Exercices du CH04 : Compléments d'algèbre linéaire

Exercices de la banque INP à étudier : ex 60 (étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), 64 (endos avec noyau et image supplémentaires), 71 (étude d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$), 87, 90 (interpolation de Lagrange).

I Révisions MP2I

Exercice 1 (*Etude d'un endomorphisme particulier)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?
2. Déterminer une base de $Im(f)$ et de $Ker(f)$.
3. Montrer qu'on a $E = Im(f) \oplus Ker(f)$.
4. Quelle est la matrice de f dans une base adaptée à la somme directe $E = Im(f) \oplus Ker(f)$?

Corrigé de l'exercice 1

1. On a $A^2 = A$, donc $f \circ f = f$, ce qui montre que f est un projecteur.
2. On obtient facilement que $(i + j + k)$ est une base de $Ker(f)$ et que $(i + j, i + k)$ est une base de $Im(f)$.
3. C'est une propriété vérifiée par tout projecteur (voir cours MP2I pour la démonstration).
4. La famille $\mathcal{B} = (u, v, w) = (i + j, i + k, i + j + k)$ est une base de E adaptée à la somme directe $E = Im(f) \oplus Ker(f)$, et on a $f(u) = u$, $f(v) = v$ (car u, v sont dans l'image du projecteur f, donc sont invariants), $f(w) = 0$ (car w est dans $Ker(f)$), donc $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (*Etude d'une symétrie)
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P} : x + y - z = 0$ et $\mathcal{D} = Vect(u)$ avec $u = (2, 0, 1)$.

1. (a) Donner deux vecteurs (v, w) formant une base de $\mathcal{P}$, et justifier rapidement que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice de passage Q de la base canonique $\mathcal{B}_0$ vers la base $\mathcal{B}$.
   (c) Calculer l'inverse de Q.
2. Soit $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.
   (a) Donner la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(s)$ de l'endomorphisme s dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) En déduire la matrice $A = Mat_{\mathcal{B}_0}(s)$ de s dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
   (c) En déduire l'expression de $s(u)$ pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque.
   (d) Calculer A^2. Le résultat est-il surprenant ?

Corrigé de l'exercice 2
Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Les vecteurs $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 1, 1)$ forment une base de $\mathcal{P}$.
   La famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ car $\mathcal{B}_0$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et

$$\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

(b) $Q = Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(u,v,w) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) On trouve $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) Puisque $\mathcal{P} = \{t \in \mathbb{R}^3,\ s(t) = t\}$ et $\mathcal{D} = \{t \in \mathbb{R}^3,\ s(t) = -t\}$, on a $s(u) = -u$, $s(v) = v$ et $s(w) = w$, donc

$$Mat_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D.$$

(b) Les formules de changement de base d'un endomorphisme donnent :

$$D = Mat_{\mathcal{B}}(s) = Q^{-1} Mat_{\mathcal{B}_0}(s) Q = Q^{-1} A Q.$$

donc

$$A = QDQ^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Pour $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a donc

$$s(u) = (-3x - 4y + 4z, y, -2x - 2y + 3z).$$

(d) On a $A^2 = I_3$, puisque $s^2 = Id$ (s est une symétrie).

Exercice 3 (Une base polynomiale)**
Pour des entiers $0 \leq k \leq n$, on pose $P_{k,n} = X^k(1-X)^{n-k}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{B}_n = (P_{0,n}, P_{1,n}, \cdots, P_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Corrigé de l'exercice 3
Vu que chaque polynôme $P_{k,n}$ est de degré n, la famille $\mathcal{B}_n = (P_{0,n}, P_{1,n}, \cdots, P_{n,n})$ est bien une famille de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, on a $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = Card(\mathcal{B}_n)$, il suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}_n$ est libre. On va le montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: notons la propriété

$$A(n) : \quad \text{"la famille } \mathcal{B}_n \text{ est libre".}$$

- La propriété $A(0)$ est vraie car la famille $\mathcal{B}_0 = (P_{0,0}) = (1)$ est libre (famille formée d'un vecteur non nul).
- Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $A(n)$ est vraie. Montrons alors que $A(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que la famille $\mathcal{B}_{n+1} = (X^k(1-X)^{n+1-k})_{0 \leq k \leq n+1}$ est libre. Pour cela, considérons des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k X^k (1-X)^{n+1-k} = 0,$$

et montrons que ces réels sont tous nuls. En évaluant l'identité précédente en $X = 1$, on obtient

$$\alpha_{n+1} = 0,$$

(car $(1-X)^{n+1-k}$ vaut 0 en $X = 1$ si $k < n+1$, et 1 si $k = n+1$). On a donc

