# Exercices du CH04 : Compléments d'algèbre linéaire

**Exercices de la banque INP à étudier** : ex 60 (étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), 64 (endos avec noyau et image supplémentaires), 71 (étude d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$), 87, 90 (interpolation de Lagrange).

## I TD du mercredi 30/09

### 1) MPI* seulement

**Exercice 1 (**Isomorphismes et dimensions)**

1. Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
   Montrer que $E$ et $F$ sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.
2. Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer le *théorème d'isomorphisme* : tout supplémentaire de $Ker(u)$ dans $E$ est isomorphe à $Im(u)$.
3. En déduire le *théorème du rang* : si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $E$ de dimension finie, alors $Im(u)$ est de dimension finie et $\dim(Ker(u)) + rg(u) = \dim(E)$.

**Exercice 2 (***Un calcul de dimension)**
Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(F,E)$.
On pose $A = \{g \in \mathcal{L}(E,F),\ f \circ g \circ f = 0\}$.
Montrer que $A$ est un sev de $\mathcal{L}(E,F)$ et déterminer sa dimension.

### 2) MPI/MPI*

**Exercice 3 (*Etude d'un endomorphisme particulier)**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (i,j,k)$.
Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$. Qu'en déduire sur $f$ ?
2. Déterminer une base de $Im(f)$ et de $Ker(f)$.
3. Montrer qu'on a $E = Im(f) \oplus Ker(f)$.
4. Quelle est la matrice de $f$ dans une base adaptée à la somme directe $E = Im(f) \oplus Ker(f)$ ?

**Exercice 4 (*Etude d'une symétrie)**
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P} : x + y - z = 0$ et $\mathcal{D} = Vect(u)$ avec $u = (2,0,1)$.

1. (a) Donner deux vecteurs $(v,w)$ formant une base de $\mathcal{P}$, et justifier rapidement que $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice de passage $Q$ de la base canonique $\mathcal{B}_0$ vers la base $\mathcal{B}$.
   (c) Calculer l'inverse de $Q$.
2. Soit $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.
   (a) Donner la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(s)$ de l'endomorphisme $s$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) En déduire la matrice $A = Mat_{\mathcal{B}_0}(s)$ de $s$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
   (c) En déduire l'expression de $s(t)$ pour $t = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque.
   (d) Calculer $A^2$. Le résultat est-il surprenant ?

**Exercice 5 (**Une base polynomiale)**
Pour des entiers $0 \leq k \leq n$, on pose $P_{k,n} = X^k(1-X)^{n-k}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{B}_n = (P_{0,n}, P_{1,n}, \cdots, P_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**Exercice 6 (**Noyaux itérés)**
Dans tout cet exercice, on considère un endomorphisme $f$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.
On définit les puissances de $f$ par :

- $f^0 = Id_E$ ;
- $f^1 = f$ ;
- Pour tout $k \geq 1$, $f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f^k$.

1. Soit $k$ un entier naturel. Justifier $Ker(f^k) \subset Ker(f^{k+1})$ et $Im(f^k) \supset Im(f^{k+1})$.
2. On suppose désormais que $E$ est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, et on note $a_k = \dim(Ker(f^k))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Montrer qu'il existe alors un entier $q \in \{0, \dots, p\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
   $(i)$ pour tout entier $0 \leq k \leq q-1$, $Ker(f^k) \subsetneq Ker(f^{k+1})$,
   $(ii)$ pour tout entier $k \geq q$, $Ker(f^k) = Ker(f^q)$.
3. Que vérifie d'analogue la suite $\big(Im(f^k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ ?
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $d_k = a_{k+1} - a_k$.
   On veut montrer que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (a) Justifier l'existence d'un sous-espace vectoriel $S_k$ tel que $Im(f^k) = Im(f^{k+1}) \oplus S_k$.
   (b) Établir $Im(f^{k+1}) = Im(f^{k+2}) + f(S_k)$.
   (c) En déduire le résultat souhaité.
5. En déduire finalement qu'on a : $\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$, $a_{k+j} \leq a_k + a_j$.

**Exercice 7 (**Somme directe et polynômes)**
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note $F_i = \big\{P \in E,\ \forall j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\big\}$.
Montrer que les $F_i$ sont des sous-espaces vectoriels et que $E = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n$.

**Exercice 8 (**Pseudo-inverse d'un endomorphisme)**
Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. On dit que $v$ est un pseudo-inverse de $u$ si les trois relations suivantes sont vérifiées : $uv = vu$, $uvu = u$, $vuv = v$.
On suppose que $u$ admet un pseudo-inverse $v$. Montrer que $E = Im(u) \oplus Ker(v)$.

**Exercice 9 (**Formule de Grassmann)**
Soit $F$ et $G$ deux sev de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

1. Justifier l'existence de deux sev $F_1, G_1$ de $E$ tels que
$$(F \cap G) \oplus F_1 = F, \qquad (F \cap G) \oplus G_1 = G.$$
2. En déduire une démonstration de la *formule de Grassmann* :
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

# II A faire pour lundi 05/10

## 1) Dualité

**Exercice 10 (**Base duale, antéduale)**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$.
On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur $E$ (c'est le *dual* de $E$).
On considère la famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ de $E^*$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

(où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker valant 1 si $i = j$ et 0 sinon).

