Exercices du CH01 : Séries et sommabilité

Exercices de la banque INP à étudier : ex 5 (séries de Bertrand), 6 (d'Alembert), 7 (critère des équivalents), 46 (utilisation de DL),

Niveaux de difficulté des exercices de TD :

(*) : Exercice simple, en général de l'application directe du cours.

(**) : Exercice de niveau intermédiaire.

(***) : Exercice difficile, demandant de l'initiative.

I TD du jeudi 03/09

Exercice 1 (*)
Déterminer la nature et calculer la somme des séries de terme général :

1) $\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$

2) $\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$

Exercice 2 (*)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $\sum(-1)^n \int_0^1 x^n f(x)dx$ est convergente de somme $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$. Qu'obtient-on si f est constante égale à 1 sur $[0,1]$?

Exercice 3 (*)
Déterminer la nature des séries de terme général :

1) $\frac{n!}{n^n}$

2) $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

3) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1$

4) $\frac{n^2}{2^n+n}$

Exercice 4 (Séries de Bertrand)**

1. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^\beta(n)}$ converge ssi $\beta > 1$.
   Indication : comparer avec une intégrale.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Exercice 5 (*Suites et séries trigonométriques)**

1. Pour quelles valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(n\theta)$ converge-t-elle ?
   Indication : on cherchera des relations entre u_n, u_{n+1} et u_{n+2} d'une part, u_n et u_{2n} d'autre part. Ensuite, on fera un raisonnement par analyse-synthèse.
2. Faire de même avec la suite $v_n = \sin(n\theta)$ (en utilisant le résultat de la question précédente).
3. En déduire les valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la suite complexe $z_n = e^{in\theta}$ converge.
4. Soient x et $\theta \in \mathbb{R}$.
   Étudier la convergence et calculer la somme des séries $\sum x^n \cos(n\theta)$ et $\sum x^n \sin(n\theta)$.

II A faire pour lundi 07/09

Exercice 6 (Wallis et Stirling)**

1. Montrer que $(u_n) = \left(\frac{n!\,\exp(n)}{n^n\sqrt{n}}\right)$ converge vers une limite $L > 0$ (en étudiant la série télescopique associée à $\ln(u_n)$) et en déduire un équivalent de $n!$ en fonction de L.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit les **intégrales de Wallis** : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$.
   Montrer : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, $I_{2p+1}/I_{2p-1} \leq I_{2p}/I_{2p-1} \leq 1$, enfin : $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p}/I_{2p-1} = 1$.
   Calculer explicitement I_{2p} et I_{2p+1}, montrer que $nI_nI_{n-1} = \pi/2$ et enfin : $I_n \sim \sqrt{\pi/(2n)}$.
   En déduire la **formule de Stirling** : $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.}$

Exercice 7 (Règle de Raabe-Duhamel)**

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que (v_n) est aussi une suite de réels strictement positifs et qu'à partir d'un certain rang, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que (u_n) est dominée par (v_n).
2. (a) On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   À l'aide d'une comparaison à une série de Riemann, montrer la convergence de $\sum u_n$.
   (b) On suppose ici qu'il existe $\alpha < 1$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Montrer que $\sum u_n$ diverge.
   (c) **Application** : Soit $a \in \mathbb{R}$.
   Étudier la convergence absolue de la série de terme général $u_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$.

Exercice 8 (**)

Déterminer la nature des séries de terme général :

1) $\tan(1/n^2).\ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)$
2) $\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$
3) $\frac{(\ln n)^n}{n!}$
4) $\int_n^{n+1/2} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$
5) $(\pi/2)^{3/5} - (\arctan n)^{3/5}$
6) $\left(\mathrm{ch}\sqrt{\ln n}\right)^{-2}$
7) $\frac{n^{kn}}{(nk)!}$, $k \in \mathbb{N}$
8) $\sqrt[3]{n^3-4n^2+5n} - \sqrt{n^2+an+b}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
9) $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-1/6}$
10) $\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+p)!}$

Exercice 9 (***)

Déterminer la nature des séries de terme général :

1) $\frac{1}{n}$ si n est un carré, $\frac{1}{n^2}$ sinon
2) $\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$
3) $\frac{a^n n^n}{n!\,n^b}$, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $(a,b) \neq (1/e, 1/2)$
4) $u_{2n} = \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$, $u_{2n+1} = 0$

Exercice 10 (**)

Déterminer un équivalent simple de $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}}$.

