Exercices du CH01 : Séries et sommabilité

Exercices de la banque INP à étudier : ex 5 (séries de Bertrand), 6 (d'Alembert), 7 (critère des équivalents), 46 (utilisation de DL),

Niveaux de difficulté des exercices de TD :

(*) : Exercice simple, en général de l'application directe du cours.

(**) : Exercice de niveau intermédiaire.

(***) : Exercice difficile, demandant de l'initiative.

I TD du jeudi 03/09

Exercice 1 (*)
Déterminer la nature et calculer la somme des séries de terme général :

1) $\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}$ 2) $\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$

Corrigé de l'exercice 1

1. Par téléscopage :

$$\forall N\geq 2,\qquad \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{\sqrt{n}}-\sum_{n=2}^{N}\frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{N}}+\frac{1}{\sqrt{N+1}}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc la série étudiée converge et $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. On procède par téléscopage :

$$\forall N\geq 1,\qquad \sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)=\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{N}(\ln(n+1)-\ln(n))+\sum_{n=1}^{N}(\ln(n+2)-\ln(n+3))=\ln(N+1)-\ln(1)+\ln(3)-\ln(N+3)$$

$$=\ln(3)+\ln\left(\frac{N+1}{N+3}\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\ln(3).$$

Donc la série étudiée converge et $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)=\ln(3)$.

Exercice 2 (*)
Soit $f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $\sum(-1)^n\int_0^1 x^n f(x)dx$ est convergente de somme $\int_0^1\frac{f(x)}{1+x}dx$. Qu'obtient-on si f est constante égale à 1 sur $[0,1]$?

Corrigé de l'exercice 2
Etudions les sommes partielles de la série proposée : pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^k f(x)dx=\int_0^1\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}(-x)^k\right)}_{=\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}}f(x)dx=\underbrace{\int_0^1\frac{f(x)}{1+x}dx}_{:=S}-\underbrace{\int_0^1\frac{(-x)^{n+1}f(x)}{1+x}dx}_{:=R_n}.$$

(par linéarité de l'intégrale des fonctions continues sur un segment). Donc

$$|S_n - S| = |R_n| \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}|f(x)|}{1+x}dx \leq M\int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{M}{n+2}$$

où $M = \sup_{[0,1]} |f|$ (la fonction f est bornée car continue sur un segment).

Ainsi, $S_n - S \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc la série étudiée converge vers $S = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$.

Dans le cas $f = 1$, cela donne la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

Exercice 3 (*)

Déterminer la nature des séries de terme général :

1) $\frac{n!}{n^n}$
2) $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
3) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1$
4) $\frac{n^2}{2^n+n}$

Corrigé de l'exercice 3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n!}{n^n} > 0$ et
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-n\ln(1+1/n)} = e^{-n(1/n+o(1/n))} \to e^{-1} < 1,$$
(en faisant un DL), donc la série $\sum u_n$ converge (par la règle de d'Alembert).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$, donc $\sum u_n$ diverge (puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge).
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1 = e^{n\ln(1+1/n^2)} - 1 = e^{1/n+o(1/n)} - 1 \sim \frac{1}{n},$$
donc $\sum u_n$ diverge.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^2}{2^n+n} \sim \frac{n^2}{2^n} > 0$ et
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} \underset{+\infty}{\to} \frac{1}{2} < 1,$$
donc $\sum u_n$ converge d'après la règle de d'Alembert.

Exercice 4 (Séries de Bertrand)**

1. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^\beta(n)}$ converge ssi $\beta > 1$.
Indication : comparer avec une intégrale.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Corrigé de l'exercice 4

1. On procède par comparaison série-intégrale, en considérant la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln^\beta(x)}$, qui est continue et positive sur $]1, +\infty[$, et dont on peut facilement déterminer les primitives ($f = u'u^{-\beta}$ avec $u = \ln$).
   - Le cas $\beta \leq 0$ est évident : vu que pour tout $x \geq e$, on a
   $$f(x) = \frac{\ln^{|\beta|}(x)}{x} \geq \frac{1}{x},$$
   on en déduit que la série $\sum_{n\geq 2} f(n)$ diverge, par comparaison avec la série divergente $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$.

