Exercices du CH02 : Intégration sur un intervalle quelconque

Exercices de la banque INP à étudier : ex 28 (deux exemples d'étude d'intégrabilité)

I Exemples d'étude de convergence

Exercice 1 (*)
Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt, \quad (b) \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)} dt, \quad (c) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\mathrm{ch}(t)} dt \quad (d) \int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-t}} dt,$$

$$(e) \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}, \quad (f) \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{e^t-1-t}} dt.$$

Corrigé de l'exercice 1

(a) La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
En 0 : f se prolonge par continuité puisque $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{t^2}{t^2} = 1$, donc $\int_0^1 f$ converge.
En $+\infty$: on a la majoration $\forall t \geq 1,\ 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2}$, donc par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} f$ converge.
Finalement $\int_0^{+\infty} f$ converge.

(b) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$ (inverse d'une fonction continue non nulle car $\forall t \geq 2,\ t\ln(t) > 0$). Pour tout $x \geq 2$, on a :

$$\int_2^x f = \int_2^x \frac{1/t}{\ln(t)} dt = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc $\int_2^{+\infty} f$ diverge.

(c) La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{\mathrm{ch}(t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (car $\mathrm{ch} > 0$).
En 0 : $f(t) \underset{0^+}{\sim} \ln(t)$, donc par comparaison de fonctions négatives, $\int_0^1 f$ converge.
En $+\infty$: $t^2 f(t) \underset{+\infty}{\sim} 2t^2\ln(t)e^{-t} \underset{+\infty}{\to} 0$, donc $f(t) = o(1/t^2)$, ce qui montre que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Finalement, $\int_0^{+\infty} f$ converge.

(d) La fonction $f : t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0, 1[$.
De plus, en utilisant le changement de variables généralisé $u = 1 - t$, on a (sous réserve de convergence) :

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{\cos(1-u)}{\sqrt{u}} du,$$

et ces intégrales convergent par comparaison de fonctions positives car

$$\forall u \in]0, 1[, \qquad 0 \leq \frac{\cos(1-u)}{\sqrt{u}} \leq \frac{1}{u^{1/2}}.$$

Donc $\int_0^1 f$ converge.

(e) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1[$.
En 0 : $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}}$ donc f est intégrable au voisinage de 0.
En 1 : $f(t) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{1-t}$, donc $\int_{1/2}^1 f$ diverge (puisque $\int_{1/2}^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x) - \ln(2) \underset{x\to1^-}{\to} +\infty$).
Finalement, $\int_0^1 f$ diverge.

(f) La fonction $f : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{e^t-1-t}}dt$ est continue sur $]0,+\infty[$ (car $\forall t > 0,\ e^t > 1+t$ par stricte convexité de la fonction exponentielle, ou par étude de la fonction $t \mapsto e^t - 1 - t$).
En 0^+, $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{\sqrt{t^2/2}} = \sqrt{2}$, donc f se prolonge continûment en 0. D'où $\int_0^1 f$ converge.
En $+\infty$, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} te^{-t/2} = o(1/t^2)$, donc $\int_1^{+\infty} f$ converge.
Finalement, $\int_0^{+\infty} f$ converge.

Exercice 2 (Etude d'intégrabilité)**
Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables :

(a) $f : t \mapsto e - \left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ sur $[1,+\infty[$.

(b) $f : t \mapsto \frac{\sqrt{\ln(t)}}{(t-1)\sqrt{t}}$ sur $]1\,;+\infty[$.

(c) $f : t \mapsto \frac{\tan(t)}{t}$ sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Corrigé de l'exercice 2

(a) La fonction $f : t \mapsto e - \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e - \exp\left(t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)$ est continue sur $[1,+\infty[$.
En outre,

$$f(t) = e - \exp\left(t\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + o(1/t^2)\right)\right) = e\left(1 - e^{-1/(2t)+o(1/t)}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2t},$$

donc f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ (comme $t \mapsto 1/t$).

(b) La fonction $f : t \mapsto \frac{\sqrt{\ln(t)}}{(t-1)\sqrt{t}}$ est continue sur $]1,+\infty[$.
En $+\infty$: $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\ln(t))^{1/2}}{t^{3/2}} = o(1/t^{5/4})$, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$.
En 1 : $f(t) = \frac{\ln(1+t-1)}{(t-1)\sqrt{t}} \underset{1^+}{\sim} \frac{t-1}{t-1} = 1$, donc f est intégrable au voisinage de 1.
Finalement, f est intégrable sur $]1,+\infty[$.

(c) La fonction $f : t \mapsto \frac{\tan(t)}{t}$ est continue sur $]0,\pi/2[$.
En 0 : f se prolonge continûment puisque $\tan(t) \sim t$, donc $f(t) \to 1$. On en déduit que f est intégrable au voisinage de 0.
En $\pi/2$: en posant $u = \frac{\pi}{2} - t \underset{t\to\pi/2^-}{\to} 0^+$, on a

$$f(t) = \frac{\tan(\pi/2-u)}{\pi/2-u} \underset{0^+}{\sim} \frac{2}{\pi}\frac{\sin(\pi/2-u)}{\cos(\pi/2-u)} = \frac{2\cos(u)}{\pi\sin(u)} \underset{0^+}{\sim} \frac{2}{\pi u},$$

donc f n'est pas intégrable au voisinage de $\pi/2$.
Finalement, f n'est pas intégrable sur $]0,\pi/2[$.

Exercice 3 (Le grand classique : l'intégrale de Dirichlet)**

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.
2. Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}dt$ diverge.

   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est semi-convergente.
3. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^t)dt$.

Corrigé de l'exercice 3

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   En 0 : f se prolonge continûment (car $f(t) \sim \frac{t}{t} = 1$), donc $\int_0^1 f$ converge.

En $+\infty$: on fixe $x \geq 1$ et on fait une IPP sur le segment $[1,x]$:

$$\int_1^x f = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt.$$

D'une part, on a $\left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

D'autre part, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}$ converge absolument car la fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$. Donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt \underset{x\to+\infty}{\to} \ell$.

Par somme de limites, $\int_1^x f \underset{x\to+\infty}{\to} \cos(1) - \ell \in \mathbb{R}$, ce qui montre que $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Finalement, $\int_0^{+\infty} f$ converge.

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}dt$.
Par changement de variable affine :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \int_0^\pi \frac{|\sin(x+n\pi)|}{x+n\pi}dx = \int_0^\pi \frac{|\sin(x)|}{x+n\pi}dx \geq \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{\pi+n\pi}dx = \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

Par minoration de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq1} u_n$ diverge (puisque $\sum_{n\geq0} \frac{2}{(n+1)\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}$ diverge).
On en déduit, pour tout entier $N \geq 1$:

$$\int_\pi^{(N+1)\pi} |f| = \sum_{n=1}^N u_n \underset{N\to+\infty}{\to} +\infty,$$

et donc $\int_\pi^{+\infty} |f|$ diverge (sinon, la suite $N \mapsto \int_\pi^{(N+1)\pi} |f|$ aurait une limite finie).
Finalement, $\int_0^{+\infty} f$ converge et $\int_0^{+\infty} |f|$ diverge, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ est semi-convergente.

