Exercices du CH05 : Espaces vectoriels normés - généralités

Exercices de la banque INP à étudier : aucun pour l'instant, il faut attendre le second chapitre sur les evn (topologie).

I Normes et boules

Exercice 1 (*Ajuster les paramètres)
Pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, on définit $N : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & \sqrt{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2} \end{array} \right.$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (α, β, γ) pour que N soit une norme.

Exercice 2 (*Une norme sur $\mathbb{R}^2$ et sa boule unité)

1. Montrer que $N : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \max(|x|, |y|, |x-y|) \end{array} \right.$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter la boule unité fermée pour cette norme.

Exercice 3 (*Conditions équivalentes pour être une norme)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$, $N(x) > 0$.
(ii) $N(0_E) = 0$.
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x, y) \in E^2$, $N(\lambda x + y) \leq |\lambda| N(x) + N(y)$.

Montrer que N est une norme.

Exercice 4 (*Norme intégrale)
Soient $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}^*$, $(f_1, \ldots, f_p) \in E^p$ et

$$N : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{p} x_k f_k(t) \right| dt \end{array} \right. .$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(f_1, \ldots, f_p)$ pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^p$.

Exercice 5 (Inégalités avec une norme)**
Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$.
2. Soit $(x, y, z) \in E^3$ tel que $x + y + z = 0_E$.
   Montrer : $3(\|x\| + \|y\| + \|z\|) \leq 2(\|x - y\| + \|y - z\| + \|z - x\|)$.

Exercice 6 (Diamètre d'une partie bornée)**

1. Montrer que si A est une partie non vide et bornée d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, alors l'ensemble $D = \{d(x, y),\ (x, y) \in A^2\}$ possède une borne supérieure.
   *On appelle par la suite cette borne supérieure le **diamètre** de A.*
2. Déterminer le diamètre d'une boule ouverte et d'une boule fermée (dans un espace vectoriel normé E non nul).

Exercice 7 (Boules confondues)**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, N_1 et N_2 deux normes sur E, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
On suppose $B_f^{N_1}(a, r) = B_f^{N_2}(a, r)$ (c'est-à-dire que les boules fermées de centre a et de rayon r sont les mêmes pour les deux normes). Prouver qu'on a $N_1 = N_2$.

Exercice 8 (*Normes de Hölder sur $\mathbb{K}^n$)**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]1;+\infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ (*inégalité de Young*).

   On introduit $\|.\|_p$: $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \left(\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}\right.$ et on définit $\|.\|_q$ selon le même principe.
2. Montrer, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, en notant $x = (x_1,\dots,x_n)$ et $y = (y_1,\dots,y_n)$:
   (a) $\left|\sum\limits_{k=1}^n \overline{x_k} y_k\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ (*inégalité de Hölder*, qui généralise celle de Cauchy-Schwarz).
   (b) $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ (*inégalité de Minkowski*).
3. En déduire que $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$, appelée **norme de Hölder**.
4. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$: $\|x\|_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\|_\infty$.

II Comparaison de normes

Exercice 9 (*Normes matricielles)
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On considère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les applications N_∞, N_c et N_ℓ définies ainsi : pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$N_\infty(A) = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|, \quad N_c(A) = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, \quad N_\ell(A) = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|,$$

Montrer que ce sont des normes, qu'elles sont équivalentes, puis déterminer les constantes de domination optimales.

Exercice 10 (*Normes polynomiales)
Pour $P = \sum\limits_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_1(P) = \sum\limits_{k=0}^n |a_k|$ et $N_\infty(P) = \max\{|a_k|,\ 0 \leq k \leq n\}$.

1. Montrer que N_1 et N_∞ définissent des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Laquelle des deux domine l'autre ?
   Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 11 (Normes intégrales)**
Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose :

$$N_0(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt \quad \text{et} \quad N_1(f) = |f(1)| + \int_0^1 |f'(t)|dt.$$

Montrer que N_0 et N_1 sont des normes, puis les comparer.
Indication : pour comparer N_0 et N_1, on pourra songer à relier $f(0)$ et $f(1)$ à l'aide de f'.