1. Montrer que $\mathcal{B}^*$ est une base de $E^*$, appelée la *base duale* de $\mathcal{B}$.
   Déterminer également la décomposition d'un élément $f \in E^*$ dans $\mathcal{B}^*$.
2. Un exemple : soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B}_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de $E$.
   On considère les formes linéaires

   $$f_1 = 2\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*, \qquad f_2 = -\varepsilon_1^* + 2\varepsilon_3^*, \qquad f_3 = \varepsilon_1^* + 3\varepsilon_2^*.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $E^*$.
   (b) Montrer qu'il existe une unique base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $E$ telle que $\mathcal{C} = \mathcal{B}^*$.
   On déterminera explicitement $\mathcal{B}$.
3. On revient au cas général ($E$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$).
   En utilisant la méthode de la question précédente, montrer que toute base $\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_n)$ de $E^*$ est la base duale d'une unique base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de $E$. On dit alors que $\mathcal{B}$ est la *base antéduale* de $\mathcal{C}$.

**Exercice 11 (***Rang et transposition (MPI*))**
Le but de cet exercice est de démontrer qu'une matrice et sa transposée ont même rang en utilisant la dualité (cf. exercice précédent).
Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels non nuls et de dimension finie. On note $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$. Pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on définit *l'application transposée de* $u$ :

$${}^t u : \left\{ \begin{array}{ccc} F^* & \longrightarrow & E^* \\ \varphi & \longmapsto & {}^t u(\varphi) = \varphi \circ u \end{array} \right. .$$

1. Montrer que ${}^t u$ est bien définie et linéaire.
2. Déterminer $Ker({}^t u)$.
   *On pourra utiliser une base de $F$ bien choisie et sa base duale.*
3. En déduire que $rg({}^t u) = rg(u)$.
4. En déduire enfin une démonstration du théorème : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ rg(A^T) = rg(A)$.

## 2) $\mathbb{K}$-algèbres

**Exercice 12 (*Exemples de sous-algèbres)**

1. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   (a) Rappeler quelles lois font de $\mathcal{L}(E)$ une $\mathbb{K}$-algèbre.
   (b) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ g \circ f = f \circ g\}$. Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ forme-t-il une sous-algèbre de $\mathbb{K}[X]$ ?
   (b) À part $\mathbb{K}[X]$ et les éventuelles sous-algèbres mises en évidence à la question précédente, pouvez-vous donner d'autres sous-algèbres de $\mathbb{K}[X]$ ?

**Exercice 13 (**)**
Soit $\mathbb{K}$ un corps, soit $A$ une $\mathbb{K}$-algèbre commutative, intègre, et de dimension finie.
Montrer que $A$ est un corps.

## 3) Déterminants

**Exercice 14 (**Déterminant de Vandermonde)**
Soit $n \geq 2$ un entier et $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose :

$$V(a_1, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer que $V(a_1, \cdots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ par deux méthodes :

1. En montrant par manipulation sur les lignes que

$$V(a_1, \cdots, a_n) = \left( \prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) \right) \times V(a_2, \cdots, a_n)$$

et en procédant par récurrence.

2. En raisonnant avec les racines du polynôme

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & x^{n-2} \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

et en procédant par récurrence.

**Exercice 15 (**Déterminant circulant)**
On appelle *matrice circulante* tout matrice carrée de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont des nombres complexes. On note $P$ le polynôme $P(X) = a_1 + a_2 X + \cdots + a_n X^{n-1}$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

1. En utilisant la matrice $\Omega$ de coefficients $\Omega[i,j] = \omega^{(i-1)(j-1)}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$, calculer le produit $A\Omega$ en fonction des valeurs de $P$.
2. En déduire que $\det(A) = P(1)P(\omega)\cdots P(\omega^{n-1})$.

**Exercice 16 (***Déterminant de Cauchy (MPI*))**
On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ de réels telles que $a_i + b_j \neq 0$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour tout entier $m$ tel que $0 < m \leq n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre $m$ est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(X-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}.$$

1. Montrer que si $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X+b_k}$ (avec les $A_k$ réels), alors
$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}.$$
2. En déduire que
$$D_n = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}(a_i+b_j)}.$$

## 4) Calculs par blocs

**Exercice 17 (**Calculs par blocs)**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang $r$ décomposée par blocs sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ supposée inversible.

1. Montrer que pour toute colonne $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, il existe une colonne $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ telle que $M \begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}$. *On pourra examiner $Im(M)$.*
2. En déduire que $D = CA^{-1}B$.

**Exercice 18 (*Un calcul de déterminant)**
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $D$ inversible et $C$ qui commute avec $D$.
Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

## 5) Un peu de théorie

**Exercice 19 (***Démo de cours sur les familles libres, liées, génératrices (MPI*))**
$E$ et $F$ désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $I$ un ensemble d'indices quelconque (éventuellement infini). On rappelle qu'une **combinaison linéaire** d'une famille de vecteurs $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ est un vecteur de la forme

$$x = \sum_{j\in J} \lambda_i e_i,$$

où $J$ est une partie **finie** de $I$ et $(\lambda_i)_{i\in J}$ une famille de scalaires de $\mathbb{K}$.

1. Montrer qu'une famille $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ est liée si et seulement si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
2. Etant donnés une famille libre $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ et $x \in E$, à quelle condition la "sur-famille" $((e_i)_{i\in I}, x)$ est-elle libre ?
3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $(e_i)_{i\in I}$ est une base de $E$ ;
   (ii) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre maximale de $E$ ;
   (iii) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice minimale de $E$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
   (a) Si $u$ est un isomorphisme, montrer que pour toute base $(e_i)_{i\in I}$ de $E$, la famille $(u(e_i))_{i\in I}$ est une base de $F$.
   (b) S'il existe une base $(e_i)_{i\in I}$ de $E$ telle que $(u(e_i))_{i\in I}$ est une base de $F$, alors montrer que $u$ est un isomorphisme.