- Dans le cas $\beta > 0$, la fonction f est décroissante sur $]1, +\infty[$ (facile à vérifier par composition ou dérivation), donc
$$\forall k \geq 3, \qquad \int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f,$$
ce qui amène en sommant :
$$\forall n \geq 3, \qquad \int_3^{n+1} f \leq \sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \int_2^{n} f.$$
En calculant les intégrales, on obtient :
  * pour $\beta = 1$,
$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq \sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)),$$
donc par minoration $\sum_{k=3}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, ce qui montre que la série étudiée diverge.
  * pour $\beta \neq 1$,
$$\frac{\ln(n+1)^{1-\beta} - \ln(3)^{1-\beta}}{1-\beta} \leq \sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \frac{\ln(n)^{1-\beta} - \ln(2)^{1-\beta}}{1-\beta}.$$
- Si $0 < \beta < 1$, on a $\ln(n+1)^{1-\beta} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, donc par minoration $\sum_{k=3}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, ce qui montre que la série étudiée diverge.
- Si $\beta > 1$, alors on peut majorer les sommes partielles de la série, puisqu'en réécrivant la fraction majorante avec un dénominateur positif, on constate que
$$\forall n \geq 3, \qquad \sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \frac{\ln(2)^{1-\beta} - \ln(n)^{1-\beta}}{\beta - 1} \leq \frac{\ln(2)^{1-\beta}}{\beta - 1}.$$
Ainsi, la série $\sum f(n)$ converge, puisque c'est une série à termes positifs dont les sommes partielles (qui sont donc croissantes) sont majorées.

En résumé, la série $\sum f(n)$ converge ssi $\beta > 1$.

2. Dans les autres cas, la technique est différente, car on ne peut pas déterminer explicitement les primitives de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$ (qui est continue sur $]1, +\infty[$) lorsque $\beta \neq 1$.
On procède classiquement par comparaison avec des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\gamma}$, en étudiant le rapport $f(n)/(1/n^\gamma)$. On a $n^\gamma f(n) = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}\ln^\beta(n)}$, donc ce rapport tend vers 0 si $\alpha > \gamma$ et vers $+\infty$ si $\alpha < \gamma$, ce qui amène à distinguer deux cas :
   - si $\alpha > 1$, on choisit $\gamma \in]1, \alpha[$ (par ex. le milieu $\gamma = (1+\alpha)/2$) et on a alors $f(n) = o(1/n^\gamma)$ avec $\gamma > 1$, donc $\sum f(n)$ converge.
   - si $\alpha < 1$, alors avec $\gamma = 1$ (par exemple, mais n'importe quel $\gamma \in]\alpha, 1]$ convient), on a $nf(n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, donc à partir d'un certain rang, on aura $f(n) \geq 1/n$, ce qui montre par minoration que $\sum f(n)$ diverge.
   - le cas $\alpha = 1$ a été traité dans la question 1.

   Finalement, $\sum f(n)$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1,\ \beta > 1)$.

Exercice 5 (*Suites et séries trigonométriques)**

1. Pour quelles valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(n\theta)$ converge-t-elle ?
Indication : on cherchera des relations entre u_n, u_{n+1} et u_{n+2} d'une part, u_n et u_{2n} d'autre part. Ensuite, on fera un raisonnement par analyse-synthèse.
2. Faire de même avec la suite $v_n = \sin(n\theta)$ (en utilisant le résultat de la question précédente).
3. En déduire les valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la suite complexe $z_n = e^{in\theta}$ converge.
4. Soient x et $\theta \in \mathbb{R}$.
Étudier la convergence et calculer la somme des séries $\sum x^n \cos(n\theta)$ et $\sum x^n \sin(n\theta)$.

