\|.\|_\infty$. En effet, en considérant la suite $f_n : t \mapsto t^n$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n\|_\infty = 1,$$

alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad N(f_n) = \sqrt{0^{2n} + \int_0^1 (nt^{n-1})^2 dt} = \frac{n}{\sqrt{2n-1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

ce qu'il montre qu'il n'existe pas de constante $C \geq 0$ telle que $N \leq C\|.\|_\infty$.
Les normes $\|.\|_\infty$ et N ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 13 (Encore une norme intégrale)**
Soit a un réel positif.

1. Montrer que $N_a : f \mapsto \int_0^1 |f'(t) - af(t)| dt$ est une norme sur $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$.
2. Établir : $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)|e^{-ax} \leq \int_0^1 e^{-at}|f'(t) - af(t)|dt$.
   En déduire que $\|.\|_\infty$ est dominée par N_a.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : x \mapsto \sin(2\pi nx)e^{ax}$.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} N_a(f_n)$. La norme N_a est-elle équivalente à $\|.\|_\infty$?

Corrigé de l'exercice 13
On peut facilement vérifier que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (en tant que sev de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ par exemple).

1. Montrons que N_a est une norme sur E.
   * Pour toute $f \in E$, la fonction $|f' - af|$ est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale $N_a(f)$ existe et est positive (par positivité de l'intégrale).
   * Séparation : si $N_a(f) = 0$ avec $f \in E$, alors la fonction $|f' - af|$, qui est continue, positive et d'intégrale nulle est en fait nulle sur $[0,1]$. On a alors $f' = af$ donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = Ce^{ax}$. Mais $f(0) = 0$, donc f est nulle.
   * Homogénéité : pour tout $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

   $$N_a(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda f'(t) - a\lambda f(t)| dt = |\lambda| \int_0^1 |f' - af| = |\lambda| N_a(f),$$

   par linéarité de l'intégrale.
   * Inégalité triangulaire : pour f, g dans E, on a par linéarité de la dérivation :

   $$N_a(f+g) = \int_0^1 |f' + g' - a(f+g)|.$$

   En utilisant l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ et la croissance de l'intégrale, on obtient alors

   $$N_a(f+g) \leq \int_0^1 (|f' - af| + |g' - ag|) = N_a(f) + N_a(g).$$

2. Soit $x \in [0,1]$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $f(0)=0$, nous avons
$$f(x)e^{-ax} = f(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-at}\right)dt = \int_0^1 \left(f'(t) - af(t)\right)e^{-at}dt,$$
donc
$$|f(x)|e^{-ax} = |f(x)e^{-ax}| = \left|\int_0^1 \left(f'(t) - af(t)\right)e^{-at}dt\right| \leq \int_0^1 |f'(t) - af(t)|e^{-at}dt.$$
Ceci entraîne
$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x)|e^{-ax} \leq N_a(f),$$
et donc
$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x)| \leq e^{ax}N_a(f) \leq e^a N_a(f).$$
Ainsi, on a
$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq e^a N_a(f),$$
ce qui montre bien que $\|.\|_\infty$ est dominée par N_a.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$N_a(f_n) = \int_0^1 |f_n' - af_n| = \int_0^1 |2\pi n \cos(2\pi nt)|e^{at}dt.$$
Avec le changement de variable $u = 2\pi nt$, cela se réécrit :
$$N_a(f_n) = \int_0^{2\pi n} |\cos(u)|e^{au/(2\pi n)}du \geq \int_0^{2\pi n} |\cos(u)|du = \sum_{k=0}^{2n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos(u)|du.$$
Par π-périodicité et parité de $|\cos|$, on a
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos(u)|du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\cos(u)|du = 2\int_0^{\pi/2}\cos(u)du = 2.$$
Donc finalement
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad N_a(f_n) \geq 4n,$$
ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_a(f_n) = +\infty$.
On en déduit que N_a et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes, puisque la suite (f_n) est bornée pour la norme $\|.\|_\infty$ ($\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty \leq e^a$, constante indépendante de n) mais pas pour la norme N_a.

Exercice 14 (*Une norme sommatoire)**
On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum |u_n|$ converge.

1. Montrer que l'application $\|.\|_1 : u \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ définit une norme sur ℓ^1.
2. Étant donné une suite bornée $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, justifier que l'application $N : \left\{\begin{array}{ccc} \ell^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty}|\alpha_n u_n| \end{array}\right.$ est bien définie.
3. Déterminer une CNS sur α assurant que N est une norme sur ℓ^1.
4. Dans ces conditions, les normes $\|.\|_1$ et N sont-elles équivalentes ?