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k (1-X)^{n+1-k} = 0,$$

ce qui se réécrit (en mettant $1 - X$ en facteur) :

$$(1-X).\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k (1-X)^{n-k}\right) = 0.$$

On a donc un produit de polynômes qui est le polynôme nul. Vu que le polynôme $1-X$ est non nul, cela entraîne que

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k (1-X)^{n-k} = 0$$

(dans $\mathbb{K}[X]$, on a $PQ = 0_{\mathbb{K}[X]} \iff (P = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ ou } Q = 0_{\mathbb{K}[X]})$).
Par hypothèse de récurrence, la famille $\mathcal{B}_n = (X^k(1-X)^{n-k})_{0\leq k\leq n}$ est libre, donc $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$. Finalement, on a bien tous les coefficients α_k qui sont nuls, ce qui prouve $A(n+1)$.

- La propriété $A(n)$ est vraie pour $n=0$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, ce qu'il fallait montrer.

Exercice 4 (Familles libres, liées, génératrices)**
E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et I un ensemble d'indices quelconque.

1. Montrer qu'une famille $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ est liée si et seulement si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
2. Etant donnés une famille libre $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ et $x \in E$, à quelle condition la "sur-famille" $((e_i)_{i\in I}, x)$ est-elle libre ?
3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E ;
   (ii) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre maximale de E ;
   (iii) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice minimale de E.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
   (a) Si u est un isomorphisme, montrer que pour toute base $(e_i)_{i\in I}$ de E, la famille $(u(e_i))_{i\in I}$ est une base de F.
   (b) S'il existe une base $(e_i)_{i\in I}$ de E telle que $(u(e_i))_{i\in I}$ est une base de F, alors montrer que u est un isomorphisme.

Corrigé de l'exercice 4

Exercice 5 (Isomorphismes et dimensions)**

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
   Montrer que E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.
2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer le *théorème d'isomorphisme* : tout supplémentaire de $Ker(u)$ dans E est isomorphe à $Im(u)$.
3. En déduire le *théorème du rang* : si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie, alors $Im(u)$ est de dimension finie et $\dim(Ker(u)) + rg(u) = \dim(E)$.

Corrigé de l'exercice 5

Exercice 6 (Noyaux itérés)**

Dans tout cet exercice, on considère un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On définit les puissances de f par :

- $f^0 = Id_E$;
- $f^1 = f$;
- Pour tout $k \geq 1$, $f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f^k$.

1. Soit k un entier naturel. Justifier $Ker(f^k) \subset Ker(f^{k+1})$ et $Im(f^k) \supset Im(f^{k+1})$.
2. On suppose désormais que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, et on note $a_k = \dim(Ker(f^k))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Montrer qu'il existe alors un entier $q \in \{0, \ldots, p\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
   (i) pour tout entier $0 \leq k \leq q-1$, $Ker(f^k) \subsetneq Ker(f^{k+1})$,
   (ii) pour tout entier $k \geq q$, $Ker(f^k) = Ker(f^q)$.
3. Que vérifie d'analogue la suite $\big(Im(f^k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$?
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $d_k = a_{k+1} - a_k$.
   On veut montrer que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (a) Justifier l'existence d'un sous-espace vectoriel S_k tel que $Im(f^k) = Im(f^{k+1}) \oplus S_k$.
   (b) Établir $Im(f^{k+1}) = Im(f^{k+2}) + f(S_k)$.
   (c) En déduire le résultat souhaité.
5. En déduire finalement qu'on a : $\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$, $a_{k+j} \leq a_k + a_j$.

