Exercices du CH01 : Séries et sommabilité

Exercices de la banque INP à étudier : ex 1 (suites équivalentes), 5 (séries de Bertrand), 6 (d'Alembert), 7 (critère des équivalents), 46 (utilisation de DL), 55 (suites récurrentes doubles),

Niveaux de difficulté des exercices de TD :
(*) : Exercice simple, en général de l'application directe du cours.
(**) : Exercice de niveau intermédiaire.
(***) : Exercice difficile, demandant de l'initiative.

I Feuille 24 MP2I, "Sommations"

Exercice 1 (*)
Nature et somme des séries de terme général :

1) $\ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$
2) $(-1)^n \int_0^1 t^n dt$
3) $\frac{n+1}{2^n}$
4) $\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$
5) $\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$
6) $\arctan \frac{1}{n^2+n+1}$
(étudier $\arctan(n+1) - \arctan n$)

Corrigé de l'exercice 1
On note u_n le terme général de la série étudiée dans chaque cas.

1. On procède par téléscopage. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} 2\ln(n+1) - \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - \sum_{n=1}^{N} \ln(n+2),$$
c'est-à-dire
$$\sum_{n=1}^{N} u_n = 2\sum_{n=2}^{N+1} \ln(n) - \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - \sum_{n=3}^{N+2} \ln(n) = \ln(2)+\ln(N+1)-\ln(N+2) = \ln(2)+\ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) \underset{+\infty}{\to} \ln(2),$$
ce qui montre que $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \int_0^1 t^n dt$, donc par linéarité de l'intégrale
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-t)^k dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k dt = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} dt$$
(puisque la raison de la somme géométrique est $-t \neq 1$ lorsque $t \in [0,1]$). Donc (toujours par linéarité de l'intégrale) :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt = \ln(2) + R_n,$$
avec $|R_n| \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2}$ (par croissance de l'intégrale), et donc $R_n \to 0$, ce qui montre que la série $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \ln(2)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n+1}{2^n}$. Ici, le calcul des sommes partielles est plus astucieux. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme de variable réelle x :
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k = \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1}.$$

Il s'agit de la dérivée du polynôme $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} x^k$.

Or, pour tout réel $x \neq 1$, on a $Q_n(x) = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad P_n(x) = Q_n'(x) = \frac{-(n+2)x^{n+1}(1-x) + (1-x^{n+2})}{(1-x)^2}.$$

Pour $|x| < 1$, on a $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $nx^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissances comparées) donc en faisant tendre $n \to +\infty$ dans la relation précédente, on obtient que la série $\sum (k+1)x^k$ converge et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On conclut en évaluant en $x = 1/2$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^k} = 4.$$

4. Encore du téléscopage :

$$\forall N \geq 2, \qquad \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{N} \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N+1}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc la série étudiée converge et $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. Toujours du téléscopage :

$$\forall N \geq 1, \qquad \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n} \right) = \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (\ln(n+1) - \ln(n)) + \sum_{n=1}^{N} (\ln(n+2) - \ln(n+3)) = \ln(N+1) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(N+3)$$

$$= \ln(3) + \ln\left(\frac{N+1}{N+3} \right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(3).$$

Donc la série étudiée converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n} \right) = \ln(3)$.

6. On a en fait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \arctan(n+1) - \arctan(n) = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1} \right).$$

Pour le voir, on calcule la tangente de ces deux angles : en notant $\theta = \arctan(n+1)$ et $\varphi = \arctan(n)$, on a $0 \leq \varphi < \theta < \pi/2$, et

$$\tan(\theta - \varphi) = \frac{\tan(\theta) - \tan(\varphi)}{1 + \tan(\theta)\tan(\varphi)} = \frac{n+1-n}{1+(n+1)n} = \frac{1}{n^2+n+1}.$$

Puisque $\theta - \varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a alors

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = \theta - \varphi = \arctan(\tan(\theta - \varphi)) = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1} \right).$$

On conclut alors par ... téléscopage !

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=0}^{N} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1} \right) = \sum_{n=0}^{N} (\arctan(n+1) - \arctan(n)) = \arctan(N+1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \pi/2.$$

Donc la série étudiée converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1} \right) = \pi/2$.