Corrigé de l'exercice 14

1. • On sait d'après le cours sur les séries que ℓ^1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'application $\|.\|_1$ est bien définie sur ℓ^1 et à valeurs positives.

- Séparation : si $\|u\|_1 = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$0 \leq |u_k| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = \|u\|_1 = 0,$$
donc la suite u est nulle.
- Pour tout $u \in \ell^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = |\lambda| \|u\|_1.$$
- Si u, v sont dans ℓ^1, alors par inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ et croissance de la somme :
$$\|u + v\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (|u_n| + |v_n|) = \|u\|_1 + \|v\|_1.$$

2. Si (α_n) est bornée et $u \in \ell^1$, on peut noter $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$. On a alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |\alpha_n u_n| \leq M|u_n|,$$
donc la suite positive $|\alpha_n u_n|$ est sommable (puisque $M|u_n|$ l'est).
L'application N est donc bien définie de ℓ^1 dans $\mathbb{R}$.
3. N est clairement à valeurs positives, et on montre facilement la propriété d'homogénéité ainsi que l'inégalité triangulaire. Ainsi, N est une norme si et seulement si la propriété de séparation est vérifiée. Deux cas se présentent :
   - S'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_i = 0$, alors N ne vérifie pas la séparation, puisque la suite $(u_n) = (\delta_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ (définie par $u_i = 1$ et $u_n = 0$ si $n \neq i$) est non nulle, sommable et vérifie $N(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \delta_{n,i} = \alpha_i = 0$.
   - Si au contraire α_n n'est jamais nul, alors, pour tout $u \in \ell^1$:
$$N(u) = 0 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n u_n| = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha_n u_n| = 0.$$
(car on a une somme nuls de réels positifs). Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha_n| \neq 0$, on en déduit que
$$N(u) = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0 \implies u = 0_{\ell^1}.$$

   Ainsi, N est une norme sur ℓ^1 si et seulement la suite (α_n) ne s'annule pas.
4. Plaçons-nous dans le cas où N est une norme sur ℓ^1, c'est-à-dire que l'on suppose :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n \neq 0.$$
D'après la question 2, on a
$$\forall u \in \ell^1, \qquad N(u) \leq \|\alpha\|_\infty \|u\|_1,$$
donc N est dominée par $\|.\|_1$. Voyons maintenant si $\|.\|_1$ est dominée par N.
Là encore, deux cas se présentent, en fonction de la valeur de $\beta = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| \in \mathbb{R}^+$.
   - Si $\beta > 0$, alors pour tout $u \in \ell^1$:
$$N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n u_n| \geq \beta \|u\|_1,$$
et donc
$$\forall u \in \ell^1, \qquad \|u\|_1 \leq \frac{1}{\beta} N(u).$$
Dans ce cas, $\|.\|_1$ est dominée par N.

- Si $\beta = 0$, alors $\|.\|_1$ n'est pas dominée par N. En effet, supposons qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que
$$\forall u \in \ell^1, \qquad \|u\|_1 \leq CN(u),$$
Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, ε ne minore pas (α_n), donc il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $|\alpha_i| < \varepsilon$. En considérant alors la suite $(u_n) = (\delta_{i,n})$, on a
$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 1, \qquad N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n u_n| = |\alpha_i| < \varepsilon,$$
donc l'hypothèse de domination amène :
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad 1 \leq C\varepsilon,$$
ce qui est clairement impossible (cela implique $C \neq 0$ et en prenant $\varepsilon = 1/2C$, on obtient $1 \leq 1/2$).

En conclusion, les normes N et $\|.\|_1$ sont équivalentes si et seulement si $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| > 0$ (ce qui revient à dire que $(|\alpha_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ possède un minorant strictement positif).

III Calcul de distances

Exercice 15 (Distance dans un espace de fonctions)**
Soit E l'espace vectoriel des fonctions $[-1;1] \to \mathbb{R}$ bornées, muni de la norme $\|.\|_\infty$, et soit $F = \mathcal{C}^0([-1;1];\mathbb{R})$. On considère la fonction $f \in E$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x \in [-1,0[\end{cases}$$
Déterminer la distance $d(f,F)$.

Corrigé de l'exercice 15
Par définition, $d(f,F) = \inf\limits_{g\in F} \|f-g\|_\infty$.