3. Avec le changement de variable généralisé $t \mapsto e^t$ (qui est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $[1,+\infty[$), on a sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} \sin(e^t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du.$$

On reconnaît alors une intégrale convergente (d'après la question 1.), donc $\int_0^{+\infty} \sin(e^t)dt$ converge.

Exercice 4 (Intégrales de Bertrand)**

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on étudie la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$.

1. On suppose $\alpha > 1$. Montrer que l'intégrale étudiée converge.
2. On suppose $\alpha = 1$. Calculer $\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ et déterminer pour quels $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale étudiée converge.
3. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que l'intégrale étudiée diverge.
4. Déduire de ce qui précède la nature de l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$.

Corrigé de l'exercice 4

Pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on notera $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$. Cette fonction est continue sur $]1,+\infty[$, donc sur $[e,+\infty[$.

1. La stratégie est de comparer f à une fonction "de Riemann" $t \mapsto 1/t^\gamma$.
Si $\alpha > 1$, alors $t^\gamma f(t) = t^{\gamma-\alpha}\ln(t)^{-\beta} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ dès que $\gamma < \alpha$. En choisissant $1 < \gamma < \alpha$ (possible car $\alpha > 1$), on obtient donc $f(t) = o(1/t^\gamma)$ avec $\gamma > 1$, ce qui montre que $\int_e^{+\infty} f$ converge.
2. Si $\alpha = 1$, on peut faire un calcul direct de primitive : pour tout $x \geq e$, on a

$$\int_e^x f = \int_e^x (1/t)\ln(t)^{-\beta}dt = \begin{cases} \left[\frac{\ln(t)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_e^x & \text{si } \beta \neq 1 \\ [\ln(\ln(t))]_e^x & \text{si } \beta = 1 \end{cases},$$

et en examinant tous les cas, on constate que $x \mapsto \int_e^x f$ possède une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$. Donc $\int_e^{+\infty} f$ converge ssi $\beta > 1$.

3. Si $\alpha < 1$, on procède comme dans le cas $\alpha > 1$, mais "dans l'autre sens".
On a $t^\gamma f(t) = t^{\gamma-\alpha} \ln(t)^{-\beta} \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty$ dès que $\gamma > \alpha$. En choisissant (par exemple) $\gamma = 1$, on obtient $tf(t) \geq 1$ pour t suffisamment grand, c'est-à-dire $f(t) \geq \frac{1}{t}$ au voisinage de $+\infty$, et donc $\int_e^{+\infty} f$ diverge.
4. La fonction f est aussi continue sur $]0,1[$, donc sur $]0,1/e]$. Avec le changement de variable généralisé $t \mapsto 1/t$, on obtient que $\int_0^{1/e} |f(t)|dt$ est de même nature que

$$\int_e^{+\infty} |f(1/u)| \frac{du}{u^2} = \int_e^{+\infty} \frac{1}{u^{2-\alpha}(\ln(u))^\beta} du,$$

donc d'après les questions précédentes, $\int_0^{1/e} |f|$ converge ssi $(2-\alpha > 1)$ ou $(2-\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.
Finalement, $\int_0^{1/e} |f|$ converge ssi $(\alpha < 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

Exercice 5 (**)

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, discuter la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(t)|^b}{(1-t)^a} dt$.

Corrigé de l'exercice 5

La fonction $f : t \mapsto \frac{|\ln(t)|^b}{(1-t)^a}$ est continue sur $]0,1[$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
En 0 : $f(t) \underset{0^+}{\sim} |\ln(t)|^b = o(1/t^{1/2})$ (puisque $t^{1/2} f(t) \sim t^{1/2} |\ln(t)|^b \underset{0}{\to} 0$), donc f est intégrable au voisinage de 0 pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
En 1 : $\ln(t) = \ln(1-(1-t)) \underset{t \to 1^-}{\sim} -(1-t)$, donc $f(t) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{a-b}}$, donc par comparaison à un exemple de Riemann translaté, on obtient que $\int_{1/2}^1 f$ converge si et seulement si $a - b < 1$.
Finalement, $\int_0^1 f$ converge si et seulement si $a - b < 1$.

Exercice 6 (***)

Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2(x)}$.

Corrigé de l'exercice 6

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^4\sin^2(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0,+\infty[$ (puisque $1 + x^4 \sin^2(x) \geq 1 > 0$ pour tout réel x). Découpons l'intégrale en morceaux bien choisis : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2(x)}.$$

Par changement de variable affine :

$$u_n = \int_0^\pi \frac{du}{1 + (u+n\pi)^4 \sin^2(u+n\pi)} = \int_0^\pi \frac{du}{1 + (u+n\pi)^4 \sin^2(u)} \leq \int_0^\pi \frac{du}{1 + (n\pi)^4 \sin^2(u)}.$$

Par π-périodicité et parité de $u \mapsto \frac{1}{1+(n\pi)^4\sin^2(u)}$, on a donc

$$u_n \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{1 + (n\pi)^4 \sin^2(u)} = \int_0^{\pi/2} \frac{2du}{1 + (n\pi)^4 \sin^2(u)}$$

Pour continuer à majorer u_n, on peut alors minorer le sinus sur $[0,\pi/2]$ par sa corde (par concavité), d'équation $x \mapsto (2/\pi)x$:

$$u_n \leq \int_0^{\pi/2} \frac{2du}{1 + (n\pi)^4 (2u/\pi)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{2du}{1 + (2\pi n^2 u)^2} = \left[\frac{\arctan(2\pi n^2 u)}{\pi n^2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\arctan(\pi^2 n^2)}{\pi n^2} \leq \frac{1}{2n^2},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui montre que $\sum u_n$ converge.
La fonction f étant positive, on en déduit que $\int_0^{+\infty} f$ converge, puisque pour tout réel $x \geq 0$, on a, en notant N le plus petit entier tel que $(N+1)\pi > x$:

$$\int_0^x f \leq \int_0^{(N+1)\pi} f = \sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty,$$

ce qui montre que la fonction croissante $x \mapsto \int_0^x f$ est majorée, donc a une limite finie en $+\infty$.

II Calculs d'intégrales impropres

Exercice 7 (*)
Justifiez l'existence des intégrales suivantes et calculez leurs valeurs :

$$(a)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)(t+1)}dt, \quad (b)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}(2t)}dt, \quad (c)\ \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt,$$

$$(d)\ \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}dt, \quad (e)\ \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}dt, \quad (f)\ \int_0^{+\infty} e^{-at}\sin^2(\omega t)dt,\ (a,\omega) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 7

(a) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t+1)}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas). Pour tout $x \geq 0$, on obtient par décomposition en éléments simples :

$$\int_0^x f = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1-t}{1+t^2}\right) dt = \frac{1}{2}\left[\ln(1+t) + \arctan(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^x f = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right) + \frac{1}{2}\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}.$$

Donc $\int_0^{+\infty} f$ converge et $\int_0^{+\infty} f = \frac{\pi}{4}$.