Corrigé de l'exercice 6

1. Si $x \in Ker(f^k)$, alors $f^k(x) = 0_E$, donc $f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) = f^k(0_E) = 0_E$, donc $x \in Ker(f^{k+1})$. Ceci montre $Ker(f^k) \subset Ker(f^{k+1})$.
   Si $y \in Im(f^{k+1})$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x))$, donc $y \in Im(f^k)$, ce qui montre $Im(f^{k+1}) \subset Im(f^k)$.
2. Vu les inclusions précédentes, la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels, majorée par $\dim(E) = p$, donc l'ensemble
   $$X = \{k \in \{0, \cdots, p\},\ a_k = a_{k+1}\} \subset \mathbb{N}$$
   est non vide (sinon, on aurait $0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_p < a_{p+1}$, et donc $a_{p+1} \geq p+1$, ce qui est impossible). Donc X possède un plus petit élément, noté :
   $$q = \min\{k \in \{0, \cdots, p\},\ a_k = a_{k+1}\}.$$
   Par définition de q, on a $a_0 < a_1 < \cdots < a_q$, donc
   $$Ker(f^0) \subsetneq Ker(f) \subsetneq Ker(f^2) \subsetneq \cdots \subsetneq Ker(f^{q-1}) \subsetneq Ker(f^q) = Ker(f^{q+1}).$$
   Reste à montrer que $Ker(f^k) = Ker(f^q)$ pour tout $k > q$. Il suffit pour cela de montrer que $Ker(f^k) \subset Ker(f^q)$. Si $x \in Ker(f^k)$, alors $f^k(x) = 0_E$, donc $f^{q+1}(f^{k-q-1}(x)) = 0_E$, ce qui a du sens puisque $k-q-1 \geq 0$. Cela signifie que $f^{k-q-1}(x) \in Ker(f^{q+1})$, mais $Ker(f^{q+1}) = Ker(f^q)$, et donc $f^{k-q-1}(x) \in Ker(f^q)$, c'est-à-dire $f^q(f^{k-q-1}(x)) = 0_E$, ou encore $f^{k-1}(x) = 0_E$. Ceci montre que $\forall k > q$, $Ker(f^k) \subset Ker(f^{k-1})$, et donc par récurrence immédiate :
   $$\forall k > q, \qquad Ker(f^k) \subset Ker(f^{k-1}) \subset \cdots \subset Ker(f^q).$$
   Finalement, on a bien :
   $$Ker(f^0) \subsetneq Ker(f) \subsetneq \cdots \subsetneq Ker(f^{q-1}) \subsetneq Ker(f^q) = Ker(f^{q+1}) = Ker(f^{q+2}) = \cdots$$
3. De façon analogue, la suite $(Im(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie :
   $$Im(f^0) \supsetneq Im(f) \supsetneq \cdots \supsetneq Im(f^{q-1}) \supsetneq Im(f^q) = Im(f^{q+1}) = Im(f^{q+2}) = \cdots,$$
   car d'après le théorème du rang et les inclusions de la question 1., on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:
   $$Im(f^k) = Im(f^{k+1}) \iff \dim(Im(f^k)) = \dim(Im(f^{k+1})) \iff a_k = a_{k+1} \iff Ker(f^k) = Ker(f^{k+1}).$$

4. (a) $Im(f^{k+1})$ est un sev de $Im(f^k)$, donc il possède un supplémentaire S_k dans $Im(f^k)$.
   (b) Puisque S_k et $Im(f^{k+1}) = f^{k+1}(E)$ sont des sev de $Im(f^k) = f^k(E)$, on obtient en appliquant f que $f(S_k)$ et $f^{k+2}(E)$ sont des sev de $f^{k+1}(E)$, d'où l'inclusion
$$Im(f^{k+2}) + f(S_k) \subset Im(f^{k+1}).$$
Montrons l'inclusion réciproque : si $x \in Im(f^{k+1})$, alors il existe $t \in E$ tel que $x = f^{k+1}(t)$. Mais $f^k(t) \in Im(f^k) = Im(f^{k+1}) \oplus S_k$, donc $f^k(t)$ se décompose sous la forme
$$f^k(t) = f^{k+1}(u) + s,$$
avec $u \in E$ et $s \in S_k$, et finalement
$$x = f^{k+1}(t) = f\left(f^{k+1}(u) + s\right) = f^{k+2}(u) + f(s) \in Im(f^{k+2}) + f(S_k),$$
ce qui prouve que
$$Im(f^{k+1}) \subset Im(f^{k+2}) + f(S_k).$$
   (c) Par somme directe, on a
$$\dim(Im(f^k)) = \dim(Im(f^{k+1})) + \dim(S_k),$$
donc par le théorème du rang :
$$a_k = a_{k+1} - \dim(S_k).$$
En outre,
$$\dim(Im(f^{k+1})) = \dim(Im(f^{k+2}) + f(S_k)) \leq \dim(Im(f^{k+2})) + \dim(f(S_k)),$$
donc par le théorème du rang :
$$a_{k+1} \geq a_{k+2} - \dim(f(S_k)).$$
Finalement, puisqu'une application linéaire fait baisser la dimension (elle la conserve au mieux si elle est injective), on a :
$$d_k = a_{k+1} - a_k = \dim(S_k) \geq \dim(f(S_k)) \geq a_{k+2} - a_{k+1} = d_{k+1},$$
ce qui prouve que $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. On utilise un téléscopage : pour $(j,k) \in \mathbb{N}^2$:
$$a_{k+j} - a_j = \sum_{l=j}^{k+j-1} (a_{l+1} - a_l) = \sum_{l=j}^{k+j-1} d_l,$$
donc par décroissance de (d_l) :
$$a_{k+j} - a_j \leq \sum_{l=j}^{k+j-1} d_{l-j} = \sum_{l=0}^{k-1} d_l = a_k - a_0 = a_k$$
(puisque $a_0 = \dim(Ker(Id)) = 0$), ce qui donne l'inégalité voulue.

II Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 7 (Somme directe et polynômes)**
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on note $F_i = \left\{P \in E,\ \forall j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\right\}$.
Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels et que $E = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Corrigé de l'exercice 7
Il est facile de voir que chaque F_i est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1, car les éléments de F_i sont les polynômes de degré $\leq n$ divisibles par $X-j$ pour tout $j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}$, donc pour des raisons de degré :

$$F_i = \{\lambda \prod_{j\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\}} (X-j),\ \lambda \in \mathbb{K}\} = Vect\left(\prod_{j\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\}} (X-j)\right).$$

Montrons que $F_0, \cdots, F_n$ sont en somme directe : si $P_0 + \cdots + P_n = 0$ avec chaque P_i dans chaque F_i, alors en évaluant en $X = j$, on obtient :

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \qquad P_j(j) = 0$$

Ainsi, pour tout j, le polynôme P_j a pour racines tous les entiers de $[\![0,n]\!]$ ($P_j \in F_j$ donc $P_j(i) = 0$ pour $i \in [\![0,n]\!] \setminus \{j\}$, et on vient de montrer qu'en plus $P_j(j) = 0$), c'est-à-dire $n+1$ racines distinctes, alors que $\deg(P_j) \leq n$, donc $P_j = 0$. On a montré que $(P_0 + \cdots + P_n = 0) \implies (P_0 = \cdots = P_n = 0)$, donc $F_0, \cdots, F_n$ sont en somme directe.
Enfin, on a $\sum_{i=0}^n \dim(F_i) = n+1 = \dim(E)$, donc $F_0 \oplus \cdots \oplus F_n = E$.

Exercice 8 (Pseudo-inverse d'un endomorphisme)**
Soient u et v deux endomorphismes d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que v est un pseudo-inverse de u si les trois relations suivantes sont vérifiées : $uv = vu$, $uvu = u$, $vuv = v$.
On suppose que u admet un pseudo-inverse v. Montrer que $E = Im(u) \oplus Ker(v)$.

Corrigé de l'exercice 8
On procède par analyse-synthèse, en montrant que tout $x \in E$ se décompose de manière unique sous la forme

$$x = x_1 + x_2, \qquad x_1 \in Im(u), \quad x_2 \in Ker(v).$$

Analyse : si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 = u(t)$, $t \in E$ et $v(x_2) = 0$, alors $v(x) = v(u(t))$, donc

$$(uv)(x) = (uvu)(t) = u(t) = x_1,$$

et

$$x_2 = x - x_1 = x - (uv)(x),$$

ce qui montre l'unicité de la décomposition sous réserve d'existence.
Synthèse : étant donné $x \in E$, on pose

$$x_1 = (uv)(x), \qquad x_2 = x - (uv)(x).$$

On a bien $x = x_1 + x_2$, $x_1 = u(v(x)) \in Im(u)$ et $x_2 \in Ker(v)$ car

$$v(x_2) = v(x) - (vuv)(x) = v(x) - v(x) = 0,$$

d'où l'existence de la décomposition voulue.
Finalement, on a $E = Im(u) \oplus Ker(v)$.

Exercice 9 (Formule de Grassmann)**
Soit F et G deux sev de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Justifier l'existence de deux sev F_1, G_1 de E tels que

$$(F \cap G) \oplus F_1 = F, \qquad (F \cap G) \oplus G_1 = G.$$

2. En déduire une démonstration de la *formule de Grassmann* :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Corrigé de l'exercice 9

1. F étant un espace vectoriel de dimension finie, le théorème de la base incomplète s'applique : toute base $\mathcal{B}_1$ de $F \cap G$ peut être complétée en une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ de F, et de fait, $\mathcal{B}_2$ engendre un supplémentaire de $(F \cap G)$ dans F, noté F_1. De même pour G.
2. On a $F + G = (F \cap G) \oplus F_1 \oplus G_1$. En effet :
   - si $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ avec $x_1 \in (F \cap G)$, $x_2 \in F_1$, $x_3 \in G_1$, alors $x_3 = -x_1 - x_2 \in F$ (puisque $F_1 \subset F$ et F est stable par somme). Donc $x_3 \in F \cap G_1 = (F \cap G) \cap G_1$ (puisque $G_1 \subset G$). Mais $(F \cap G) \cap G_1 = \{0_E\}$, donc $x_3 = 0$. Il reste $x_1 + x_2 = 0$ avec $x_1 \in (F \cap G)$ et $x_2 \in F_1$. Mais $(F \cap G)$ et F_1 sont en somme directe, donc $x_1 = x_2 = 0$.
     Ceci montre que la somme $(F \cap G) + F_1 + G_1$ est directe.
   - $F + G = ((F \cap G) + F_1) + ((F \cap G) + G_1) = (F \cap G) + F_1 + G_1$ (puisque $F \cap G$ est stable par somme).