- Soit $g \in F$ (donc g est continue sur $[-1,1]$). L'idée à exploiter est la suivante : puisque f est discontinue en 0 (le "saut" vaut 2), alors l'écart $|f(x) - g(x)|$ a des chances d'être maximal pres de $x = 0$.
Fixons $\varepsilon > 0$. Par continuité de g en 0, il existe $0 < \delta < 1$ tel que
$$x \in [-\delta, \delta] \implies |g(x) - g(0)| \leq \varepsilon \implies g(0) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(0) + \varepsilon.$$
Ainsi, on a, par définition de f :
$$x \in [-\delta, 0[\implies -1 - g(0) - \varepsilon \leq f(x) - g(x) \leq -1 - g(0) + \varepsilon.$$
$$x \in [0, \delta[\implies 1 - g(0) - \varepsilon \leq f(x) - g(x) \leq 1 - g(0) + \varepsilon.$$
Raisonnons maintenant en fonction du signe de $g(0)$ (faire un dessin !).
  - Si $g(0) > 0$, alors en prenant $\varepsilon = g(0)/2$, on obtient notamment
$$x \in [-\delta, 0[\implies f(x) - g(x) \leq -1 - g(0)/2 < -1,$$
ce qui montre que $\|f-g\|_\infty > 1$.
  - De même si $g(0) < 0$, alors avec $\varepsilon = -g(0)/2$:
$$x \in [0, \delta[\implies f(x) - g(x) \geq 1 - g(0)/2 > 1,$$
donc là aussi $\|f-g\|_\infty > 1$.

    * Enfin, si $g(0) = 0$, alors
$$x \in [0, \delta[\implies f(x) - g(x) \geq 1 - \varepsilon,$$
donc $\|f - g\|_\infty \geq 1 - \varepsilon$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\|f - g\|_\infty \geq 1$.

  On a donc montré que
$$\forall g \in F, \qquad \|f - g\|_\infty \geq 1,$$
  ce qui montre que $d(f, F) \geq 1$.

- Enfin, il est facile de voir que $d(f, F) \leq 1$, puisqu'avec la fonction nulle $g = 0$ (qui est bien dans F), on a $\|f - g\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$.

Donc finalement, la distance cherchée est $d(f, F) = 1$.

Remarque
Si on connaît quelques notions de topologie, on voit facilement que F est un fermé de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_\infty)$ (toute fonction qui est limite uniforme de fonctions continues est elle-même continue), donc puisque $f \notin F$, il est normal que $d(f, F) > 0$ (en effet, $d(f, F) = 0 \iff f \in \overline{F}$ et F étant fermé, on a ici $\overline{F} = F$).

Exercice 16 (*Distances dans un espace de suites)**
Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E, \|.\|_\infty)$, où E est l'ensemble des suites réelles bornées et $\|.\|_\infty$ la norme définie par : $\|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On note E_c le sous-espace vectoriel de E constitué des suites convergentes, E_0 le sous-espace vectoriel de E constitué des suites tendant vers 0.

1. Déterminer $d(1, E_0)$, où 1 désigne la suite constante égale à 1.
2. Déterminer $d(a, E_c)$, où l'on note $a = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Pour $u \in E$, on note $\Delta u : n \mapsto u_{n+1} - u_n$, puis on considère $F = \{\Delta u,\ u \in E\}$.
   Déterminer $d(1, F)$.

Corrigé de l'exercice 16

1. Pour tout $u \in E_0$, nous avons $\|u - 1\|_\infty \geq 1$.
   En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe (puisque $u_n \to 0$) $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \varepsilon,$$
   et donc
$$\|u - 1\|_\infty \geq |u_{n_0} - 1| \geq 1 - |u_{n_0}| \geq 1 - \varepsilon.$$
   Ceci étant vrai pour tout réel $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\|u - 1\|_\infty \geq 1$ pour tout $u \in E_0$.
   On en déduit que $d(1, E_0) = \inf\limits_{u\in E_0} \|u - 1\|_\infty \geq 1$ (puisque la borne inférieure est le plus grand des minorants).
   Enfin, avec la suite nulle $u = 0_E$ (qui est bien dans E_0), on a $\|u - 1\|_\infty = 1$, donc $d(1, E_0) \leq 1$.
   Finalement, $d(1, E_0) = 1$ et cette distance est atteinte (en la suite nulle notamment).
2. - **Première méthode** : en utilisant l'idée qu'une suite convergente ne se comporte pas très différemment d'une suite constante.
     * Testons d'abord avec des suites u constantes :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \|\lambda - a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda - (-1)^n| = \sup(|\lambda + 1|, |\lambda - 1|) \geq 1$$
       (on le voit en distinguant les cas en fonction de la position de λ par rapport à 1 et -1 et le minimum est atteint lorsque $\lambda = 0$).
     * On peut donc conjecturer que pour toute suite $u \in E_c$ (donc convergente), on a
$$\|u - a\|_\infty \geq 1.$$

