# Exercices du CH04 : Compléments d'algèbre linéaire

**Exercices de la banque INP à étudier** : ex 60 (étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), 64 (endos avec noyau et image supplémentaires), 71 (étude d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$), 87, 90 (interpolation de Lagrange).

## I Révisions MP2I

**Exercice 1 (*Etude d'un endomorphisme particulier)**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$. Qu'en déduire sur $f$ ?
2. Déterminer une base de $Im(f)$ et de $Ker(f)$.
3. Montrer qu'on a $E = Im(f) \oplus Ker(f)$.
4. Quelle est la matrice de $f$ dans une base adaptée à la somme directe $E = Im(f) \oplus Ker(f)$ ?

**Exercice 2 (*Etude d'une symétrie)**
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P} : x + y - z = 0$ et $\mathcal{D} = Vect(u)$ avec $u = (2, 0, 1)$.

1. (a) Donner deux vecteurs $(v, w)$ formant une base de $\mathcal{P}$, et justifier rapidement que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice de passage $Q$ de la base canonique $\mathcal{B}_0$ vers la base $\mathcal{B}$.
   (c) Calculer l'inverse de $Q$.
2. Soit $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.
   (a) Donner la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(s)$ de l'endomorphisme $s$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) En déduire la matrice $A = Mat_{\mathcal{B}_0}(s)$ de $s$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
   (c) En déduire l'expression de $s(u)$ pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque.
   (d) Calculer $A^2$. Le résultat est-il surprenant ?

**Exercice 3 (**Une base polynomiale)**
Pour des entiers $0 \leq k \leq n$, on pose $P_{k,n} = X^k(1 - X)^{n-k}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{B}_n = (P_{0,n}, P_{1,n}, \cdots, P_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**Exercice 4 (**Familles libres, liées, génératrices)**
$E$ et $F$ désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $I$ un ensemble d'indices quelconque.

1. Montrer qu'une famille $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ est liée si et seulement si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
2. Etant donnés une famille libre $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ et $x \in E$, à quelle condition la "sur-famille" $((e_i)_{i\in I}, x)$ est-elle libre ?
3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $(e_i)_{i\in I}$ est une base de $E$ ;
   (ii) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre maximale de $E$ ;
   (iii) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice minimale de $E$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
   (a) Si $u$ est un isomorphisme, montrer que pour toute base $(e_i)_{i\in I}$ de $E$, la famille $(u(e_i))_{i\in I}$ est une base de $F$.
   (b) S'il existe une base $(e_i)_{i\in I}$ de $E$ telle que $(u(e_i))_{i\in I}$ est une base de $F$, alors montrer que $u$ est un isomorphisme.

**Exercice 5 (**Isomorphismes et dimensions)**

1. Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
   Montrer que $E$ et $F$ sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.
2. Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer le *théorème d'isomorphisme* : tout supplémentaire de $Ker(u)$ dans $E$ est isomorphe à $Im(u)$.
3. En déduire le *théorème du rang* : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $E$ de dimension finie, alors $Im(u)$ est de dimension finie et $\dim(Ker(u)) + rg(u) = \dim(E)$.

**Exercice 6 (**Noyaux itérés)**

Dans tout cet exercice, on considère un endomorphisme $f$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.
On définit les puissances de $f$ par :

- $f^0 = Id_E$ ;
- $f^1 = f$ ;
- Pour tout $k \geq 1$, $f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f^k$.

1. Soit $k$ un entier naturel. Justifier $Ker(f^k) \subset Ker(f^{k+1})$ et $Im(f^k) \supset Im(f^{k+1})$.
2. On suppose désormais que $E$ est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, et on note $a_k = \dim(Ker(f^k))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Montrer qu'il existe alors un entier $q \in \{0, \ldots, p\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
   - $(i)$ pour tout entier $0 \leq k \leq q-1$, $Ker(f^k) \subsetneq Ker(f^{k+1})$,
   - $(ii)$ pour tout entier $k \geq q$, $Ker(f^k) = Ker(f^q)$.
3. Que vérifie d'analogue la suite $\big(Im(f^k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ ?
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $d_k = a_{k+1} - a_k$.
   On veut montrer que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (a) Justifier l'existence d'un sous-espace vectoriel $S_k$ tel que $Im(f^k) = Im(f^{k+1}) \oplus S_k$.
   (b) Établir $Im(f^{k+1}) = Im(f^{k+2}) + f(S_k)$.
   (c) En déduire le résultat souhaité.
5. En déduire finalement qu'on a : $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$, $a_{k+j} \leq a_k + a_j$.

# II Somme de sous-espaces vectoriels

**Exercice 7 (**Somme directe et polynômes)**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note $F_i = \big\{P \in E,\ \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\big\}$.
Montrer que les $F_i$ sont des sous-espaces vectoriels et que $E = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n$.

**Exercice 8 (**Pseudo-inverse d'un endomorphisme)**

Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. On dit que $v$ est un pseudo-inverse de $u$ si les trois relations suivantes sont vérifiées : $uv = vu$, $uvu = u$, $vuv = v$.
On suppose que $u$ admet un pseudo-inverse $v$. Montrer que $E = Im(u) \oplus Ker(v)$.

**Exercice 9 (**Formule de Grassmann)**

Soit $F$ et $G$ deux sev de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

1. Justifier l'existence de deux sev $F_1, G_1$ de $E$ tels que

$$(F \cap G) \oplus F_1 = F, \qquad (F \cap G) \oplus G_1 = G.$$

2. En déduire une démonstration de la *formule de Grassmann* :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

# III Opérations matricielles par blocs

**Exercice 10 (**Calculs par blocs)**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang $r$ décomposée par blocs sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ supposée inversible.

1. Montrer que pour toute colonne $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, il existe une colonne $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ telle que $M \begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}$. *On pourra examiner $Im(M)$.*
2. En déduire que $D = CA^{-1}B$.

**Exercice 11 (*Un calcul de déterminant)**

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $D$ inversible et $C$ qui commute avec $D$.
Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

# IV $\mathbb{K}$-algèbres

**Exercice 12 (*Exemples de sous-algèbres)**

1. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   (a) Rappeler quelles lois font de $\mathcal{L}(E)$ une $\mathbb{K}$-algèbre.
   (b) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ g \circ f = f \circ g\}$. Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ forme-t-il une sous-algèbre de $\mathbb{K}[X]$ ?
   (b) À part $\mathbb{K}[X]$ et les éventuelles sous-algèbres mises en évidence à la question précédente, pouvez-vous donner d'autres sous-algèbres de $\mathbb{K}[X]$ ?