(b) La fonction $f : t \mapsto \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}(2t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, puisque $\mathrm{ch} > 0$).
Avec le changement de variable généralisé $u = \mathrm{sh}(t)$ (licite car $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$), on obtient, sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}(2t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+2u^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+2u^2},$$

puisque $\mathrm{ch}(2t) = \frac{1}{2}(e^{2t} + e^{-2t}) = \frac{1}{2}\left((e^t - e^{-t})^2 + 2\right) = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2(t)$.
Enfin, $\frac{1}{1+2u^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(u\sqrt{2})\right)$, donc

$$\forall x \geq 0, \qquad \int_0^x \frac{du}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(x\sqrt{2}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(c) La fonction $f : t \mapsto \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0, 1[$.
Avec le changement de variable généralisé $t = \sin(u)$ (licite car $\sin : [0, \pi/2[\to [0, 1[$ est une bijection strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$), on obtient sous réserve de convergence :

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(u)}{|\cos(u)|}\cos(u)du = \int_0^{\pi/2} \sin^2(u)du,$$

car $\cos(u) > 0$ pour $u \in [0, \pi/2[$. Ceci montre la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f$, puisque $u \mapsto \sin^2(u)$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$. On termine le calcul en linéarisant $\sin^2(u)$:

$$\int_0^1 f = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2u)}{2}du = \frac{\pi}{4}.$$

(d) La fonction $f : t \mapsto \frac{\arctan(t)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Pour tout $x \geq 0$, on a

$$\int_0^x f = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2}\arctan^2(t)\right]_0^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{8},$$

donc $\int_0^{+\infty} f$ converge et $\int_0^{+\infty} f = \frac{\pi^2}{8}$.

(e) La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $]0, 1[$.
Dans l'intégrale doublement impropre $\int_0^1 f$, on effectue le changement de variable généralisé $u = \sqrt{1-t}$ (licite car $t \mapsto \sqrt{1-t}$ est une bijection strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, 1[$ dans lui-même, de réciproque $u \mapsto 1 - u^2$). Sous réserve de convergence, on a donc

$$\int_0^1 f = \int_1^0 \frac{\ln(1-u^2)}{u}(-2u)du = 2\int_0^1 \ln(1-u^2)du.$$

En décomposant $\ln(1-u^2) = \ln(1-u) + \ln(1+u)$, on obtient

$$\int_0^1 f = 2\left(\int_0^1 \ln(1-u)du + \int_0^1 \ln(1+u)du\right) = 2\left(\int_0^1 \ln(x)dx + \int_1^2 \ln(x)dx\right),$$

sous réserve que les deux intégrales convergent. Mais c'est le cas, car ln est continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable au voisinage de 0 (cas de référence). Donc $\int_0^1 f$ converge et par relation de Chasles,

$$\int_0^1 f = 2\int_0^2 \ln(x)dx = 2\lim_{\varepsilon\to0^+} [x\ln(x) - x]_\varepsilon^2 = 4(\ln(2) - 1).$$

(f) Soit $a > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$. La fonction $f : t \mapsto e^{-at}\sin^2(\omega t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0, +\infty[$), et on a

$$f(t) = \frac{e^{-at}}{2}(1 - \cos(2\omega t)) = \frac{e^{-at}}{2}(1 - Re(e^{i2\omega t})) = Re(g(t)),$$

en posant

$$g(t) = \frac{e^{-at}}{2}(1 - e^{i2\omega t}) = \frac{1}{2}(e^{-at} - e^{(-a+i2\omega)t}).$$

Pour tout $x \geq 0$:

$$\int_0^x g = \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-at}}{a} + \frac{e^{(-a+i2\omega)t}}{a-2i\omega}\right]_0^x$$

(puisque $a \neq 0$ et $-a + i2\omega \neq 0$ étant donné que $a > 0$). Vu que

$$|e^{(-a+i2\omega)x}| = e^{-ax} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

on en déduit que

$$\int_0^x g \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a-2i\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{a+2i\omega}{a^2+4\omega^2}\right),$$

et donc (par continuité de la partie réelle)

$$\int_0^x f \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} Re\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{a+2i\omega}{a^2+4\omega^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{a}{a^2+4\omega^2}\right).$$

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{a}{a^2+4\omega^2}\right) = \frac{2\omega^2}{a(a^2+4\omega^2)}$.

Exercice 8 (Calculs d'intégrales de fonctions à valeurs complexes)**
Calculer les intégrales qui suivent, en ayant justifié leur existence.

$$I(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt}e^{-|t|}dt, \text{ pour } z \in \mathbb{C}, \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+it)}.$$

Corrigé de l'exercice 8

1. Pour $z \in \mathbb{C}$, notons $f : t \mapsto e^{zt}e^{-|t|}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$). Etudions ses primitives sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$.
   - Si $t \geq 0$, alors $f(t) = e^{(z-1)t}$, donc
     * si $z = 1$, alors $f(t) = 1$ donc $\int_0^{+\infty} f$ diverge.
     * si $z \neq 1$, alors pour tout $x \geq 0$
     $$\int_0^x f = \frac{e^{(z-1)x} - 1}{z-1},$$
     donc $\int_0^{+\infty} f$ converge ssi $x \mapsto e^{(z-1)x}$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$.
   - Si $t \leq 0$, alors $f(t) = e^{(z+1)t}$, donc
     * si $z = -1$, alors $f(t) = 1$ donc $\int_{-\infty}^0 f$ diverge.
     * si $z \neq -1$, alors pour tout $x \leq 0$
     $$\int_x^0 f = \frac{1 - e^{(z+1)x}}{z+1},$$
     donc $\int_{-\infty}^0 f$ converge ssi $x \mapsto e^{(z+1)x}$ admet une limite finie lorsque $x \to -\infty$, ou encore ssi $x \mapsto e^{-(z+1)x}$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$
   - Par ailleurs, pour tout nombre complexe $w = u + iv$ non nul (avec u, v réels), on a
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad e^{wx} = e^{ux}e^{ivx},$$
   donc
     * si $u < 0$, $|e^{wx}| = e^{ux} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{wx} = 0$;
     * si $u > 0$, $|e^{wx}| = e^{ux} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$, donc $x \mapsto e^{wx}$ n'a pas de limite finie lorsque $x \to +\infty$;
     * si $u = 0$, on a $v \neq 0$ (puisque $w \neq 0$), donc $x \mapsto e^{wx} = e^{ivx}$ n'a pas de limite finie lorsque $x \to +\infty$ si $v > 0$ (car la suite $n \mapsto e^{iv\left(\frac{\pi n}{v}\right)} = (-1)^n$ diverge), non plus si $v < 0$ (par conjugaison).

   En définitive, pour tout $w \in \mathbb{C}^*$, la fonction $x \mapsto e^{wx}$ possède une limite finie lorsque $x \to +\infty$ si et seulement si $Re(w) < 0$, et dans ce cas, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{wx} = 0$.