Prouvons cette inégalité : soit $u \in E_c$, notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.
Si par l'absurde on avait $\|u-a\|_\infty < 1$, alors il existerait $\varepsilon \in]0,1]$ tel que $\|u-a\|_\infty \leq 1-\varepsilon$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - (-1)^n| \leq 1-\varepsilon,$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{2n}-1| \leq 1-\varepsilon, \qquad |u_{2n+1}+1| \leq 1-\varepsilon,$$

donc en passant à la limite :

$$|\ell-1| \leq 1-\varepsilon, \qquad |\ell+1| \leq 1-\varepsilon.$$

Mais cela revient à :

$$\varepsilon \leq \ell \leq 2-\varepsilon, \qquad \varepsilon-2 \leq \ell \leq -\varepsilon,$$

ce qui est impossible ($\ell > 0$ et $\ell < 0$ à la fois).
On a donc bien

$$\forall u \in E_c, \qquad \|u-a\|_\infty \geq 1.$$

* Enfin, ce minorant est atteint : en prenant $u = 0_E$, on a $\|u-a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(-1)^n| = 1$, donc

$$d(a, E_c) = \inf_{u \in E_c} \|u-a\|_\infty = 1.$$

- **Deuxième méthode** : directement "avec des ε".
  * Soit $u \in E_c$, de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On a donc, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$|u_{2n} - a_{2n}| = |u_{2n}-1| = |(u_{2n}-\ell) - (1-\ell)| \geq |1-\ell| - |u_{2n}-\ell| \geq |1-\ell| - \varepsilon,$$

ce qui montre que $\|u-a\|_\infty \geq |1-\ell| - \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\|u-a\|_\infty \geq |1-\ell|.$$

Mais on a aussi, pour tout $n \geq n_0$:

$$|u_{2n+1} - a_{2n+1}| = |u_{2n+1}+1| = |u_{2n+1} - \ell + \ell + 1| \geq |1+\ell| - |u_{2n+1}-\ell| \geq |1+\ell| - \varepsilon$$

ce qui montre de même que

$$\|u-a\|_\infty \geq |1+\ell|.$$

On a donc deux minorants de $\|u-a\|_\infty$, et l'un des deux est toujours supérieur ou égal à 1, puisque

$$2 = |1+\ell+1-\ell| \leq |1+\ell| + |1-\ell|.$$

Donc finalement

$$\forall u \in E_c, \qquad \|u-a\|_\infty \geq 1.$$

  * Enfin, ce minorant est atteint : en prenant $u = 0_E$, on a $\|u-a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(-1)^n| = 1$, donc

$$d(a, E_c) = \inf_{u \in E_c} \|u-a\|_\infty = 1.$$

3. Soit $u \in E$ (i.e. u bornée). Essayons de minorer $\|\Delta u - 1\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n - 1|$.

Déjà, la quantité $u_{n+1} - u_n$ ne peut pas avoir un minorant strictement positif : en effet, si on avait

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n > \varepsilon,$$

cela contredirait le caractère borné de u, puisqu'alors :

$$u_n - u_0 = (u_n - u_{n-1}) + \cdots + (u_1 - u_0) > n\varepsilon \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On a donc
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad u_{n_0+1} - u_{n_0} \leq \varepsilon,$$
ce qui entraîne
$$\|\Delta u - 1\|_\infty \geq |u_{n_0+1} - u_{n_0} - 1| = 1 - (u_{n_0+1} - u_{n_0}) \geq 1 - \varepsilon.$$
Ceci étant vrai pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a montré
$$\forall u \in E, \qquad \|\Delta u - 1\|_\infty \geq 1.$$
De plus, ce minorant est atteint puisqu'avec n'importe quelle suite constante u (donc bornée), on a $\Delta u = 0_E$, et donc $\|\Delta u - 1\|_\infty = 1$.
Finalement, on a donc
$$d(1, F) = \inf_{v \in F} \|v - 1\|_\infty = \inf_{u \in E} \|\Delta u - 1\|_\infty = 1.$$