Corrigé de l'exercice 5

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = (2\cos\theta)u_{n+1} - u_n, \qquad u_{2n} = 2u_n^2 - 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors, en passant à la limite dans ces relations, on obtient

$$\begin{cases} \ell(1-\cos(\theta)) = 0 \\ (\ell-1)(2\ell+1) = 0 \end{cases}.$$

Le cas $\ell = 0$ est contradictoire avec la seconde relation, donc $\ell \neq 0$, ce qui implique

$$\begin{cases} \cos(\theta) = 1 \\ \ell \in \{1, -\frac{1}{2}\} \end{cases}$$

On a donc $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui implique que la suite (u_n) est constante égale à 1.
Réciproquement, la suite constante égale à 1 est évidemment convergente.
On a donc montré l'équivalence

$$(u_n) \text{ converge} \iff \theta \equiv 0\ [2\pi] \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1.$$

2. Ici, il faut utiliser les résultats établis précédemment pour u_n, ainsi que l'interaction entre les suites (u_n) et (v_n). On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{2n} = 2v_n u_n, \qquad v_{n+2} = (2\cos\theta)v_{n+1} - v_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si (v_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors, en passant à la limite dans la seconde relation, on obtient

$$\ell(1-\cos(\theta)) = 0.$$

- Si $\ell = 0$, alors on utilise la relation

$$v_{n+1} = (\cos\theta)v_n + (\sin\theta)u_n,$$

qui entraîne $(\sin\theta)u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ceci impose $\sin(\theta) = 0$, car sinon, on aurait $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et c'est impossible d'après la question précédente (puisque (u_n) ne peut converger que vers 1).
- Si $\ell \neq 0$, alors on a $\cos(\theta) = 1$, et donc $\sin(\theta) = 0$.

On a dans tous les cas $\sin(\theta) = 0$ et donc $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, ce qui implique que la suite (v_n) est constante égale à 0.
Réciproquement, la suite constante égale à 0 est évidemment convergente.
On a donc montré l'équivalence

$$(v_n) \text{ converge} \iff \theta \equiv 0\ [\pi] \iff \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 0.$$

3. Puisque $z_n = u_n + iv_n$, la suite (z_n) converge si et seulement si les suites (u_n) et (v_n) convergent, ce qui équivaut à $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, c'est-à-dire $z_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après les questions précédentes.

4. Puisque $x \in \mathbb{R}$, remarquons que les séries proposées sont les parties réelle et imaginaire de la série géométrique $\sum x^n e^{in\theta} = \sum (xe^{i\theta})^n$.
Cette série converge si et seulement si $|xe^{i\theta}| < 1$, c'est-à-dire $|x| < 1$.

- $\boxed{\text{Si } x \in]-1,1[}$, on a donc convergence des deux séries proposées (rappelons qu'une suite complexe converge si et seulement si ses parties réelle et imaginaire convergent, donc il en est de même pour les séries en appliquant ce raisonnement aux sommes partielles), et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(n\theta) + i\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{i\theta})^n = \frac{1}{1-xe^{i\theta}} = \frac{1-xe^{-i\theta}}{|1-xe^{i\theta}|^2},$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(n\theta) = \frac{1-x\cos(\theta)}{1-2x\cos(\theta)+x^2}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n\theta) = \frac{x\sin(\theta)}{1-2x\cos(\theta)+x^2}.$$

- $\boxed{\text{Si } x \notin]-1,1[}$, au moins une des deux séries proposées diverge, essayons d'identifier laquelle.
  Si $\sum x^n \cos(n\theta)$ converge, alors nécessairement $|x^n \cos(n\theta)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc puisque $|x| \geq 1$:

$$|\cos(n\theta)| \leq |x|^n |\cos(n\theta)| \leq |x^n \cos(n\theta)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

  ce qui est impossible d'après les questions précédentes.
  Donc $\sum x^n \cos(n\theta)$ diverge pour tout réel θ dans ce cas.
  De même, si $\sum x^n \sin(n\theta)$ converge, alors par majoration, $\sin(n\theta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui se produit seulement si $\theta \equiv 0\ [\pi]$ (toujours d'après les questions précédentes), et dans ce cas, la série $\sum x^n \sin(n\theta)$ converge bien (c'est la série nulle).
  Donc $\sum x^n \sin(n\theta)$ converge si et seulement si $\theta \equiv 0\ [\pi]$ et dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n\theta) = 0$.