   Revenons à notre intégrale : d'après les calculs de primitives précédemment effectués, on a $I(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f$ qui converge ssi $Re(z-1) < 0$ et $Re(-z-1) < 0$, c'est-à-dire $-1 < Re(z) < 1$. Et dans ce cas, on a, en passant à la limite dans les primitives :
   $$I(z) = \int_0^{+\infty} f + \int_{-\infty}^0 f = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} = \frac{-z-1+z-1}{z^2-1} = \frac{2}{1-z^2}.$$

2. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)(1+it)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $t \mapsto (1+t^2)(1+it) = i(t+i)(t-i)^2$ s'annule en $\pm i$, donc pas sur $\mathbb{R}$). On décompose en éléments simples dans $\mathbb{C}$:
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{i}{t+i} - \frac{i}{t-i}\right) - \frac{1}{2(t-i)^2} = \frac{1}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2(t-i)^2},$$
   donc pour tous réels $a < b$:
   $$\int_a^b f = \left[\frac{1}{2}\arctan(t) + \frac{1}{2(t-i)}\right]_a^b = \frac{\arctan(b) - \arctan(a)}{2} + \frac{1}{2(b-i)} - \frac{1}{2(a-i)}.$$
   En faisant tendre $b \to +\infty$, on obtient que $\int_a^{+\infty} f$ converge et
   $$\forall a < 0, \qquad \int_a^{+\infty} f = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(a)}{2} - \frac{1}{2(a-i)}.$$
   Enfin, en faisant tendre $a \to -\infty$, on obtient que $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et
   $$J = \int_{-\infty}^{+\infty} f = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 9 (**)

Prouver que l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt$ converge et déterminer sa valeur à l'aide de la constante d'Euler γ.

Corrigé de l'exercice 9

La fonction $f : t \mapsto \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}$ est continue par morceaux (mais pas continue) sur $[1, +\infty[$, car pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la restriction $f|_{]n,n+1[} : t \mapsto \frac{t-n}{t^2}$ est continue (en tant que fraction rationnelle) et possède des limites finies en n^+ et $(n+1)^-$.

D'autre part, on a $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2}$ pour tout $t \geq 1$, donc $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Calculons maintenant cette intégrale : pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^N f = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{t-n}{t^2} dt = \sum_{n=1}^{N-1} (\ln(n+1) - \ln(n)) - \sum_{n=1}^{N-1} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

c'est-à-dire

$$\int_1^N f = \ln(N) - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} = \ln(N) - H_N + 1,$$

où $H_N = 1 + \cdots + \frac{1}{N}$.

En utilisant le développement asymptotique bien connu $H_N = \ln(N) + \gamma + o(1)$, on obtient donc

$$\int_1^N f = 1 - \gamma + o(1) \underset{N \to +\infty}{\to} 1 - \gamma,$$

ce qui prouve (puisqu'on a déjà montré que l'intégrale I converge) que

$$I = \lim_{N \to +\infty} \int_1^N f = 1 - \gamma.$$

Remarque

Attention, ce calcul de limite ne prouve pas la convergence de l'intégrale, puisqu'il s'agit d'une suite particulière ($N \mapsto \int_1^N f$ avec N entier non nul), et non pas de la fonction $x \mapsto \int_1^x f$ de variable réelle $x \in [1, +\infty[$. D'où la nécessité de prouver la convergence de l'intégrale avant.

Exercice 10 (**)

Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(x)\big) dx$.

1. Montrer que I est bien définie et égale à $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos(x)\big) dx$.
2. En déduire une expression de I en fonction de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2x)\big) dx$, puis la valeur de I.
3. En déduire la valeur de $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)} dx$.

Corrigé de l'exercice 10

On notera $f : x \mapsto \ln(\sin(x))$.

1. La fonction f est continue sur $]0, \pi/2]$ et au voisinage de 0, on a le DL :

$$f(x) = \ln(x + o(x)) = \ln(x) + \ln(1 + o(1)) = \ln(x) + o(1) \underset{x \to 0^+}{\sim} \ln(x),$$

(puisque $1 = o(\ln(x))$ au voisinage de 0^+).

Vu que $\int_0^{\pi/2} \ln(x) dx$ converge, on en déduit par comparaison de fonctions de signe constant que $I = \int_0^{\pi/2} f$ converge.

Avec le changement de variable généralisé $u = \frac{\pi}{2} - x$, on obtient aussi

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\frac{\pi}{2} - u)) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos(u)\big) du.$$

2. Puisque $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, on en déduit par linéarité de l'intégrale impropre

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))dx = \int_0^{\pi/2} \ln(2)dx + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))dx = \frac{\pi}{2}\ln(2) + 2I.$$

(cette intégrale converge comme somme de trois intégrales convergentes).
Par ailleurs, le changement de variables $u = 2x$ donne :

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))du = \frac{1}{2}\left(I + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))du\right),$$

et avec le changement de variable $x = u - \frac{\pi}{2}$, on a

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))du = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x+\frac{\pi}{2}))dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))dx = I,$$

donc

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))dx = \frac{1}{2}(I + I) = I.$$

En égalant les deux expressions de $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))dx$, on obtient finalement $\frac{\pi}{2}\ln(2) + 2I = I$, donc $I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ admet pour primitive $x \mapsto \ln(\sin(x))$ sur l'intervalle $]0, \pi/2]$ (car $\sin > 0$ sur cet intervalle). Par IPP généralisée, on a :

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan(x)}dx = [x\ln(\sin(x))]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx = [x\ln(\sin(x))]_0^{\pi/2} - I,$$

puisque le crochet est bien défini (étant donné que $x\ln(\sin(x)) \underset{x\to 0^+}{\sim} x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$ en utilisant l'équivalent de la question 1.) et puisque l'intégrale I converge. Donc l'intégrale J converge et

$$J = \frac{\pi}{2}\ln(1) - 0 - I = \frac{\pi}{2}\ln(2).$$

III Exercices théoriques

Exercice 11 (**)
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et $\alpha > 0$.
Montrer $\left(\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge}\right)$.

Corrigé de l'exercice 11
Remarque : f n'étant pas supposée positive, on ne peut utiliser un critère de comparaison. On ne peut pas non plus passer par la convergence absolue car on ne sait pas si $\int_0^\infty |f(t)|dt$ converge.
Utilisons donc une intégration par parties (sur un segment).
La fonction $g : t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^\alpha}$ est continue sur $[0; +\infty[$ (car $\alpha > 0$), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty g(t)dt$ est impropre en $+\infty$. Pour $x > 1$ fixé, intégrons par parties sur le segment $[1; x]$, en considérant la primitive de f nulle en 1, notée $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)dt$. On alors :

$$\int_1^x g(t)dt = \int_1^x \frac{F'(t)}{1+t^\alpha}dt = \left[\frac{F(t)}{1+t^\alpha}\right]_1^x + \alpha\int_1^x \frac{t^{\alpha-1}F(t)}{(1+t^\alpha)^2}dt,$$

puisque $u : t \mapsto F(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; x]$. (**attention** : cette intégration par parties ne serait pas licite sur le segment $[0; x]$ car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ n'est pas toujours de classe

$\mathcal{C}^1$ sur $[0;x]$, à cause de sa dérivée $t \mapsto \dfrac{\alpha t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^2}$ qui n'a pas de limite finie en 0 si $0<\alpha<1$). On a donc, puisque $F(1)=0$, pour tout $x>1$:

$$\int_1^x g(t)dt = \frac{F(x)}{1+x^\alpha} + \alpha \int_1^x \frac{t^{\alpha-1}F(t)}{(1+t^\alpha)^2}dt.$$

Ensuite, quand on passe à la limite lorsque $x \to +\infty$:

- on a $\dfrac{F(x)}{1+x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $F(x)$ a une limite finie en $+\infty$ (puisque par hypothèse l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ converge) et $\alpha>0$;
- l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{t^{\alpha-1}F(t)}{(1+t^\alpha)^2}dt$ est absolument convergente puisque $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}F(t)}{(1+t^\alpha)^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et $\left|\dfrac{t^{\alpha-1}F(t)}{(1+t^\alpha)^2}\right| \leq \dfrac{M}{t^{1+\alpha}}$, avec M un majorant de F (qui est bien bornée sur $\mathbb{R}^+$ car continue et possédant une limite finie en $+\infty$) et $1+\alpha>1$. On en déduit que $\displaystyle\int_1^x \frac{t^{\alpha-1}F(t)}{(1+t^\alpha)^2}dt$ possède une limite finie lorsque $x\to+\infty$.