Exercice 2 (**)
Nature des séries de terme général :

1) $\frac{n!}{n^n}$
2) $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
3) $\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$
4) $\tan(1/n^2).\ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)$
5) $\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$
6) $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1}$
7) $\frac{n^2}{2^n+n}$
8) $\frac{(\ln n)^n}{n!}$
9) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1$
10) $\frac{1}{n}$ si n est un carré, $\frac{1}{n^2}$ sinon
11) $\int_n^{n+1/2}\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$
12) $\frac{a^n n^n}{n!\,n^b}$, $b\in\mathbb{R}$, $a>0$, $(a,b)\neq(1/e,1/2)$
13) $(\pi/2)^{3/5}-(\arctan n)^{3/5}$
14) $u_{2n}=\prod_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k}$, $u_{2n+1}=0$
15) $\left(\operatorname{ch}\sqrt{\ln n}\right)^{-2}$
16) $\frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$
17) $\frac{n^{kn}}{(nk)!}$, $k\in\mathbb{N}$
18) $\sqrt[3]{n^3-4n^2+5n}-\sqrt{n^2+an+b}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$
19) $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}-e^{-1/6}$
20) $\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+p)!}$

Corrigé de l'exercice 2
On note u_n le terme général de la série étudiée dans chacun des cas.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{n!}{n^n}>0$ et
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e^{-n\ln(1+1/n)}=e^{-n(1/n+o(1/n))}\to e^{-1}<1,$$
(en faisant un DL), donc la série $\sum u_n$ converge (par la règle de d'Alembert).
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n}>0$, donc $\sum u_n$ diverge (puisque $\sum\frac{1}{n}$ diverge).
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\frac{\ln(n)}{\ln(e^n-1)}=\frac{\ln(n)}{n+\ln(1-e^{-n})}\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln(n)}{n}\geq 0$, donc $\sum u_n$ et $\sum\frac{\ln(n)}{n}$ sont de même nature.
Pour étudier la nature de $\sum\frac{\ln(n)}{n}$, on utilise une comparaison série-intégrale : la fonction f : $t\mapsto\frac{\ln(t)}{t}$ est continue et décroissante sur $[e,+\infty[$ (car dérivable et $f'(t)=\frac{1-\ln(t)}{t^2}\leq 0$ pour $t\geq e\simeq 2,718$), d'où
$$\forall k\geq 4,\qquad \int_k^{k+1}f(t)dt\leq f(k)\leq\int_{k-1}^{k}f(t)dt.$$
En sommant, on obtient :
$$\forall n\geq 4,\qquad \sum_{k=4}^{n}\int_k^{k+1}f(t)dt\leq\sum_{k=4}^{n}f(k)\leq\sum_{k=4}^{n}\int_{k-1}^{k}f(t)dt,$$
c'est-à-dire
$$\forall n\geq 4,\qquad \int_4^{n+1}\frac{\ln(t)}{t}dt\leq\sum_{k=4}^{n}u_k\leq\int_3^{n}\frac{\ln(t)}{t}dt,$$
ce qui donne la minoration
$$\forall n\geq 4,\qquad \sum_{k=4}^{n}f(k)\geq\frac{1}{2}\left(\ln(n+1)^2-\ln(4)^2\right)\underset{+\infty}{\to}+\infty,$$
donc finalement, $\sum u_n$ diverge.
4. Pour tout $n\geq 2$, $u_n=\tan(1/n^2)\ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)=\tan(1/n^2)\times\left(\ln(1+1/n^{3/2})-\ln(1-1/n)\right)$.
Vu que $\tan(x)=x+o(x)$ et $\ln(1+x)=x+o(x)$ lorsque $x\to 0$, on en déduit
$$u_n=(1/n^2+o(1/n^2))\times(1/n+o(1/n))\sim 1/n^3>0.$$

Par comparaison de séries à termes de signe constant, on en déduit que $\sum u_n$ et $\sum 1/n^3$ ont même nature, donc $\sum u_n$ converge.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$, donc
$$u_n = e^{-\sqrt{n}\ln(1+n^{-1/3})} = e^{-\sqrt{n}(n^{-1/3}-\frac{1}{2}n^{-2/3}+o(n^{-2/3}))} = e^{-n^{1/6}} \times \underbrace{e^{-\frac{1}{2}n^{-1/6}+o(n^{-1/6})}}_{\to 1},$$
ce qui entraîne $u_n \underset{+\infty}{\sim} e^{-n^{1/6}} > 0$, donc $\sum u_n$ a même nature que $\sum e^{-n^{1/6}}$.
Pour étudier la nature de $\sum e^{-n^{1/6}}$, on compare à une série de Riemann : $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\,(1/x^\alpha)$ donc avec $\alpha = 12$ (par exemple), on obtient que $e^{-n^{1/6}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui montre que $\sum u_n$ converge.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1} = \frac{2}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-1}}$$
$$= \frac{2}{n\left(\sqrt{1+1/n+1/n^2}+\sqrt{1+1/n-1/n^2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0,$$
donc $\sum u_n$ diverge (comme $\sum 1/n$).

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^2}{2^n+n} \sim \frac{n^2}{2^n} > 0$ et
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} \underset{+\infty}{\to} \frac{1}{2} < 1,$$
donc $\sum u_n$ converge d'après la règle de d'Alembert.