II A faire pour lundi 07/09

Exercice 6 (Wallis et Stirling)**

1. Montrer que $(u_n) = \left(\frac{n!\,\exp(n)}{n^n\sqrt{n}}\right)$ converge vers une limite $L > 0$ (en étudiant la série télescopique associée à $\ln(u_n)$) et en déduire un équivalent de $n!$ en fonction de L.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit les **intégrales de Wallis** : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$.
   Montrer : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, $I_{2p+1}/I_{2p-1} \leq I_{2p}/I_{2p-1} \leq 1$, enfin : $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p}/I_{2p-1} = 1$.
   Calculer explicitement I_{2p} et I_{2p+1}, montrer que $nI_nI_{n-1} = \pi/2$ et enfin : $I_n \sim \sqrt{\pi/(2n)}$.
   En déduire la **formule de Stirling** : $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.}$

Corrigé de l'exercice 6

- **Existence de** L : en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} > 0$, on a

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(u_{n+1}/u_n) = \ln\left(e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1/2}\right) = 1 - (n+1/2)\ln(1+1/n),$$

  donc en faisant un DL :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(1/n^3)\right) = O(1/n^2),$$

  ce qui montre que la série téléscopique $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge, et donc la suite $(\ln(u_n))$ converge vers un réel ℓ. Par continuité de exp, on a donc $u_n \to e^\ell = L > 0$, ce qui montre :

$$n! \sim Ln^n e^{-n}\sqrt{n}.$$

- **Calcul de** L : considérons les intégrales de Wallis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$$

  (la seconde égalité s'obtient avec le changement de variable $u = \pi/2 - t$).

  * **Relation de récurrence** : à l'aide d'une IPP, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin^{n+1}(t)dt = \left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)(n+1)\sin^n(t)dt,$$

    c'est-à-dire

$$I_{n+2} = 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)dt = (n+1)(I_n - I_{n+2}),$$

    d'où la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

  * **Rapport de deux termes consécutifs** : la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs (par positivité de l'intégrale ou par récurrence simple), et décroissante puisque

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\underbrace{(\sin(t)-1)}_{\leq 0}dt \leq 0.$$

    On en déduit les inégalités annoncées :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} \leq 1$$

(puisque $0 < I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$).
Or d'après la relation de récurrence précédemment établie :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{2p}{2p+1} \to 1,$$

donc d'après le théorème des gendarmes, on a $I_{2p}/I_{2p-1} \to 1$.

* **Calcul explicite des I_n** : par récurrence simple (de "deux en deux", ce qui oblige à séparer les termes d'indices pairs et impairs), on obtient :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-4} = \cdots = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3\times 1}{2p(2p-2)\cdots 4\times 2} I_0,$$

c'est-à-dire (en multipliant numérateur et dénominateur par $2p(2p-2)\cdots 4\times 2 = 2^p p!$) :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

De même :

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \cdots = \frac{2p(2p-2)\cdots 4\times 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 5\times 3} I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!},$$

puisque $I_1 = 1$.

* **Produit de deux termes consécutifs** : on déduit des formules précédentes les relations

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad I_{2p} I_{2p-1} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{2^{2p-2}((p-1)!)^2}{(2p-1)!} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2p},$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad I_{2p+1} I_{2p} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2p+1},$$

ce qui se résume à :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}.$$

* **Equivalent de I_n** : en distinguant là encore les n pairs et impairs, on montre que $I_n/I_{n-1} \to 1$, c'est-à-dire $I_n \sim I_{n-1}$.
En effet, on a déjà montré que $I_{2p}/I_{2p-1} \to 1$, et on a
$I_{2p+1}/I_{2p} = (I_{2p+1}/I_{2p-1}) \times (I_{2p-1}/I_{2p}) \to 1$ (par produit de limites).
La relation $I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$ donne donc (par produit d'équivalents) $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$, et finalement :

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

* **Conclusion (formule de Stirling)** : nous avions montré en première partie :

$$\exists L > 0, \qquad n! \sim L n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

En outre, en considérant les intégrales de Wallis d'indice pair (par exemple), on a montré que

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2},$$

donc en utilisant les équivalents de $p!$ et $(2p)!$ en fonction de L, on obtient

$$I_{2p} \sim \frac{L(2p)^{2p} e^{-2p}\sqrt{2p}}{2^{2p} L^2 p^{2p} e^{-2p} p} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{L\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Mais on a aussi montré que

$$I_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}.$$

Donc nécessairement, $\frac{\pi}{L\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ce qui donne finalement

$$L = \sqrt{2\pi},$$

et donc

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Exercice 7 (Règle de Raabe-Duhamel)**
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que (v_n) est aussi une suite de réels strictement positifs et qu'à partir d'un certain rang, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que (u_n) est dominée par (v_n).
2. (a) On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   À l'aide d'une comparaison à une série de Riemann, montrer la convergence de $\sum u_n$.
   (b) On suppose ici qu'il existe $\alpha < 1$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Montrer que $\sum u_n$ diverge.
   (c) **Application** : Soit $a \in \mathbb{R}$.
   Étudier la convergence absolue de la série de terme général $u_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$.