Par somme de limites, $\displaystyle\int_1^x g(t)dt$ possède une limite finie lorsque $x\to+\infty$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt$ converge, et finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge.

Exercice 12 (Nature de la série / de l'intégrale impropre)**
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit $f : [n_0;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et décroissante.
Montrer l'équivalence : $\displaystyle\left(\sum_{n\geq n_0} f(n) \text{ converge} \iff \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge}\right)$.

Corrigé de l'exercice 12
Pour tout entier $k \geq n_0+1$, on a par décroissance de f :

$$\int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f,$$

donc en sommant :

$$\forall n \geq n_0+1, \qquad \int_{n_0+1}^{n+1} f \leq \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f.$$

Montrons alors l'équivalence voulue à l'aide de cet encadrement :

- Si l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f$ converge, alors la fonction $F : x \mapsto \int_{n_0}^x f$ possède une limite finie en $+\infty$, notée $\ell \in \mathbb{R}$. Par positivité de f, la fonction F est croissante, donc $\ell = \sup\limits_{x\in[n_0,+\infty[} F$, d'où la majoration :

$$\forall n \geq n_0+1, \qquad \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f = F(n) \leq \ell.$$

  Ainsi, la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k\geq n_0} f(k)$ a ses sommes partielles majorées, donc elle converge.

- Réciproquement, si la série $\displaystyle\sum_{k\geq n_0} f(k)$ converge, alors la suite $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^n f(k)$ converge vers $S\in\mathbb{R}$, et puisque (S_n) est croissante (par positivité de $f(k)$), on a $S = \sup\limits_{n\geq n_0} S_n$. Cela implique (toujours par positivité de f et d'après l'encadrement précédent) que pour tout réel $x \geq n_0+1$:

$$\int_{n_0+1}^x f \leq \int_{n_0+1}^{\lfloor x\rfloor+1} f \leq \sum_{k=n_0+1}^{\lfloor x\rfloor} f(k) = S_{\lfloor x\rfloor} - f(n_0) \leq S.$$

Ainsi, la fonction croissante $F : x \mapsto \int_{n_0+1}^{x} f$ est majorée, donc possède une limite finie lorsque $x \to +\infty$, ce qui montre que $\int_{n_0+1}^{+\infty} f$ converge et donc que $\int_{n_0}^{+\infty} f$ converge.

Exercice 13 (**)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que f tend vers zéro en $+\infty$.
2. Montrer que $xf(x)$ tend vers zéro quand $x \to +\infty$.
3. Si on supprime l'hypothèse décroissante, déterminer un exemple de fonction f continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que f ne tend pas vers zéro en $+\infty$.

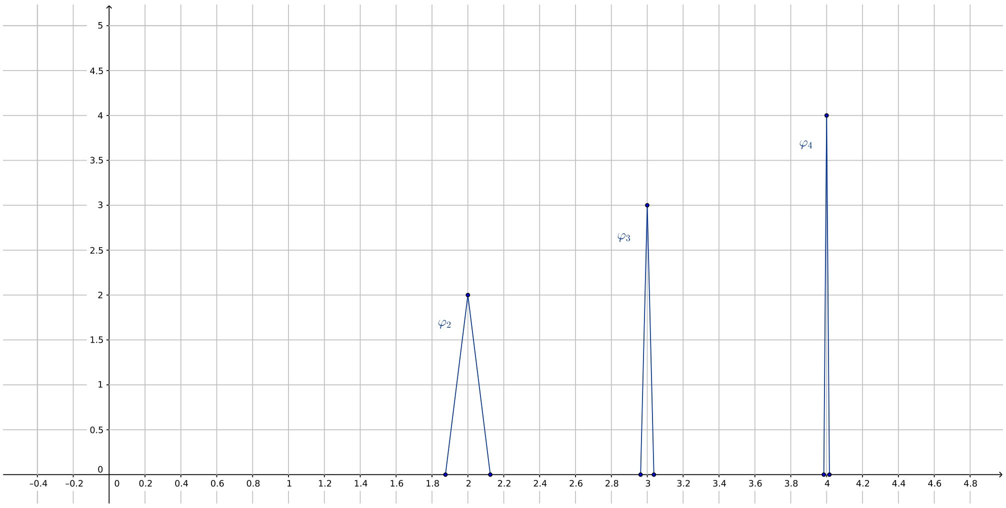
Corrigé de l'exercice 13

1. La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, elle possède une limite finie ou égale à $-\infty$ lorsque $x \to +\infty$.
   - Si $f \underset{+\infty}{\to} -\infty$, alors $f \leq -1$ sur un certain intervalle $[A, +\infty[$ (avec $A > 0$), donc pour $x \geq A$, on a $\displaystyle\int_A^x f \leq A - x \underset{x \to +\infty}{\to} -\infty$, ce qui montre que $\int_A^{+\infty} f$ diverge et contredit l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.
   - Si $f \underset{+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ell$, donc par le critère des équivalents pour les fonctions de signe constant, $\int_0^{+\infty} f$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} \ell$, donc divergente, ce qui est contradictoire.

   Donc nécessairement, $f \underset{+\infty}{\to} 0$.

2. D'après la question précédente, f est positive sur $\mathbb{R}^+$.
   Par décroissance de f, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \int_{x/2}^{x} f(t)dt \geq \int_{x/2}^{x} f(x)dt = \frac{x}{2} f(x) \geq 0,$$
   donc en posant $F : x \mapsto \int_0^x f$, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad 0 \leq xf(x) \leq 2(F(x) - F(x/2)),$$
   et le membre de droite tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$ puisque $F \underset{+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{R}$ par intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^+$. Donc $xf(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$.

3. L'idée est de construire une fonction affine par morceaux, dont le graphe est une succession de "pics" de plus en plus hauts mais de base de plus en plus mince, de sorte que les aires des pics soient sommables (pour faire converger l'intégrale).
   Pour $n \geq 2$, on pose $a_n = n - \dfrac{1}{n^3}$ et $b_n = n + \dfrac{1}{n^3}$. On considère alors l'application $\varphi_n : [a_n; b_n] \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n^4 x - n^5 + n & \text{si } x \in [a_n; n[\\ -n^4 x + n^5 + n & \text{si } x \in [n; b_n] \end{cases}.$$
   On définit une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ en recollant les graphes des $(\varphi_n)_{n \geq 2}$ et en prolongeant par 0 :
$$f(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) & \text{si } x \in [a_n; b_n] \\ 0 & \text{si } x \notin \displaystyle\bigcup_{n \geq 2} [a_n; b_n] \end{cases}.$$



Cette fonction vérifie bien les propriétés demandées :