8. Pour tout $n \geq 2$, $u_n = \frac{(\ln n)^n}{n!} > 0$ et
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\ln(n+1))^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(\ln n)^n} = \frac{(\ln(n)+\ln(1+1/n))^{n+1}}{(n+1)\times(\ln n)^n}$$
$$= \frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{n+1} \times \left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} \times \left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)^n.$$
Or, en effectuant un DL :
$$\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)^n = e^{-n\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)} = e^{-\left(\frac{1}{\ln(n)}+o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\right)} \underset{+\infty}{\to} 1,$$
donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\ln(n)}{n} \to 0$. Puisque cette limite est strictement inférieure à 1, on en déduit que $\sum u_n$ converge par la règle de d'Alembert.

Variante : soit $\alpha > 0$. Pour n assez grand, on a $0 < \ln(n) \leq n^\alpha$, donc $0 < u_n \leq \frac{n^{\alpha n}}{n!} = v_n$, et on applique la règle de d'Alembert sur v_n (plus simple) :
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^{\alpha n+\alpha}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^{\alpha n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n} \times (n+1)^{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^\alpha n^{\alpha-1}$$
(faire encore un DL). En choisissant $0 < \alpha < 1$, on obtient que $\frac{v_{n+1}}{v_n} \to 0$, donc $\sum v_n$ converge et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1 = e^{n\ln(1+1/n^2)} - 1 = e^{1/n+o(1/n)} - 1 \sim \frac{1}{n},$$
donc $\sum u_n$ diverge.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1/n$ si n est un carré, et $u_n = 1/n^2$ sinon. La suite (S_n) définie par $S_n = u_1 + \cdots + u_n$, est strictement croissante (puisque $u_k > 0$ pour tout k), donc elle converge ou bien tend vers $+\infty$. Etudions une suite extraite :

$$\begin{aligned} S_{n^2} &= \sum_{j=1}^{n^2} u_j = \sum_{k=1}^{n} u_{k^2} + \sum_{j \in [1,n^2] \setminus \{1^2, 2^2, \cdots, n^2\}} u_j \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{j \in [1,n^2] \setminus \{1^2, 2^2, \cdots, n^2\}} \frac{1}{j^2}, \end{aligned}$$

donc

$$S_{n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{j^2} \leq 2 \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{j^2} \leq 2 \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} < +\infty.$$

Ainsi, la suite extraite (S_{n^2}) est majorée par $2\zeta(2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2}{j^2}$ (au passage $\zeta(2) = \pi^2/6$), et par croissance de (S_n) :

$$S_n \leq S_{n^2} \leq 2\zeta(2),$$

donc (S_n) est-elle même majorée. On en déduit que (S_n) converge, donc la série $\sum u_n$ converge.

Remarque
On peut être plus précis et calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *: en reprenant le calcul précédent,*

$$S_{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{j^2} - \sum_{j \in \{1^2, \cdots, n^2\}} \frac{1}{j^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{j^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^4} \underset{n \to +\infty}{\to} 2\zeta(2) - \zeta(4),$$

où $\zeta(2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \pi^2/6$ *et* $\zeta(4) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^4} = \pi^4/90$. *Donc finalement (puisqu'on sait que* (S_n) *converge) :*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} S_{n^2} = \pi^2/3 - \pi^4/90.$$

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_n^{n+1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$ (intégrale bien définie car la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc a fortiori sur tout segment $[n, n+1/2]$). Par croissance de l'intégrale, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq u_n \leq \int_n^{n+1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1/2} = \frac{1}{n(2n+1)} \leq \frac{1}{2n^2},$$

donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

12. On a ici $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (1/e, 1/2)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{a^n n^n}{n! n^b} > 0$. Donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!(n+1)^b} \times \frac{n! n^b}{a^n n^n} = a\,(1+1/n)^{n-b} \underset{+\infty}{\sim} a\,(1+1/n)^n \underset{+\infty}{\sim} ae.$$

La règle de d'Alembert permet alors de conclure que la série $\sum u_n$ converge si $0 < a < 1/e$ et diverge si $a > 1/e$.
Reste à traiter le cas $a = 1/e$, où la règle de d'Alembert est insuffisante. On peut être plus précis en utilisant la *méthode de Raabe-Duhamel*, basée le DL à deux termes :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} e^{(n-b)\ln(1+1/n)} = e^{-1+(n-b)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(1/n^3)\right)} = e^{-\frac{b+1/2}{n} + O(1/n^2)}$$

c'est-à-dire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{b+1/2}{n} + O(1/n^2).$$

L'idée est de comparer u_n à une suite de Riemann $1/n^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi. Pour cela on travaille sur le rapport

$$v_n = \frac{u_n}{1/n^\alpha} = n^\alpha u_n.$$

On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = (1+1/n)^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n} = \Big(1 + \frac{\alpha}{n} + O(1/n^2)\Big) \times \Big(1 - \frac{b+1/2}{n} + O(1/n^2)\Big)$$
$$= 1 + \frac{\alpha - b - 1/2}{n} + O(1/n^2).$$