IV Suites, valeurs d'adhérence

Exercice 17 (*Manipulation de suites extraites)**
Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Que dire de (u_n) ?
2. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite convergente. Que dire de (u_n) ?
3. On suppose que (u_n) n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite strictement croissante qui diverge vers $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 17

1. Par hypothèse, il existe un réel M et une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} \leq M$. Puisque $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (récurrence simple), on obtient par croissance de la suite (u_n) que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq u_{\varphi(n)} \leq M,$$
donc (u_n) est majorée par M.
2. Par hypothèse, il existe un réel ℓ et une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. La croissance de (u_n) va alors entraîner que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.
En effet, si on fixe un réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \implies |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$.
Pour $n \geq \varphi(n_0)$, on a alors, par croissance de (u_n) :
$$\ell - \varepsilon \leq u_{\varphi(n_0)} \leq u_n \leq u_{\varphi(n)} \leq \ell + \varepsilon,$$
et donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, ce qui montre la convergence voulue.
3. Par hypothèse, la propriété $(\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M)$ est fausse, donc
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M.$$
Et on a même mieux : puisque la suite (u_n) n'est pas majorée, elle n'est pas non plus majorée à partir d'un certain rang n_0 (enlever ou rajouter un nombre fini de termes ne change rien au caractère majoré d'une suite).
Donc on a *non*$(\exists M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq M)$, c'est-à-dire
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0,\ u_n > M$$
(*pour tout réel M, il y a* **une infinité** *de termes strictement supérieurs à M*).
En choisissant convenablement des réels M et des entiers n_0, on va alors construire par récurrence forte une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $M = 0$ et $n_0 = 0$: il existe un entier $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $u_{\varphi(0)} > 0$.
Pour $M = \max(1, u_{\varphi(0)})$ et $n_0 = \varphi(0) + 1$: il existe un entier $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} > 1$, et $u_{\varphi(1)} > u_{\varphi(0)}$.
Supposons construits des entiers $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(k)$ tels que $u_{\varphi(0)} < \cdots < u_{\varphi(k)}$ et $u_{\varphi(i)} > i$ pour tout $i \in [\![0, k]\!]$.
Posons alors $M = \max(k + 1, u_{\varphi(k)})$ et $n_0 = \varphi(k) + 1$. Il existe alors un entier $\varphi(k + 1) > \varphi(k)$ tel que $u_{\varphi(k+1)} > k + 1$, et $u_{\varphi(k+1)} > u_{\varphi(k)}$, ce qui permet de contruire le terme suivant.
Ainsi, la suite (u_n) possède une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 18 (*Extraction monotone et Bolzano-Weierstrass)**

1. Montrer que de toute suite réelle (u_n), on peut extraire une suite monotone.
   Pour cela, considérer l'ensemble $X = \{n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n,\ u_p \geq u_n\}$.
2. En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.
3. Adapter le théorème de Bolzano-Weierstrass aux suites complexes.

Corrigé de l'exercice 18

1. Si la partie $X \subset \mathbb{N}$ est infinie, alors il existe une bijection strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to X$ (poser $\varphi(0) = \min(X)$, puis $\varphi(1) = \min(X \setminus \{\varphi(0)\})$, $\varphi(2) = \min(X \setminus \{\varphi(0), \varphi(1)\})$, etc. Cette application est strictement croissante par construction, donc injective, et surjective car pour tout $x \in X$, on a $x = \varphi(n)$ avec $n = Card\{p \in X,\ p < x\}$).
   Dès lors, tous les entiers $\varphi(n)$ sont dans X, donc la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ est croissante par définition de X.
   Si la partie X est finie, alors elle est majorée, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geq n_0 \implies n \notin X)$.
   Donc pour tout $n \geq n_0$, il existe $p \geq n$ tel que $u_p < u_n$.
   On pose alors $\varphi(0) = n_0$, il existe $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} < u_{\varphi(0)}$, et on construit par récurrence forte une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ strictement décroissante.
2. Soit (u_n) une suite réelle bornée. Alors on peut en extraire une suite $(u_{\varphi(n)})$ monotone, qui est également bornée, donc convergente (si elle est croissante et majorée, elle converge vers sa borne supérieure, et si elle est décroissante et minorée, elle converge vers sa borne inférieure).
3. Soit $(u_n) = (x_n + iy_n)$ une suite complexe bornée. Alors, les deux suites réelles (x_n) et (y_n) sont bornées, donc on peut leur appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass : on extrait d'abord une suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$. Ensuite, on considère $(y_{\varphi(n)})$: elle est elle-même bornée (en tant que sous-suite de (y_n)), donc on peut en extraire une sous-suite $(y_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge vers ℓ_2. On a également $(x_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge vers ℓ_1 (comme sous-suite de $(x_{\varphi(n)})$). Donc finalement $(u_{\varphi(\psi(n))})$ converge vers $\ell_1 + i\ell_2$.