- <u>f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$</u> :
on a clairement $a_n < b_n$ pour tout $n \geq 2$, et
$$a_{n+1} - b_n = 1 - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \geq 1 - \frac{2}{n^3} > 0.$$
Donc $a_n < b_n < a_{n+1} < b_{n+1}$ pour tout $n \geq 2$, ce qui prouve que les intervalles $([a_n; b_n])_{n\geq 2}$ sont disjoints deux à deux.
- <u>f est continue</u> :
pour tout $n \geq 2$, la fonction φ_n est la fonction affine par morceaux sur $[a_n; b_n]$ qui vérifie
$$\varphi_n(a_n) = 0, \qquad \varphi_n(n) = n, \qquad \varphi_n(b_n) = 0.$$
La restriction $f_{[a_n;b_n]} = \varphi_n$ est donc continue.
Les restrictions $f_{[0;a_2[}, f_{]b_n;a_{n+1}[}$ sont aussi continues (car nulles).
Enfin, f possède des limites nulles à gauche et à droite aux points a_n, b_n donc f est continue en ces points.
Finalement, f est continue sur $[0; +\infty[$.
- <u>f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$</u> :
pour tout entier $n \geq 2$:
$$\int_0^{b_n} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n} \int_{a_k}^{b_k} \varphi_k(t)dt$$
(car f est nulle en dehors des segments $[a_k; b_k]$).
Or, pour tout $k \geq 2$, on a $\int_{a_k}^{b_k} \varphi_k(t)dt = \frac{(b_k - a_k)\times k}{2} = \frac{1}{k^2}$ (aire d'un triangle), donc
$$\int_0^{b_n} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}.$$
Puisque la série $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, ses sommes partielles sont majorées : il existe donc un réel $M > 0$ tel que
$$\forall n \geq 2, \qquad \int_0^{b_n} f(t)dt \leq M,$$
Donc pour tout réel $x \geq 0$:
$$\int_0^{x} f(t)dt \leq \int_0^{n+1} f(t)dt \leq \int_0^{b_{n+1}} f(t)dt \leq M$$
(en notant n la partie entière de x et en utilisant la positivité de f).
La fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est donc majorée sur $\mathbb{R}_+$. Mais elle est aussi croissante (car $f \geq 0$), donc elle possède une limite finie en $+\infty$, ce qui montre que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

- f ne tend pas vers 0 en $+\infty$:
  pour tout entier $n \geq 2$, on a $f(n) = \varphi_n(n) = n$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = +\infty$, ce qui empêche f d'avoir une limite nulle en $+\infty$.

Et en plus, f n'est même pas bornée sur $\mathbb{R}^+$ (vu la suite $(f(n))$).

Exercice 14 (***)
Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Montrer que toute primitive de g est uniformément continue.

Corrigé de l'exercice 14
Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}^+$ (elle existe car g est continue). On a alors, pour tous réels $0 \leq x \leq y$:

$$|G(y) - G(x)| = \left| \int_x^y g \right| \leq \int_x^y |g|.$$

Posons un réel $\varepsilon > 0$. Puisque g est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on va exploiter l'idée que lorsque x et y sont assez grands, les "restes" $\int_x^y |g|$ sont petits. En effet, puisque $\int_0^{+\infty} |g|$ converge, on a

$$\int_x^{+\infty} |g| = \int_0^{+\infty} |g| - \int_0^x |g| \underset{x \to +\infty}{\to} 0,$$

donc il existe $x_0 \geq 0$ tel que

$$x \geq x_0 \implies \forall y \geq x, \quad |G(y) - G(x)| \leq \int_x^y |g| \leq \int_x^{+\infty} |g| \leq \varepsilon.$$

Regardons maintenant ce qui se passe pour les x "de l'autre côté" (c'est-à-dire les $x \in [0, x_0]$).
Puisque G est continue sur le segment $[0, x_0]$ (car de classe $\mathcal{C}^1$), elle est automatiquement uniformément continue (théorème de Heine) donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, x_0]^2, \qquad |x - y| \leq \delta \implies |G(y) - G(x)| \leq \varepsilon.$$

On a donc en définitive ($|x - y| \leq \delta \implies |G(y) - G(x)| \leq \varepsilon$) dans les deux cas (lorsque $x_0 \leq x \leq y$ et lorsque $x \leq y \leq x_0$). **Mais** que se passe-t-il dans le cas du chevauchement, i.e. $x \leq x_0 \leq y$?).
On peut en faire inclure ce dernier cas dans les précédents, car si on applique le théorème de Heine sur $[0, x_0 + 1]$ (au lieu de $[0, x_0]$), alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, x_0 + 1]^2, \qquad |x - y| \leq \delta \implies |G(y) - G(x)| \leq \varepsilon.$$

Le problème du chevauchement est alors réglé si on choisit $\delta < 1$, car pour tout couple (x, y) tel que $y \geq x \geq 0$:

* si $x \geq x_0$, alors $y \geq x \geq x_0$ donc $|G(y) - G(x)| \leq \varepsilon$;
* si $x < x_0$, alors pour tout $y \geq x$, on a

$$|x - y| \leq \delta \implies y \leq x + \delta < x + 1 \implies (x, y) \in [0, x_0 + 1]^2 \implies |G(y) - G(x)| \leq \varepsilon.$$

On a montré qu'il existe $\delta \in]0, 1[$ tel que $\forall y \geq x \geq 0$, ($|x - y| \leq \delta \implies |G(y) - G(x)| \leq \varepsilon$), et donc G est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque
Si g est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, c'est bien plus facile : pour toute primitive G, on a

$$\forall 0 \leq x \leq y, \qquad |G(y) - G(x)| = \left| \int_x^y g \right| \leq \int_x^y \sup_{\mathbb{R}^+} |g| = M \times |y - x|,$$

où $M = \sup\limits_{\mathbb{R}^+} |g| \geq 0$ est une constante indépendante de (x, y).
Ainsi, G est lipschitzienne donc uniformément continue.
Mais c'est un autre cadre que celui de l'exercice (une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ n'est pas toujours bornée, et réciproquement).

Exercice 15 (**)
Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,+\infty[,\mathbb{R})$. On suppose f et f'' intégrables. Montrer que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Corrigé de l'exercice 15
Puisque f'' est intégrable, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f''$ converge, donc f' possède une limite finie en $+\infty$, notée $\ell \in \mathbb{R}$ (puisque $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''$).
Si $\ell > 0$, alors il existe $A > 0$ tel que $(x \geq A \implies f'(x) \geq \frac{\ell}{2})$ et donc

$$x \geq A \implies f(x) = f(A) + \int_A^x f' \geq f(A) + \frac{\ell}{2}(x - A).$$

Puisque la fonction affine $x \mapsto f(A) + \frac{\ell}{2}(x-A)$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, cela contredit l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^+$ (par minoration).
Si $\ell < 0$, alors $(-f)' = -f' \underset{+\infty}{\to} -\ell > 0$, donc par le même raisonnement, cela contredit l'intégrabilité de $-f$, donc de f sur $\mathbb{R}^+$ (on rappelle que $L^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).
Donc $\ell = 0$, ce qui prouve que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 16 (***)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que f^2, $f''f$ et $(f')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f''f \leq 0$.