On en déduit la monotonie de (v_n) à partir d'un certain rang suivant le signe de $\alpha - b - 1/2$. Par hypothèse on a $b \neq 1/2$, donc deux cas se présentent :

- si $b > 1/2$, alors $b + 1/2 > 1$, donc on peut choisir α tel que $1 < \alpha < b + 1/2$. Dans ce cas, on a à partir d'un certain rang n_0 l'inégalité $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, donc $(v_n)_{n \geq n_0}$ décroît. On en déduit que (v_n) est bornée, et donc $u_n = O(1/n^\alpha)$ avec $\alpha > 1$, ce qui montre que $\sum u_n$ converge.
- si $b < 1/2$, alors on peut choisir de même α tel que $b + 1/2 < \alpha < 1$, et dans ce cas, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$, donc $(v_n)_{n \geq n_0}$ croît, ce qui amène l'inégalité :

$$\forall n \geq n_0, \qquad n^\alpha u_n \geq {n_0}^\alpha u_{n_0} > 0.$$

  D'où $1/n^\alpha = O(u_n)$ avec $\alpha < 1$, ce qui montre que $\sum u_n$ diverge.

Variante : pour étudier la suite v_n, on peut aussi considérer la série téléscopique

$$\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \sum \ln(v_{n+1}/v_n).$$

D'après les calculs précédents :

$$\ln(v_{n+1}/v_n) = \ln\Big(1 + \frac{\alpha - b - 1/2}{n} + O(1/n^2)\Big) = \frac{\alpha - b - 1/2}{n} + O(1/n^2).$$

En choisissant $\alpha = b + 1/2$, on a alors $\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ converge, donc par le lien suite-série, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(v_n) \to \ell$. Par continuité de la fonction exp, on en déduit que $v_n \to e^\ell > 0$, et donc $u_n \sim \frac{e^\ell}{n^{b+1/2}}$ ce qui donne un équivalent de u_n et permet de conclure que $\sum u_n$ converge ssi $b \geq 1/2$.

Remarque • *Cette dernière méthode est meilleure car elle inclut le cas $b = 1/2$, qui n'était pas envisagé dans l'énoncé.*

- *Cet exercice est trivial avec la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, donc*

$$u_n = \frac{a^n n^n}{n! n^b} \sim \frac{(ae)^n}{\sqrt{2\pi}\ n^{b+1/2}},$$

  et on conclut facilement par comparaison de SATP.

13. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\pi/2)^{3/5} - (\arctan n)^{3/5}$. En posant $x_n = \pi/2 - \arctan n$, on a $x_n \to 0^+$ et

$$u_n = (\pi/2)^{3/5} - (\pi/2 - x_n)^{3/5} = (\pi/2)^{3/5} \times \Big(1 - (1 - \frac{2}{\pi} x_n)^{3/5}\Big),$$

donc

$$u_n = (\pi/2)^{3/5} \times \Big(\frac{6}{5\pi} x_n + o(x_n)\Big) \underset{+\infty}{\sim} C x_n.$$

(avec $C > 0$). Mais on a aussi $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ pour tout réel $x > 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \arctan(1/n)$. On en déduit que $u_n \sim \frac{C}{n}$, et donc $\sum u_n$ diverge.

14. Pour $n \geq 2$, on a $u_{2n} = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$ et $u_{2n+1} = 0$. Donc, en notant $(S_n)_{n \geq 2}$ la suite des sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n} = S_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_{2k} = \sum_{k=1}^{n} v_k,$$

en notant $v_k = u_{2k}$ (puisque les termes d'indices impairs sont nuls). On peut alors utiliser la règle de d'Alembert : $v_k > 0$ et

$$\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{u_{2k+2}}{u_{2k}} = \frac{\ln(k+1)}{k+1} \underset{+\infty}{\to} 0 < 1,$$

donc $\sum v_k$ converge. Ainsi, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite réelle, donc (S_n) converge, ce qui montre que $\sum u_n$ converge.

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = (\mathrm{ch}(\sqrt{\ln n}))^{-2} = \frac{4}{(e^{\sqrt{\ln n}} + e^{-\sqrt{\ln n}})^2} \sim \frac{4}{e^{2\sqrt{\ln n}}} > 0.$$

On procède alors par comparaison à une série de Riemann : pour n assez grand, on a $2\sqrt{\ln(n)} \leq \ln(n)$, donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_0 \implies \frac{4}{e^{2\sqrt{\ln n}}} \geq \frac{4}{e^{\ln(n)}} = \frac{4}{n}.$$

Ainsi, par comparaison de SATP, $\sum \frac{4}{e^{2\sqrt{\ln n}}}$ diverge et donc $\sum u_n$ diverge.

16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2} < 0$, donc par comparaison de séries à termes de signe constant, la série $\sum u_n$ converge (comme $\sum 1/n^2$).