Exercice 19 (*Suites de Cauchy et valeurs d'adhérence)**
Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
On dit d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qu'elle est de Cauchy lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ (p \geq N \text{ et } q \geq N) \implies \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon.$$

On dit d'un espace vectoriel normé E qu'il est **complet** lorsque toute suite de Cauchy d'élements de E converge dans E.

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. (a) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
   (b) Montrer qu'une suite de Cauchy admet au plus une valeur d'adhérence.
   (c) En déduire que $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace complet.

Remarque
La complétude est un attribut fondamental de $\mathbb{R}$ *mais les espaces vectoriels normés ne sont pas tous complets...*

Corrigé de l'exercice 19

1. Supposons que (u_n) converge vers $\ell \in E$. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq N \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon/2.$$
On a donc par inégalité triangulaire :
$$(p \geq N \text{ et } q \geq N) \implies \|u_p - u_q\| \leq \|u_p - \ell\| + \|\ell - u_q\| \leq \varepsilon,$$
ce qui montre bien que (u_n) est une suite de Cauchy.

2. (a) Soit (u_n) une suite de Cauchy. En prenant $\varepsilon = 1$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$(p \geq N \text{ et } q \geq N) \implies \|u_p - u_q\| \leq 1.$$
On a donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$$n \geq N \implies \|u_n - u_N\| \leq 1 \implies \|u_n\| = \|(u_n - u_N) + u_N\| \leq 1 + \|u_N\|,$$
ce qui montre que la suite (u_n) est bornée puisque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|u_n\| \leq \max\left(\|u_0\|, \cdots, \|u_{N-1}\|, 1 + \|u_N\|\right).$$

(b) Soit (u_n) une suite de Cauchy, et $\lambda, \mu \in E$ deux valeurs d'adhérences de (u_n). Alors il existe deux extractions $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que $u_{\varphi(n)} \to \lambda$ et $u_{\psi(n)} \to \mu$.
Fixons $\varepsilon > 0$. La suite (u_n) étant de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$(p \geq N \text{ et } q \geq N) \implies \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon.$$
Donc puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$ et $\psi(n) \geq n$ (propriété classique des extractrices, qui se montre par récurrence), on a
$$n \geq N \implies \|u_{\varphi(n)} - u_{\psi(n)}\| \leq \varepsilon,$$
donc en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$:
$$\|\lambda - \mu\| \leq \varepsilon.$$
Ceci étant vrai pour tout réel $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\|\lambda - \mu\| = 0$, donc $\mu = \lambda$, ce qui montre que (u_n) possède au plus une valeur d'adhérence.

(c) Soit (u_n) une suite réelle de Cauchy. Elle est bornée (cf. 2.(a)), donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (vu en MP2I), il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$. On va alors utiliser que λ est la seule valeur d'adhérence de (u_n) (cf. 2.(b)) pour montrer que (u_n) converge vers λ.
Par l'absurde, si (u_n) ne converge pas vers λ, alors il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ tel que :
$$\forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0 \quad \|u_n - \lambda\| > \varepsilon_0.$$
Cela permet de construire par récurrence une suite extraite $(u_{\psi(k)})$ telle que
$$(*) \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|u_{\psi(k)} - \lambda\| > \varepsilon_0$$
(à chaque étape k, prendre $n_0 = \psi(k)+1$ et choisir $n \geq \psi(k)+1$ que l'on renomme $\psi(k+1)$).
Or, $(u_{\psi(k)})$ est bornée (car (u_n) l'est), donc toujours par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède une valeur d'adhérence μ, qui est aussi une valeur d'adhérence de (u_n) (une suite extraite d'une suite extraite de (u_n) est elle-même une suite extraite de (u_n)), donc par unicité, $\mu = \lambda$. Ainsi, $u_{\psi(k)} \to \lambda$, ce qui contredit $(*)$.
Ce raisonnement par l'absurde montre que $u_n \to \lambda$, donc que toute suite réelle de Cauchy converge.