Corrigé de l'exercice 16
On fixe deux réels $a < b$. En intégrant par parties :

$$\int_a^b f''(t)f(t)dt = f'(b)f(b) - f'(a)f(a) - \int_a^b (f'(t))^2 dt \qquad (*).$$

Puisque $f''f$ et $(f')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} f''(t)f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty}(f'(t))^2dt$ convergent, donc par somme, le terme $f'(b)f(b)$ possède une limite réelle lorsque $b \to +\infty$, notée ℓ.
Montrons alors que $\ell = 0$. Si par exemple $\ell > 0$, alors à partir d'une certaine abscisse $B > 0$, on aura

$$t \geq B \Longrightarrow f'(t)f(t) \geq \frac{\ell}{2} \Longrightarrow f^2(t) = f^2(B) + \int_B^t 2f'(u)f(u)du \geq f^2(B) + \ell(t - B),$$

donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f^2(t) = +\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de f^2 au voisinage de $+\infty$ (puisque par exemple on aura $f^2 \geq 1$ pour t assez grand).
Si on suppose $\ell < 0$, c'est identique : à partir d'une certaine abscisse $B > 0$,

$$t \geq B \Longrightarrow f'(t)f(t) \leq \frac{\ell}{2} \Longrightarrow f^2(t) = f^2(B) + \int_B^t 2f'(u)f(u)du \leq f^2(B) + \ell(t - B),$$

donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f^2(t) = -\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de f^2 au voisinage de $+\infty$.
On a donc établi que $\ell = \lim\limits_{b\to+\infty} f'(b)f(b) = 0$. En passant à la limite quand $b \to +\infty$ dans $(*)$, on obtient

$$\int_a^{+\infty} f''(t)f(t)dt = -f'(a)f(a) - \int_a^{+\infty} (f'(t))^2 dt \qquad (**).$$

Enfin, on procède de même au voisinage de $-\infty$: l'intégrabilité de f^2 entraîne $\lim\limits_{a\to-\infty} f'(a)f(a) = 0$, donc en passant à la limite quand $a \to -\infty$ dans $(**)$, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)f(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} (f'(t))^2 dt \leq 0.$$

Variante : on peut réutiliser l'exercice précédent : en posant $g = f^2$, on a $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $g' = 2ff'$, $g'' = 2(f')^2 + 2ff''$, donc vu les hypothèses, g et g'' sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (car $L^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ est un

$\mathbb{R}$-espace vectoriel). Donc d'après l'exercice précédent, on a g' qui tend vers 0 en $+\infty$, mais aussi en $-\infty$ (on adapte). Donc $[ff']_{-\infty}^{+\infty} = 0$, ce qui donne par IPP généralisée :

$$\int_{\mathbb{R}} f''f = \underbrace{[f'f]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} (f')^2 \leq 0$$

Exercice 17 (***)
Soient $a < b$ deux réels et $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $-\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f$ existe. Justifier l'existence, puis calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))dx.$$

Corrigé de l'exercice 17
Fixons deux réels $A > B$ tels que $A + a < A + b < a < b < B + a < B + b$ (il suffit pour cela que $A < a - b < 0$ et $B > b - a > 0$). Par changement de variable affine et relation de Chasles, on a alors :

$$\int_A^B (f(a+x) - f(b+x))dx = \int_{A+a}^{B+a} f - \int_{A+b}^{B+b} f = \int_{A+a}^{A+b} f - \int_{B+a}^{B+b} f.$$

Traitons alors les deux termes séparément :

- puisque $\int_0^{+\infty} f$ converge, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f$ tend vers un réel L lorsque $x \to +\infty$, donc
$$\int_{B+a}^{B+b} f = F(B+b) - F(B+a) \underset{B\to+\infty}{\to} L - L = 0.$$
- puisque $f \underset{-\infty}{\to} \ell \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{A+a}^{A+b} f$ "environ égale" à $\displaystyle\int_{A+a}^{A+b} \ell = \ell(b-a)$ lorsque A est suffisamment négatif. On conjecture donc que $\displaystyle\int_{A+a}^{A+b} f \underset{A\to-\infty}{\to} \ell(b-a)$.
  Prouvons-le : pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe (par définition de la limite) $A_0 < 0$ tel que
  $$x \leq A_0 \implies |f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{b-a},$$
  donc
  $$\begin{aligned} A \leq A_0 - b &\implies [A+a, A+b] \subset]-\infty, A_0] \implies \forall x \in [A+a, A+b],\ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon/(b-a) \\ &\implies \left| \int_{A+a}^{A+b} f - \ell(b-a) \right| = \left| \int_{A+a}^{A+b} (f - \ell) \right| \leq \int_{A+a}^{A+b} |f - \ell| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$
  Donc on a bien $\displaystyle\int_{A+a}^{A+b} f \underset{A\to-\infty}{\to} \ell(b-a)$.

Finalement, par somme de limites (lorsque $A \to -\infty$ et $B \to +\infty$), $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))dx$ converge et vaut $\ell(b-a)$.

IV Études asymptotiques

Exercice 18 (Limite en fonction des bornes)**
Déterminer la limite, lorsque $x \to 0^+$, de $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\operatorname{sh}(t)}{t^2} dt$.

Corrigé de l'exercice 18
Notons $f : t \mapsto \frac{\operatorname{sh}(t)}{t^2}$. Cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$.
On procède par développement limité : $\operatorname{sh}(t) = t + \underset{t\to0}{O}(t^3)$ donc

$$f(t) = \frac{1}{t} + \underset{t\to0}{O}(t) = \frac{1}{t} + t\varphi(t),$$

où $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et bornée au voisinage de 0. On en déduit, pour tout $x > 0$:

$$\int_x^{2x} f = \int_x^{2x} \frac{dt}{t} + \int_x^{2x} t\varphi(t)dt = \ln(2) + \int_x^{2x} t\varphi(t)dt.$$

En outre, puisque φ est bornée au voisinage de 0, il existe une constante $M \geq 0$ et un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in]0, \delta], \qquad |\varphi(t)| \leq M.$$

Donc

$$x \in]0, \delta/2] \implies [x, 2x] \subset]0, \delta] \implies \left| \int_x^{2x} t\varphi(t)dt \right| \leq \int_x^{2x} tMdt = \frac{3Mx^2}{2} \underset{x \to 0^+}{\to} 0,$$

donc $\displaystyle\int_x^{2x} t\varphi(t)dt \underset{x \to 0^+}{\to} 0$, ce qui montre que $\displaystyle\int_x^{2x} f \underset{x \to 0^+}{\to} \ln(2)$.

Exercice 19 (Développement asymptotique d'intégrales)**

1. Déterminer un développement asymptotique à n termes de $I(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$ lorsque $x \to +\infty$.
2. Déterminer un développement asymptotique à n termes de $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ lorsque $x \to +\infty$.

Corrigé de l'exercice 19

Avec des IPP successives et une application du théorème d'intégration des relations de comparaison :

1. $I(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!x}{\ln^k(x)} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{x}{\ln^n(x)}\right)$.
2. $R(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!e^{-x}}{x^k} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{e^{-x}}{x^n}\right)$.