17. On fixe un paramètre $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^{kn}}{(nk)!} > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{kn+k}}{(nk+k)!} \times \frac{(nk)!}{n^{kn}} = (1+1/n)^{kn} \times \frac{(n+1)^k}{(nk+k)(nk+k-1)\cdots(nk+1)},$$

si $k > 0$.
Le dénominateur comporte k facteurs (indépendant de n), donc on a l'équivalent $(nk+k)(nk+k-1)\cdots(nk+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} (nk)^k$, si bien que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nk\ln(1+1/n)} k^k \underset{n\to+\infty}{\sim} e^k/k^k.$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 0 < 1$ donc par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge si $k > 0$.
Enfin, si $k = 0$, $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\sum u_n$ diverge.

18. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$u_n = \sqrt[3]{n^3 - 4n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + an + b}.$$

Cette quantité est bien définie à partir d'un certain rang, car $n^2 + an + b \sim n^2 > 0$, donc $n^2 + an + b > 0$ pour n assez grand. De plus, on a le DL :

$$u_n = n\left(\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}\right)^{1/3} - \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}\right)^{1/2}\right)$$

$$= n\left(\left(1 + \frac{1}{3}(-\frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}) - \frac{1}{9}(\frac{16}{n^2}) + O(1/n^3)\right) - \left(1 + \frac{1}{2}(\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}) - \frac{1}{8}(\frac{a^2}{n^2}) + O(1/n^3)\right)\right)$$

$$= -\left(\frac{4}{3} + \frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{1}{9} - \frac{b}{2} + \frac{a^2}{8}\right)\frac{1}{n} + O(1/n^2).$$

Si $\frac{4}{3} + \frac{a}{2} \neq 0$, alors u_n ne tend pas vers 0, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Si $\frac{4}{3} + \frac{a}{2} \neq 0$, alors deux sous-cas :
- si $-\frac{1}{9} - \frac{b}{2} + \frac{a^2}{8} = C \neq 0$, alors $u_n \sim C/n$ et donc $\sum u_n$ diverge.
- si $-\frac{1}{9} - \frac{b}{2} + \frac{a^2}{8} = 0$, alors $u_n = O(1/n^2)$, donc $\sum u_n$ converge.
En conclusion, $\sum u_n$ converge si et seulement si $(a, b) = (-8/3, 14/9)$.

19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = (n\sin(1/n))^{n^2} - e^{-1/6} = e^{n^2\ln(1-\frac{1}{6n^2}+O(1/n^4))} - e^{-1/6}$$

$$= e^{-1/6+O(1/n^2)} - e^{-1/6} = e^{-1/6}(e^{O(1/n^2)} - 1) = O(1/n^2),$$

donc $\sum u_n$ converge.

20. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 < u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!} = \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + \frac{1}{n!}}{(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)} \leq \frac{2}{n^p}$$

si $p > 0$ (car le numérateur est inférieur à $1 + (n-1) * (1/n) < 2$ et le dénominateur comporte p facteurs tous supérieurs à n). Cette majoration montre donc que ($p \geq 2 \implies \sum u_n$ converge).
Reste à traiter les cas $p = 1$ et $p = 0$ (pour lesquels la majoration précédente ne donne rien).
- si $p = 1$, alors $u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!} \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$, donc $\sum u_n$ diverge.
- si $p = 0$, alors $u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} \geq 1$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Finalement, $\sum u_n$ converge ssi $p \geq 2$.

Exercice 3 (**)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\sum u_n$, $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$, $\sum \ln(1+u_n)$ et $\sum \int_0^{u_n} \frac{1}{1+x^e}dx$ sont de même nature.

Corrigé de l'exercice 3
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Deux cas se présentent :

- si $u_n \to 0$, alors
$$\frac{u_n}{1+u_n} \sim u_n \sim \ln(1+u_n),$$
De plus, par croissance de l'intégrale et décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^e}$ sur $[0, +\infty[$, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq \frac{u_n}{1+u_n^e} \leq \int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e} \leq u_n,$$
d'où
$$\int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e} \sim u_n$$
(puisque $\frac{1}{1+u_n^e} \to 1$).
On conclut par comparaison de SATP que $\sum u_n$, $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$, $\sum \ln(1+u_n)$ et $\sum \int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e}$ sont de même nature.
- si (u_n) ne tend pas vers zéro, alors $\ln(1+u_n)$ non plus (sinon par continuité de exp on aurait $1 + u_n \to e^0 = 1$, c'est-à-dire $u_n \to 0$), $x_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ non plus (car $u_n(1-x_n) = x_n$, donc $x_n \to 0 \implies u_n \to 0$), ce qui montre que $\sum u_n$, $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ et $\sum \ln(1+u_n)$ sont grossièrement divergentes.
Enfin, la dernière série $\sum \int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e}$ est également grossièrement divergente. En effet, on a par hypothèse :
$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0, \quad u_n > \varepsilon_0,$$
ce qui permet de construire une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ minorée par ε_0, et on a l'inégalité
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{u_{\varphi(n)}} \frac{dx}{1+x^e} \geq \int_0^{\varepsilon_0} \frac{dx}{1+x^e} = C > 0,$$
qui empêche $\int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e}$ de tendre vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
Dans ce second cas les quatre séries étudiées sont (grossièrement) divergentes, donc de même nature également.

