Exercices du CH04 : Compléments d'algèbre linéaire

Exercices de la banque INP à étudier : ex 60 (étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), 64 (endos avec noyau et image supplémentaires), 71 (étude d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$), 87, 90 (interpolation de Lagrange).

I Révisions MP2I

Exercice 1 (*Etude d'un endomorphisme particulier)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?
2. Déterminer une base de $Im(f)$ et de $Ker(f)$.
3. Montrer qu'on a $E = Im(f) \oplus Ker(f)$.
4. Quelle est la matrice de f dans une base adaptée à la somme directe $E = Im(f) \oplus Ker(f)$?

Exercice 2 (*Etude d'une symétrie)
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P} : x + y - z = 0$ et $\mathcal{D} = Vect(u)$ avec $u = (2, 0, 1)$.

1. (a) Donner deux vecteurs (v, w) formant une base de $\mathcal{P}$, et justifier rapidement que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice de passage Q de la base canonique $\mathcal{B}_0$ vers la base $\mathcal{B}$.
   (c) Calculer l'inverse de Q.
2. Soit $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.
   (a) Donner la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(s)$ de l'endomorphisme s dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) En déduire la matrice $A = Mat_{\mathcal{B}_0}(s)$ de s dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
   (c) En déduire l'expression de $s(t)$ pour $t = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque.
   (d) Calculer A^2. Le résultat est-il surprenant ?

Exercice 3 (Une base polynomiale)**
Pour des entiers $0 \leq k \leq n$, on pose $P_{k,n} = X^k(1 - X)^{n-k}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{B}_n = (P_{0,n}, P_{1,n}, \cdots, P_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4 (Familles libres, liées, génératrices)**
E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et I un ensemble d'indices quelconque.

1. Montrer qu'une famille $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ est liée si et seulement si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
2. Etant donnés une famille libre $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ et $x \in E$, à quelle condition la "sur-famille" $((e_i)_{i\in I}, x)$ est-elle libre ?
3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E ;
   (ii) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre maximale de E ;
   (iii) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice minimale de E.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
   (a) Si u est un isomorphisme, montrer que pour toute base $(e_i)_{i\in I}$ de E, la famille $(u(e_i))_{i\in I}$ est une base de F.
   (b) S'il existe une base $(e_i)_{i\in I}$ de E telle que $(u(e_i))_{i\in I}$ est une base de F, alors montrer que u est un isomorphisme.

Exercice 5 (Isomorphismes et dimensions)**

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
   Montrer que E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.
2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer le *théorème d'isomorphisme* : tout supplémentaire de $Ker(u)$ dans E est isomorphe à $Im(u)$.
3. En déduire le *théorème du rang* : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie, alors $Im(u)$ est de dimension finie et $\dim(Ker(u)) + rg(u) = \dim(E)$.

Exercice 6 (Noyaux itérés)**

Dans tout cet exercice, on considère un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On définit les puissances de f par :

- $f^0 = Id_E$;
- $f^1 = f$;
- Pour tout $k \geq 1$, $f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f^k$.

1. Soit k un entier naturel. Justifier $Ker(f^k) \subset Ker(f^{k+1})$ et $Im(f^k) \supset Im(f^{k+1})$.
2. On suppose désormais que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, et on note $a_k = \dim(Ker(f^k))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Montrer qu'il existe alors un entier $q \in \{0, \ldots, p\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
   (i) pour tout entier $0 \leq k \leq q-1$, $Ker(f^k) \subsetneq Ker(f^{k+1})$,
   (ii) pour tout entier $k \geq q$, $Ker(f^k) = Ker(f^q)$.
3. Que vérifie d'analogue la suite $\left(Im(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$?
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $d_k = a_{k+1} - a_k$.
   On veut montrer que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (a) Justifier l'existence d'un sous-espace vectoriel S_k tel que $Im(f^k) = Im(f^{k+1}) \oplus S_k$.
   (b) Établir $Im(f^{k+1}) = Im(f^{k+2}) + f(S_k)$.
   (c) En déduire le résultat souhaité.
5. En déduire finalement qu'on a : $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$, $a_{k+j} \leq a_k + a_j$.