Exercice 20 (*Un opérateur intégral)**

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on note $\Phi(f) = F$ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad F(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que l'application $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que si f possède une limite (finie ou infinie) lorsque $x \to +\infty$, alors $\Phi(f)$ aussi.
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Corrigé de l'exercice 20

1. Montrons d'abord que Φ est bien définie, c'est-à-dire que pour tout $f \in E$, $\Phi(f) \in E$.
   Fixons donc $f \in E$ et montrons que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   Déjà, par le théorème fondamental de l'analyse, $G : x \mapsto \int_0^x f$ est une primitive $\mathcal{C}^1$ de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$, donc par quotient, $x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, ce qui implique la continuité de F sur $]0, +\infty[$.
   Reste à montrer que F est continue en 0. Cela résulte du fait que G est dérivable en 0 avec $G'(0) = f(0)$, ce qui se traduit par

   $$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f = \frac{G(x) - G(0)}{x} \underset{x \to 0^+}{\to} G'(0) = f(0) = F(0),$$

   donc F est bien continue en 0^+, et finalement, $F = \Phi(f) \in E$.
   Ensuite, $\Phi : E \to E$ est linéaire car étant donné $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

   $$\Phi(\lambda f + g)(0) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = (\lambda\Phi(f) + \Phi(g))(0),$$

et pour tout $x > 0$:

$$\Phi(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f+g) = \frac{\lambda}{x}\int_0^x f + \frac{1}{x}\int_0^x g = (\lambda\Phi(f)+\Phi(g))\,(x),$$

donc $\Phi(\lambda f+g) = \lambda\Phi(f)+\Phi(g)$, et finalement $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.

2. - Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{R}$, montrons que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \ell$ (théorème de Cesàro version continue).
   Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite en $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$, $|f(x)-\ell| \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $x > A$:
   $$|F(x)-\ell| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x f - \frac{1}{x}\int_0^x \ell\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^x |f-\ell| = \frac{1}{x}\left(\int_0^A |f-\ell| + \int_A^x |f-\ell|\right).$$
   Or, $[A,x] \subset [A,+\infty[$, donc par croissance de l'intégrale,
   $$\int_A^x |f-\ell| \leq \int_A^x \varepsilon = (x-A)\varepsilon.$$
   En outre, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^A |f-\ell| \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ (puisque $\int_0^A |f-\ell|$ ne dépend pas de x), donc il existe $A' > A$ tel que
   $$x \geq A' \implies \frac{1}{x}\int_0^A |f-\ell| \leq \varepsilon.$$
   Donc
   $$x \geq A' \implies |F(x)-\ell| \leq \varepsilon + \left(\frac{x-A}{x}\right)\varepsilon \leq 2\varepsilon,$$
   ce qui montre que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \ell$.
   - Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$, montrons que l'on a aussi $F(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$.
   Etant donné un réel $M > 0$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$, $f(x) \geq M$. Donc
   $$x \geq A \implies F(x) = \frac{1}{x}\left(\int_0^A f + \int_A^x f\right) \geq \frac{1}{x}\int_0^A f + \frac{1}{x}\int_A^x M = \frac{1}{x}\int_0^A f + M\left(\frac{x-A}{x}\right).$$
   En outre, $\frac{1}{x}\int_0^A f + M\left(\frac{x-A}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} M$, donc il existe $A' > A$ tel que
   $$x \geq A' \implies \frac{1}{x}\int_0^A f + M\left(\frac{x-A}{x}\right) \geq \frac{M}{2} \implies F(x) \geq \frac{M}{2},$$
   ce qui montre que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$.
   - Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} -\infty$, alors on a $F(x) \underset{x\to+\infty}{\to} -\infty$ (en se ramenant à $-f$ et en utilisant la linéarité de Φ).

   Dans tous les cas, on a donc
   $$f \underset{+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\} \implies \Phi(f) \underset{+\infty}{\to} \ell.$$

3. On cherche les couples $(\lambda, f) \in \mathbb{K}\times E$ tels que $f \neq 0_E$ et $\Phi(f) = \lambda f$.
   On a
   $$\Phi(f) = \lambda f \iff \forall x \in \mathbb{R}^+,\ F(x) = \lambda f(x) \iff \left(f(0) = \lambda f(0) \text{ et } \forall x > 0,\ \int_0^x f = \lambda x f(x)\right).$$
   Plusieurs cas se présentent :
   - Si $\lambda = 0$, alors
   $$\Phi(f) = 0 \iff f(0) = 0 \text{ et } \forall x > 0,\ \int_0^x f = 0.$$
   Puisque $x \mapsto \int_0^x f$ est une primitive $\mathcal{C}^1$ de f sur $\mathbb{R}^+$, l'équation ($\forall x > 0$, $\int_0^x f = 0$) entraîne en dérivant $f(x) = 0$ pour tout $x > 0$, ainsi que $f(0) = 0$, donc $f = 0_E$.
   Ainsi, $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre de Φ (puisqu'il n'existe pas de $f \neq 0_E$ tel que $\Phi(f) = 0_E$).

- Si $\lambda \neq 0$, alors

$$\Phi(f) = \lambda f \iff (1-\lambda)f(0) = 0 \text{ et } \forall x > 0,\ \int_0^x f = \lambda x f(x).$$

L'équation $\forall x > 0,\ \int_0^x f = \lambda x f(x)$ se réécrit $\forall x > 0,\ f(x) = \frac{1}{\lambda x}\int_0^x f$, ce qui montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (par quotient). En dérivant la relation

$$\forall x > 0, \qquad \int_0^x f = \lambda x f(x),$$

on obtient alors

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \lambda(f(x) + xf'(x)),$$

donc f est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$f'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda x} f(x),$$

donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = C\exp\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(x)\right) = Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

Mais on cherche $f \in E \setminus \{0_E\}$, c'est-à-dire f continue sur $[0,+\infty[$ et non nulle, ce qui implique que $C \neq 0$ et $x \mapsto Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ possède une limite en 0^+, donc $\frac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$.
Ainsi, les valeurs propres possibles sont les $\lambda \in]0,1]$.
Si $\lambda \in]0,1]$, alors on a

$$(\Phi(f) = \lambda f \text{ et } f \neq 0_E) \implies \exists C \in \mathbb{R}^*,\ \forall x > 0,\ f(x) = Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

Etudions enfin la compatibilité de ceci avec la condition $(1-\lambda)f(0) = 0$.

* Si $0 < \lambda < 1$, alors on doit avoir aussi $f(0) = 0$, et f continue en 0, i.e. $x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \underset{x\to 0^+}{\to} 0$, ce qui est le cas (car $(1-\lambda)/\lambda > 0$ dans ce cas). Et on vérifie facilement que ces fonctions f sont solutions de $\Phi(f) = \lambda f$.
  Ainsi, les solutions de $\Phi(f) = \lambda f$ sont les $x \mapsto Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ avec $C \in \mathbb{R}^*$, ce qui montre que λ est valeur propre de Φ et les vecteurs propres associés sont les $f_\lambda : x \mapsto Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ avec $C \in \mathbb{R}^*$.
* Si $\lambda = 1$, alors la condition $(1-\lambda)f(0) = 0$ disparaît, et les fonctions $x \mapsto Cx^0 = C$ (avec $C \in \mathbb{R}^*$) sont bien continues en 0 (car constantes) et vérifient l'équation $\Phi(f) = f$. Donc $\lambda = 1$ est aussi valeur propre de Φ et les vecteurs propres associés sont les fonctions constantes non nulles.

Bilan : les valeurs propres de Φ sont les $\lambda \in]0,1]$, et pour chaque valeur propre λ, le sous-espace propre est de dimension 1 (car $E_\lambda(\Phi) = Vect(x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$).