Exercice 4 (Comparaisons entre sommes partielles et restes de deux SATP)**

1. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Montrer que si une des deux séries converge (resp. diverge), alors elles convergent (resp. divergent) toutes deux et leurs restes (resp. sommes partielles) sont équivalent(e)s.
2. Soit $u_0 > 0$, et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ pour $n \geq 0$. Étudier $\sum 1/u_n$, et donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} 1/u_k$.

Corrigé de l'exercice 4

1. C'est un théorème du cours de MPI ("sommation des relations de comparaison"), voir le chapitre 1.
2. On a $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre facilement par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1}^2 - u_n^2 = 1,$$

donc en sommant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^2 = u_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = u_0^2 + n,$$

ce qui prouve que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sqrt{u_0^2 + n} \sim \sqrt{n}.$$

Ainsi, $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et par comparaison de SATP, la série $\sum 1/u_n$ diverge.
Par la question 1., on en déduit

$$\sum_{k=1}^{n} 1/u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

et on termine avec une comparaison série-intégrale pour déterminer un équivalent simple de cette dernière somme partielle : par continuité et décroissance de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$, on a

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

d'où en sommant :

$$\forall n \geq 2, \qquad \int_2^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_1^{n} \frac{dx}{\sqrt{x}} dx,$$

ce qui donne en ajoutant 1 :

$$\forall n \geq 2, \qquad 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 2 + 1.$$

Finalement, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1/u_k \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 5 (*Wallis et Stirling)**

1. Montrer que $(u_n) = \left(\frac{n!\,\exp(n)}{n^n\sqrt{n}}\right)$ converge vers une limite $L > 0$ (étudier la série télescopique associée à $(\ln(u_n))$). Le calcul de L donne un équivalent de $n!$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit les **intégrales de Wallis** : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt$.
Montrer : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, $I_{2p+1}/I_{2p-1} \leq I_{2p}/I_{2p-1} \leq 1$, enfin : $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p}/I_{2p-1} = 1$.
Calculer explicitement I_{2p} et I_{2p+1}, montrer que $nI_nI_{n-1} = \pi/2$ et enfin : $I_n \sim \sqrt{\pi/(2n)}$.
En déduire la **formule de Stirling** : $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.}$

Corrigé de l'exercice 5

- **Existence de** L : en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} > 0$, on a

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(u_{n+1}/u_n) = \ln\left(e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1/2}\right) = 1 - (n+1/2)\ln(1+1/n),$$

donc en faisant un DL :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(1/n^3)\right) = O(1/n^2),$$

ce qui montre que la série téléscopique $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge, et donc la suite $(\ln(u_n))$ converge vers un réel ℓ. Par continuité de exp, on a donc $u_n \to e^\ell = L > 0$, ce qui montre :

$$n! \sim L n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

- **Calcul de** L : considérons les intégrales de Wallis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$$

(la seconde égalité s'obtient avec le changement de variable $u = \pi/2 - t$).

  * **Relation de récurrence** : à l'aide d'une IPP, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin^{n+1}(t)dt = \big[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)(n+1)\sin^n(t)dt,$$

c'est-à-dire

$$I_{n+2} = 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t))\sin^n(t)dt = (n+1)(I_n - I_{n+2}),$$

d'où la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

  * **Rapport de deux termes consécutifs** : la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs (par positivité de l'intégrale ou par récurrence simple), et décroissante puisque

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\underbrace{(\sin(t) - 1)}_{\leq 0} dt \leq 0.$$

On en déduit les inégalités annoncées :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} \leq 1$$

(puisque $0 < I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$).
Or d'après la relation de récurrence précédemment établie :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{2p}{2p+1} \to 1,$$

donc d'après le théorème des gendarmes, on a $I_{2p}/I_{2p-1} \to 1$.

  * **Calcul explicite des** I_n : par récurrence simple (de "deux en deux", ce qui oblige à séparer les termes d'indices pairs et impairs), on obtient :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-4} = \cdots = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3 \times 1}{2p(2p-2)\cdots 4 \times 2} I_0,$$

c'est-à-dire (en multipliant numérateur et dénominateur par $2p(2p-2)\cdots 4\times 2 = 2^p p!$) :

$$\forall p\in\mathbb{N},\qquad I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\times\frac{\pi}{2}.$$

De même :

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \cdots = \frac{2p(2p-2)\cdots 4\times 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 5\times 3} I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!},$$

puisque $I_1 = 1$.