II Dualité

Exercice 7 (Base duale, antéduale)**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E (c'est le *dual* de E).
On considère la famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ de E^* définie par

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

(où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker valant 1 si $i = j$ et 0 sinon).

1. Montrer que $\mathcal{B}^*$ est une base de E^*, appelée la *base duale* de $\mathcal{B}$.
   Déterminer également la décomposition d'un élément $f \in E^*$ dans $\mathcal{B}^*$.
2. Un exemple : soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B}_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de E.
   On considère les formes linéaires

$$f_1 = 2\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*, \qquad f_1 = -\varepsilon_1^* + 2\varepsilon_3^*, \qquad f_1 = \varepsilon_1^* + 3\varepsilon_2^*.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E^*.
   (b) Montrer qu'il existe une unique base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E telle que $\mathcal{C} = \mathcal{B}^*$.
   On déterminera explicitement $\mathcal{B}$.
3. On revient au cas général (E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$).
   En utilisant la méthode de la question précédente, montrer que toute base $\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_n)$ de E^* est la base duale d'une unique base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E. On dit alors que $\mathcal{B}$ est la *base antéduale* de $\mathcal{C}$.

Exercice 8 (*Rang et transposition)**
Le but de cet exercice est de démontrer qu'une matrice et sa transposée ont même rang en utilisant la dualité (cf. exercice précédent).
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels non nuls et de dimension finie. On note $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$. Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit *l'application transposée de u* :

$$ {}^t u : \left\{ \begin{array}{ccc} F^* & \longrightarrow & E^* \\ \varphi & \longmapsto & {}^t u(\varphi) = \varphi \circ u \end{array} \right. . $$

1. Montrer que ${}^t u$ est bien définie et linéaire.
2. Déterminer $Ker({}^t u)$.
   On pourra utiliser une base de F bien choisie et sa base duale.
3. En déduire que $rg({}^t u) = rg(u)$.
4. En déduire enfin une démonstration du théorème :

$$ \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad rg(A^T) = rg(A). $$

III Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 9 (Somme directe et polynômes)**
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note $F_i = \big\{P \in E,\ \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\big\}$.
Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels et que $E = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Exercice 10 (Pseudo-inverse d'un endomorphisme)**
Soient u et v deux endomorphismes d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que v est un pseudo-inverse de u si les trois relations suivantes sont vérifiées : $uv = vu$, $uvu = u$, $vuv = v$.
On suppose que u admet un pseudo-inverse v. Montrer que $E = Im(u) \oplus Ker(v)$.

Exercice 11 (Formule de Grassmann)**
Soit F et G deux sev de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Justifier l'existence de deux sev F_1, G_1 de E tels que

$$ (F \cap G) \oplus F_1 = F, \qquad (F \cap G) \oplus G_1 = G. $$

2. En déduire une démonstration de la *formule de Grassmann* :

$$ \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G). $$

IV Opérations matricielles par blocs

Exercice 12 (Calculs par blocs)**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r décomposée par blocs sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ supposée inversible.

1. Montrer que pour toute colonne $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, il existe une colonne $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ telle que $M \begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}$. *On pourra examiner $Im(M)$.*
2. En déduire que $D = CA^{-1}B$.

Exercice 13 (*Un calcul de déterminant)
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec D inversible et C qui commute avec D.
Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

V $\mathbb{K}$-algèbres

Exercice 14 (*Exemples de sous-algèbres)

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   (a) Rappeler quelles lois font de $\mathcal{L}(E)$ une $\mathbb{K}$-algèbre.
   (b) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ g \circ f = f \circ g\}$. Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ forme-t-il une sous-algèbre de $\mathbb{K}[X]$?
   (b) À part $\mathbb{K}[X]$ et les éventuelles sous-algèbres mises en évidence à la question précédente, pouvez-vous donner d'autres sous-algèbres de $\mathbb{K}[X]$?

Exercice 15 (**)
Soit $\mathbb{K}$ un corps, soit A une $\mathbb{K}$-algèbre commutative, intègre, et de dimension finie.
Montrer que A est un corps.