Exercice 12 (*Normes intégrales, concours Mines-Telecom)**
Pour $f \in E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, on définit $N(f) = \left[f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer : $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
3. Les normes N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 13 (Encore une norme intégrale)**
Soit a un réel positif.

1. Montrer que $N_a : f \mapsto \int_0^1 |f'(t) - af(t)|dt$ est une norme sur $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$.
2. Établir : $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)|e^{-ax} \leq \int_0^1 e^{-at}|f'(t) - af(t)|dt$.
En déduire que $\|.\|_\infty$ est dominée par N_a.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : x \mapsto \sin(2\pi nx)e^{ax}$.
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} N_a(f_n)$. La norme N_a est-elle équivalente à $\|.\|_\infty$?

Exercice 14 (*Une norme sommatoire)**
On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum |u_n|$ converge.

1. Montrer que l'application $\|.\|_1 : u \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ définit une norme sur ℓ^1.
2. Étant donné une suite bornée $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, justifier que l'application
$N : \left\{ \begin{array}{ccc} \ell^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n u_n| \end{array} \right.$ est bien définie.
3. Déterminer une CNS sur α assurant que N est une norme sur ℓ^1.
4. Dans ces conditions, les normes $\|.\|_1$ et N sont-elles équivalentes ?

III Calcul de distances

Exercice 15 (Distance dans un espace de fonctions)**
Soit E l'espace vectoriel des fonctions $[-1;1] \to \mathbb{R}$ bornées, muni de la norme $\|.\|_\infty$, et soit $F = \mathcal{C}^0([-1;1];\mathbb{R})$. On considère la fonction $f \in E$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x \in [-1,0[\end{cases}$$

Déterminer la distance $d(f, F)$.

Exercice 16 (*Distances dans un espace de suites)**
Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E, \|.\|_\infty)$, où E est l'ensemble des suites réelles bornées et $\|.\|_\infty$ la norme définie par : $\|(u_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.
On note E_c le sous-espace vectoriel de E constitué des suites convergentes, E_0 le sous-espace vectoriel de E constitué des suites tendant vers 0.

1. Déterminer $d(1, E_0)$, où 1 désigne la suite constante égale à 1.
2. Déterminer $d(a, E_c)$, où l'on note $a = \big((-1)^n\big)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Pour $u \in E$, on note $\Delta u : n \mapsto u_{n+1} - u_n$, puis on considère $F = \{\Delta u,\ u \in E\}$.
Déterminer $d(1, F)$.

IV Suites, valeurs d'adhérence

Exercice 17 (*Manipulation de suites extraites)**
Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Que dire de (u_n) ?
2. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite convergente. Que dire de (u_n) ?
3. On suppose que (u_n) n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite strictement croissante qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 18 (*Extraction monotone et Bolzano-Weierstrass)**

1. Montrer que de toute suite réelle (u_n), on peut extraire une suite monotone.
   Pour cela, considérer l'ensemble $X = \{n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n,\ u_p \geq u_n\}$.
2. En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.
3. Adapter le théorème de Bolzano-Weierstrass aux suites complexes.

Exercice 19 (*Suites de Cauchy et valeurs d'adhérence)**
Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
On dit d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qu'elle est de Cauchy lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (p \geq N \text{ et } q \geq N) \implies \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon.$$

On dit d'un espace vectoriel normé E qu'il est **complet** lorsque toute suite de Cauchy d'élements de E converge dans E.

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. (a) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
   (b) Montrer qu'une suite de Cauchy admet au plus une valeur d'adhérence.
   (c) En déduire que $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace complet.

Remarque
La complétude est un attribut fondamental de $\mathbb{R}$ *mais les espaces vectoriels normés ne sont pas tous complets...*