* **Produit de deux termes consécutifs** : on déduit des formules précédentes les relations

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\qquad I_{2p}I_{2p-1} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{2^{2p-2}((p-1)!)^2}{(2p-1)!} = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2p},$$

$$\forall p\in\mathbb{N},\qquad I_{2p+1}I_{2p} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\times\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2p+1},$$

ce qui se résume à :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad I_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2n}.$$

* **Equivalent de I_n** : en distinguant là encore les n pairs et impairs, on montre que $I_n/I_{n-1}\to 1$, c'est-à-dire $I_n\sim I_{n-1}$.
En effet, on a déjà montré que $I_{2p}/I_{2p-1}\to 1$, et on a
$I_{2p+1}/I_{2p} = (I_{2p+1}/I_{2p-1})\times(I_{2p-1}/I_{2p})\to 1$ (par produit de limites).
La relation $I_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$ donne donc (par produit d'équivalents) $I_n^2\sim\frac{\pi}{2n}$, et finalement :

$$I_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

* **Conclusion (formule de Stirling)** : nous avions montré en première partie :

$$\exists L>0,\qquad n!\sim Ln^ne^{-n}\sqrt{n}.$$

En outre, en considérant les intégrales de Wallis d'indice pair (par exemple), on a montré que

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\times\frac{\pi}{2},$$

donc en utilisant les équivalents de $p!$ et $(2p)!$ en fonction de L, on obtient

$$I_{2p}\sim\frac{L(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}}{2^{2p}L^2p^{2p}e^{-2p}p}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{L\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Mais on a aussi montré que

$$I_{2p}\sim\sqrt{\frac{\pi}{4p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}.$$

Donc nécessairement, $\frac{\pi}{L\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ce qui donne finalement

$$L = \sqrt{2\pi},$$

et donc

$$n!\sim n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Exercice 6 (**)
Convergence de la série de terme général :

1) $u_n = n\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right)^\alpha$

2) $u_n = \frac{R_n}{S_n}$ (restes et sommes partielles de $\sum 1/n^\alpha$)

3) $u_n = 1/\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k$

Corrigé de l'exercice 6
A chaque fois, on cherche un équivalent simple du terme général proposé par comparaison série-intégrale :

1. Puisque la série $\sum 1/n^2$ converge, le reste $\sum_{k=n}^{+\infty} 1/k^2$ est bien défini donc u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On obtient facilement $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ (pour plus de détails, voir l'exemple 2. plus général). Donc $u_n = n\left(\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right)^\alpha \sim \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} > 0$, ce qui montre que $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 2$.
2. Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^\alpha$ et $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} 1/k^\alpha$, avec $\alpha > 1$ (pour assurer l'existence de R_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). On note aussi $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^\alpha = S_n + R_{n+1} > 0$.
Par continuité et décroissance de $x \mapsto 1/x^\alpha$ sur $]0, +\infty[$, on a
$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} t^{-\alpha} dt \leq k^{-\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} t^{-\alpha} dt,$$
donc en sommant :
$$\forall N \geq n \geq 2, \qquad \int_n^{N+1} t^{-\alpha} dt \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{N} t^{-\alpha} dt.$$
En calculant les intégrales et en faisant tendre $N \to +\infty$, on obtient l'encadrement
$$\forall n \geq 2, \qquad \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq R_n \leq \frac{(n-1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1},$$
ce qui donne l'équivalent $R_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.
Finalement, $u_n = \dfrac{R_n}{S_n} \sim \dfrac{n^{1-\alpha}}{\zeta(2)(\alpha-1)} > 0$, donc la série $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
En conclusion, $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 2$.

Variante : en utilisant la sommabilité.
Soit $\alpha > 1$. Puisque $S_n \to \zeta(2) > 0$, on a $u_n = \frac{R_n}{S_n} \sim \frac{R_n}{\zeta(2)} > 0$, donc $\sum u_n$ est de même nature que $\sum R_n$. En outre, on a dans $[0, +\infty]$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{n,k}\right),$$
où $u_{n,k} = 1/k^\alpha$ si $k \geq n$ et $u_{n,k} = 0$ sinon. Vu que la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est à termes positifs, on peut intervertir les sommes (théorème de Fubini positif). On a donc, toujours dans $[0, +\infty]$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{k+1}{k^\alpha}\right).$$
Or, $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{k+1}{k^\alpha}\right) < +\infty \iff \alpha > 2$ (en passant par un équivalent), donc on en déduit :
$\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 2$.
3. On a ici $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \ln(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par continuité et croissance de ln sur $]0, +\infty[$, on a
$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_{k-1}^{k} \ln(t) dt,$$
donc en sommant :
$$\forall n \geq 2, \qquad \int_2^{n+1} \ln(t) dt \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leq \int_1^{n} \ln(t) dt,$$

c'est-à-dire (par IPP)

$$\forall n \geq 2, \qquad (n+1)\ln(n+1)-(n+1)-2\ln(2)+2 \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leq n\ln(n)-n+1.$$

Puisque $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n) = \ln(n) + O(1/n) \sim \ln(n)$, on déduit que les deux extrémités de l'encadrement précédent sont équivalentes à $n\ln(n)$, et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n),$$

si bien que $u_n \sim \dfrac{1}{n\ln(n)} > 0$.