Exercice 11 (**)

Etudier la convergence de la série de terme général :

1) $u_n = \frac{R_n}{S_n}$ (restes et sommes partielles de $\sum 1/n^\alpha$ avec $\alpha > 1$)
2) $u_n = 1/\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k$

III TD du lundi 07/09

1) MPI* seulement

Exercice 12 (***)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n}{u_0 + \cdots + u_n}, \qquad w_n = \frac{u_n}{(u_0 + \cdots + u_n)^2}.$$

1. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (en utilisant $\sum \ln(1 - v_n)$).
2. Montrer que la série $\sum w_n$ converge (en montrant d'abord que la suite $(a_n) = \left(\frac{1}{u_0+\cdots+u_n}\right)$ converge).

Exercice 13 (*Avec des parties entières)**
Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$.

2) MPI/MPI*

Exercice 14 (**)
Etudier la convergence de la série de terme général :

1) $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right)$
2) $\sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$
3) $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$

Exercice 15 (Fonction zeta de Riemann)**
On considère la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ pour $s \in \mathbb{C}$.

1. Quel est le domaine d'absolue convergence de cette série dans $\mathbb{C}$?
   On note ζ la fonction $\zeta : s \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ sur le domaine ainsi déterminé.
2. Montrer que la restriction de ζ à l'axe réel est strictement décroissante.
3. Pour $s \in]1, +\infty[$, établir un encadrement de $\zeta(s)$ par comparaison série-intégrale.
4. En déduire la limite de $\zeta(s)$ lorsque $s \to +\infty$, puis un équivalent de $\zeta(s)$ lorsque $s \to 1^+$.

Exercice 16 (Exemple à paramètre)**
Déterminer en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^\alpha}$.

Exercice 17 (**)
Soit f continue décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Déterminer la nature de la série $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)dt$.

IV TD du mardi 08/09

Exercice 18 (*Equivalent de somme partielle)
On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k}{k+1}}$. Calculer un équivalent simple de S_n.

Exercice 19 (*Equivalent de reste)
Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$.
Déterminer un équivalent simple de R_n. *Indication : penser à un télescopage.*

Exercice 20 (Développement asymptotique de somme partielle)**
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$.
Déterminer un équivalent simple de S_n puis montrer qu'on peut former un développement asymptotique de la forme $S_n = \ln(n) + C + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$, où C est une constante.

Exercice 21 (Série associée à une suite récurrente)**
Soit $u_0 > 0$, et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ pour $n \geq 0$. Étudier $\sum 1/u_n$, et donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} 1/u_k$.

Exercice 22 (*Etude d'une suite récurrente)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

1. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (monotonie et convergence).
2. En considérant la suite $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ pour α bien choisi, déterminer un équivalent de u_n.
3. La série de terme général u_n est-elle convergente ?

Remarque
Dans les concours les plus ambitieux, la méthode permettant de déterminer un équivalent de u_n n'est pas forcément donnée. Il faut retenir que cette idée peut être testée pour des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_n \to 0$ et $f(x) \underset{x\to0}{\sim} x$.

V TD du mercredi 09/09

1) MPI* seulement

Exercice 23 (Critère pour un ensemble au plus dénombrable)**

1. Démontrer qu'un ensemble I est au plus dénombrable ssi il existe une suite croissante $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I dont la réunion est égale à I.
2. *Applications* : utiliser ce critère pour démontrer ou redémontrer les résultats suivants : $\mathbb{Z}$ est dénombrable, $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.

Exercice 24 (***)

Calculer $\sum\limits_{(p,q)\in A} \frac{1}{p^2q^2}$ où $A = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ p \wedge q = 1\}$ en fonction de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

2) MPI/MPI*

Exercice 25 (Reconnaissance du caractère dénombrable (ou pas))**

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ? Justifier.

