Exercices du CH02 : Intégration sur un intervalle quelconque

Exercices de la banque INP à étudier : ex 28 (deux exemples d'étude d'intégrabilité)

I Exemples d'étude de convergence

Exercice 1 (*)
Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

$$(a)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt, \quad (b)\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}dt, \quad (c)\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\mathrm{ch}(t)}dt \quad (d)\ \int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-t}}dt,$$

$$(e)\ \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}, \quad (f)\ \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{e^t-1-t}}dt.$$

Exercice 2 (Etude d'intégrabilité)**
Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables :

(a) $f : t \mapsto e - \left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ sur $[1, +\infty[$.

(b) $f : t \mapsto \frac{\sqrt{\ln(t)}}{(t-1)\sqrt{t}}$ sur $]1\ ; +\infty[$.

(c) $f : t \mapsto \frac{\tan(t)}{t}$ sur $\left]0\ ; \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3 (Le grand classique : l'intégrale de Dirichlet)**

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.
2. Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}dt$ diverge.

   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est semi-convergente.
3. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^t)dt$.

Exercice 4 (Intégrales de Bertrand)**
Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on étudie la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$.

1. On suppose $\alpha > 1$. Montrer que l'intégrale étudiée converge.
2. On suppose $\alpha = 1$. Calculer $\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ et déterminer pour quels $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale étudiée converge.
3. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que l'intégrale étudiée diverge.
4. Déduire de ce qui précède la nature de l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$.

Exercice 5 (**)
Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, discuter la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(t)|^b}{(1-t)^a}dt$.

Exercice 6 (***)
Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4\sin^2(x)}$.

II Calculs d'intégrales impropres

Exercice 7 (*)
Justifiez l'existence des intégrales suivantes et calculez leurs valeurs :

$$(a)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)(t+1)}dt,\quad (b)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}(2t)}dt,\quad (c)\ \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt,$$

$$(d)\ \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}dt,\quad (e)\ \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}dt,\quad (f)\ \int_0^{+\infty} e^{-at}\sin^2(\omega t)dt,\ (a,\omega)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}.$$

Exercice 8 (Calculs d'intégrales de fonctions à valeurs complexes)**
Calculer les intégrales qui suivent, en ayant justifié leur existence.

$$I(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt}e^{-|t|}dt,\ \text{pour } z\in\mathbb{C},\quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+it)}.$$

Exercice 9 (**)
Prouver que l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt$ converge et déterminer sa valeur à l'aide de la constante d'Euler γ.

Exercice 10 (**)
Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(x)\big)dx$.

1. Montrer que I est bien définie et égale à $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos(x)\big)dx$.
2. En déduire une expression de I en fonction de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2x)\big)dx$, puis la valeur de I.
3. En déduire la valeur de $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}dx$.

III Exercices théoriques

Exercice 11 (**)
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et $\alpha > 0$.
Montrer $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge}\right)$.

Exercice 12 (Nature de la série / de l'intégrale impropre)**
Soit $n_0\in\mathbb{N}$ et soit $f : [n_0;+\infty[\to\mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et décroissante.
Montrer l'équivalence : $\left(\displaystyle\sum_{n\geq n_0} f(n) \text{ converge } \iff \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt \text{ converge}\right)$.

Exercice 13 (**)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que f tend vers zéro en $+\infty$.
2. Montrer que $xf(x)$ tend vers zéro quand $x\to+\infty$.
3. Si on supprime l'hypothèse décroissante, déterminer un exemple de fonction f continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que f ne tend pas vers zéro en $+\infty$.

Exercice 14 (***)
Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Montrer que toute primitive de g est uniformément continue.

Exercice 15 (**)
Soit $f\in\mathcal{C}^2([0,+\infty[,\mathbb{R})$. On suppose f et f'' intégrables. Montrer que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 16 (***)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que f^2, $f''f$ et $(f')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f''f \leq 0$.

Exercice 17 (***)
Soient $a < b$ deux réels et $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $-\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f$ existe. Justifier l'existence, puis calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))dx.$$

IV Études asymptotiques

Exercice 18 (Limite en fonction des bornes)**
Déterminer la limite, lorsque $x \to 0^+$, de $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\text{sh}(t)}{t^2}dt$.

Exercice 19 (Développement asymptotique d'intégrales)**

1. Déterminer un développement asymptotique à n termes de $I(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$ lorsque $x \to +\infty$.
2. Déterminer un développement asymptotique à n termes de $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 20 (*Un opérateur intégral)**
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on note $\Phi(f) = F$ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad F(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que l'application $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que si f possède une limite (finie ou infinie) lorsque $x \to +\infty$, alors $\Phi(f)$ aussi.
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.