   Par les propriétés des sommes directes, on en déduit :
   $$\dim(F + G) = \dim((F \cap G) \oplus F_1 \oplus G_1) = \dim(F \cap G) + \dim(F_1) + \dim(G_1),$$
   et donc
   $$\dim(F+G) = \dim(F\cap G)+(\dim(F)-\dim(F\cap G))+(\dim(G)-\dim(F\cap G)) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G).$$

III Opérations matricielles par blocs

Exercice 10 (Calculs par blocs)**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r décomposée par blocs sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ supposée inversible.

1. Montrer que pour toute colonne $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, il existe une colonne $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ telle que $M \begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}$. *On pourra examiner $Im(M)$.*
2. En déduire que $D = CA^{-1}B$.

Corrigé de l'exercice 10

1. Le vecteur $M \begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix}$ est dans $Im(M)$. Déterminons une base de ce sous-espace. Vu que A est une sous-matrice de $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$, qui est elle-même une sous-matrice de M, on en déduit que
   $$r = rg(A) \leq rg \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \leq rg(M) = r,$$
   et donc $rg \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r$, et c'est une matrice à r colonnes, donc les r premières colonnes de M, notées $C_1, \cdots, C_r$, sont libres. Vu que $rg(M) = \dim(Im(M)) = r$, on a donc $(C_1, \cdots, C_r)$ qui est une base de $Im(M)$.
   Ainsi, le vecteur $M \begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $(C_1, \cdots, C_r)$: il existe $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que
   $$M \begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i C_i = M \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i E_i \right),$$
   en notant $(E_1, \cdots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
   On conclut en remarquant que
   $$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i E_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix},$$

d'où le résultat voulu en posant $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}$.

2. La question précédente montre que pour toute colonne $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, il existe une colonne $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ telle que $\begin{pmatrix} BY \\ DY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ CX \end{pmatrix}$, donc en particulier, puisque A est inversible :

$$DY = CX = CA^{-1}(AX) = CA^{-1}BY.$$

Ceci étant vrai pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, on en déduit que $D = CA^{-1}B$.

Exercice 11 (*Un calcul de déterminant)
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec D inversible et C qui commute avec D.
Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

Corrigé de l'exercice 11
Il suffit de remarquer que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & (0) \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ (0) & D \end{pmatrix},$$

et d'utiliser la multiplicativité du déterminant, ainsi que les formules de déterminants de matrices triangulaires par blocs.

IV $\mathbb{K}$-algèbres

Exercice 12 (*Exemples de sous-algèbres)

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   (a) Rappeler quelles lois font de $\mathcal{L}(E)$ une $\mathbb{K}$-algèbre.
   (b) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ g \circ f = f \circ g\}$. Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ forme-t-il une sous-algèbre de $\mathbb{K}[X]$?
   (b) À part $\mathbb{K}[X]$ et les éventuelles sous-algèbres mises en évidence à la question précédente, pouvez-vous donner d'autres sous-algèbres de $\mathbb{K}[X]$?

Corrigé de l'exercice 12

1. (a) $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
   (b) Vérifications simples : pour tout $g_1, g_2 \in C(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

   $$Id_E \in C(f), \qquad \lambda g_1 + g_2 \in C(f), \qquad g_1 \circ g_2 \in C(f).$$

2. (a) $\mathbb{K}_0[X]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}[X]$ (facile).
   Pour $n \geq 1$, $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathbb{K}[X]$ car elle n'est pas stable par produit.
   (b) Il y en a plein : pour tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble

   $$\mathbb{K}[A] = \left\{ \sum_{k=0}^{d} a_k A^k,\ d \in \mathbb{N},\ (a_0, \cdots, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1} \right\} = Vect((A^k)_{k \in \mathbb{N}})$$

   (les polynômes en le polynôme A) est une sous-algèbre de $\mathbb{K}[X]$.
   Par exemple, $\mathbb{K}[X^2]$ est l'algèbre des polynômes pairs.