1. L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux.
2. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$.
3. L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

Exercice 26 (Nombres algébriques)**

On dit d'un nombre complexe z qu'il est *algébrique* lorsqu'il est racine d'un polynôme **non nul** à coefficients rationnels.

1. Donner divers exemples de nombres algébriques.
2. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est dénombrable.
3. Que dire de l'ensemble des nombres algébriques ?

Exercice 27 (**)

Les familles suivantes sont-elles sommables ?

1) $(x)_{x\in\mathbb{D}\cap[0,1]}$
2) $(1/x^2)_{x\in\mathbb{Q}_+^*}$
3) $(a^n)_{n\in\mathbb{Z}}$
4) $(1/(p+q)^\alpha)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$
5) $(1/(p^2+q^2)^\alpha)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$

Exercice 28 (**)

Montrer que les familles suivantes sont sommables et calculer leurs sommes :

1) $(r^{|n|}e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$
2) $\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$

Exercice 29 (Sommation de restes)**

1. Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a-t-elle un sens ?
3. Montrer qu'alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$.

Exercice 30 (Suite double)**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite double $\left(\frac{z^{2p}}{q^{2p+2}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable ssi $|z| < 1$ et, lorsqu'elle est sommable, montrer que sa somme vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - z^2}$.

VI A faire pour lundi 14/09

Exercice 31 (Transformation d'Abel)**

1. Soit (a_n) et (b_n) deux suites complexes. On note (B_n) la suite des sommes partielles de $\sum b_n$. Montrer que pour tout $(n_0, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n_0 \leq n$:

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=n_0}^{n} (a_k - a_{k+1}) B_k - a_{n_0} B_{n_0-1} + a_{n+1} B_n$$

   (avec la convention $B_{-1} = 0$ lorsque $n_0 = 0$).

2. En déduire que si (B_n) est bornée, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\sum(a_{n+1} - a_n)$ est absolument convergente, alors $\sum a_n b_n$ est convergente.
3. À quoi peut-on ramener ces conditions si (a_n) converge vers 0 en décroissant ?
   Faire le lien avec le critère spécial des séries alternées.
4. On suppose que $\sum u_n$ est une série complexe convergente.
   Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge également.
5. Étudier la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
6. La technique de réécriture des sommes partielles de la question 1. s'appelle une *transformation d'Abel*. On l'appelle parfois *intégration par parties discrète*. Expliquez cette analogie.

Exercice 32 (Non interversion des sommations)**
Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.
Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p}$ (*on admettra que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$). Commenter le résultat.

Exercice 33 (Exemples de sommations par tranches)**
Étudier les séries de terme général

1) $u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{2n\pi}{3}$;
2) $u_n = 1 - n^{1/p(n)}$, où $p(n)$ désigne le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n ;
3) $u_n = 1/n^\alpha$ si l'écriture décimale de n ne comporte pas de 1, $u_n = 0$ sinon.

Exercice 34 (*Utilisation d'un produit de Cauchy)
Soit $a \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} n a^n$ (après avoir justifié la convergence !) à l'aide d'un produit de Cauchy.

Exercice 35 (Des exemples de produits de Cauchy)**

1. Montrer que le produit de Cauchy de la série semi-convergente $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même est une série divergente.
2. Montrer que le produit de Cauchy de la série semi-convergente $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ par elle-même est une série convergente.

Exercice 36 (**)
Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$.

1) Quelle est la nature des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$?
2) Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ est divergente, en étudiant $(S_{2n} - S_n)$, où (S_n) est la suite des sommes partielles associée.

Exercice 37 (*Règle de la loupe)**
Soit (u_n) une suite de réels positifs décroissante.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum 2^n u_{2^n}$ est convergente (**règle de la loupe**).
2. Retrouver que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ convergent si et seulement si $p > 1$.

Exercice 38 (*Théorème de Cauchy-Mertens)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes telles que $\sum u_n$ converge absolument et $\sum v_n$ converge. Montrer que le produit de Cauchy de ces deux séries converge vers $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.
Il n'est donc pas nécessaire que les deux séries soient absolument convergentes pour que leur produit de Cauchy converge !