Ainsi, $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$, qu'on étudie (encore !) par comparaison série-intégrale. Par continuité et décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ sur $]1,+\infty[$, on a

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{k\ln(k)},$$

donc en sommant

$$\forall n \geq 2, \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t\ln(t)} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty,$$

donc la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 7 (**)
Équivalent de $\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}}\right)$.

Corrigé de l'exercice 7
On procède par comparaison série-intégrale. La fonction $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ étant continue et décroissante sur $[0,+\infty[$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_k^{k+1} e^{-\sqrt{t}}dt \leq e^{-\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k} e^{-\sqrt{t}}dt,$$

donc en sommant :

$$\forall 1 \leq n \leq N, \qquad \int_n^{N+1} e^{-\sqrt{t}}dt \leq \sum_{k=n}^{N} e^{-\sqrt{k}} \leq \int_{n-1}^{N} e^{-\sqrt{t}}dt.$$

On calcule les intégrales à l'aide du changement de variable $t = u^2$, qui donne :

$$\int_a^b e^{-\sqrt{t}}dt = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} 2ue^{-u}du \underset{IPP}{=} \left[-2(1+u)e^{-u}\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}.$$

D'où l'encadrement :

$$\forall 1 \leq n \leq N, \qquad 2(1+\sqrt{n})e^{-\sqrt{n}}-2(1+\sqrt{N+1})e^{-\sqrt{N+1}} \leq \sum_{k=n}^{N} e^{-\sqrt{k}} \leq 2(1+\sqrt{n-1})e^{-\sqrt{n-1}}-2(1+\sqrt{N})e^{-\sqrt{N}},$$

qui donne en faisant tendre $N \to +\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 2(1+\sqrt{n})e^{-\sqrt{n}} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}} \leq 2(1+\sqrt{n-1})e^{-\sqrt{n-1}}$$

(le passage à la limite est licite car la série converge, vu que $e^{-\sqrt{k}} = o(1/k^2)$).
Enfin,

$$e^{-\sqrt{n-1}} = e^{-\sqrt{n}\sqrt{1-1/n}} = e^{-\sqrt{n}(1-1/(2n)+o(1/n))} = e^{-\sqrt{n}}e^{1/(2\sqrt{n})+o(1/\sqrt{n})} \sim e^{-\sqrt{n}},$$

donc les deux extrémités de l'encadrement sont équivalentes à $2\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}}$, ce qui montre que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}}.$$

Exercice 8 (***)
Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs de suite de sommes partielles (S_n). Montrer que :

1. $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$ est convergente (utiliser une comparaison intégrale) ;
2. $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{S_n}$ sont de même nature (si $\sum u_n$ diverge, utiliser $\sum \frac{u_n}{S_{n-1}}$ et une comparaison intégrale).

Corrigé de l'exercice 8
Vu les hypothèses, la suite (S_n) est strictement croissante et $S_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par continuité et décroissance de $t \mapsto 1/t^2$ sur $]0, +\infty[$:

$$0 < \frac{u_n}{S_n^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{S_n^2} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}.$$

   Or, la série téléscopique $\sum \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right)$ converge, puisque la suite $(1/S_n)$ converge (sa limite est $1/S$ où $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in]0, +\infty]$ avec convention $1/S = 0$ si $S = +\infty$).
   En conclusion $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$ converge par comparaison de SATP.

2. Deux cas se présentent :
   - si $\sum u_n$ converge, alors $S_n \to S > 0$, donc $\frac{u_n}{S_n} \sim \frac{u_n}{S} > 0$, ce qui montre par comparaison de SATP que $\sum \frac{u_n}{S_n}$ converge.
   - si $\sum u_n$ diverge, alors $S_n \to +\infty$. D'autre part :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{u_n}{S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_{n-1}} \geq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t} = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1}).$$

     Puisque $\ln(S_n) \to +\infty$, la série téléscopique $\sum(\ln(S_n) - \ln(S_{n-1}))$ diverge, et par comparaison de SATP, la série $\sum \frac{u_n}{S_{n-1}}$ diverge.
     Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_n}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n},$$

     donc $\ln(S_n) - \ln(S_{n-1}) = -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$.
     Si $\frac{u_n}{S_n} \to 0$, alors $-\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) \sim u_n/S_n$, donc $\frac{u_n}{S_n} \sim \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$, et en réutilisant l'argument de la série téléscopique, la série $\sum u_n/S_n$ diverge.
     Si $\frac{u_n}{S_n}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n/S_n$ diverge grossièrement.
     On a donc bien montré que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum u_n/S_n$ diverge.