Corrigé de l'exercice 7

1. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$
$$\frac{u_n}{u_N} = \prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \prod_{k=N}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_n}{v_N}$$
(majoration valable car tous les facteurs sont positifs). Ainsi
$$n \geq N \implies 0 < u_n \leq \frac{u_N}{v_N} \times v_n,$$
ce qui montre bien que $u_n = O(v_n)$.
2. (a) Posons $v_n = 1/n^\gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$, et comparons les quotients $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir de leurs développements asymptotiques :
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\gamma} - 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\alpha - \gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Il existe donc une suite (ε_n) de limite nulle telle qu'à partir d'un certain rang :
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n}(\alpha - \gamma + \varepsilon_n).$$
En choisissant γ tel que $1 < \gamma < \alpha$, on a $\alpha - \gamma + \varepsilon_n > 0$ pour n suffisamment grand (car $\alpha - \gamma > 0$), donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. On en déduit d'après la première question que $u_n = O(1/n^\gamma)$ avec $\gamma > 1$, donc $\sum u_n$ converge (absolument).
   (b) Si $\alpha < 1$, alors en choisissant γ tel que $\alpha < \gamma \leq 1$, le calcul précédent montre que
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n}(\alpha - \gamma + \varepsilon_n) < 0$$
à partir d'un certain rang, et donc $\frac{1}{n^\gamma} = O(u_n)$ avec $\gamma \leq 1$, ce qui montre que $\sum |u_n|$ diverge, mais u_n est positive donc $\sum u_n$ diverge.
   (c)
   - Le cas $a \in \mathbb{N}$ est trivial car dans ce cas $u_n = 0$ à partir du rang $n = a$, donc la série $\sum u_n$ converge absolument.
   - Si $a \notin \mathbb{N}$, alors $|u_n| > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et
$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a-n|}{n+1}.$$
Pour $n > a$, on a donc
$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n-a}{n+1} = \frac{1 - a/n}{1 + 1/n} = \left(1 - \frac{a}{n}\right) \times \left(1 - \frac{1}{n} + o(1/n)\right) = 1 - \frac{1+a}{n} + o(1/n)$$
donc d'après ce qui précède avec $\alpha = 1 + a \neq 1$, on peut conclure que $\sum |u_n|$ converge ssi $a > 0$.
En regroupant les deux cas, on obtient finalement que $\sum u_n$ converge absolument ssi $a \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 8 (**)
Déterminer la nature des séries de terme général :

1) $\tan(1/n^2).\ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)$
2) $\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$
3) $\frac{(\ln n)^n}{n!}$
4) $\int_n^{n+1/2}\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$
5) $(\pi/2)^{3/5}-(\arctan n)^{3/5}$
6) $\left(\operatorname{ch}\sqrt{\ln n}\right)^{-2}$
7) $\frac{n^{kn}}{(nk)!}$, $k\in\mathbb{N}$
8) $\sqrt[3]{n^3-4n^2+5n}-\sqrt{n^2+an+b}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$
9) $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}-e^{-1/6}$
10) $\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+p)!}$

Corrigé de l'exercice 8
On note u_n le terme général de la série étudiée dans chacun des cas.

1. Pour tout $n\geq 2$, $u_n=\tan(1/n^2)\ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)=\tan(1/n^2)\times\big(\ln(1+1/n^{3/2})-\ln(1-1/n)\big)$. Vu que $\tan(x)=x+o(x)$ et $\ln(1+x)=x+o(x)$ lorsque $x\to 0$, on en déduit

$$u_n=(1/n^2+o(1/n^2))\times(1/n+o(1/n))\sim 1/n^3>0.$$

Par comparaison de séries à termes de signe constant, on en déduit que $\sum u_n$ et $\sum 1/n^3$ ont même nature, donc $\sum u_n$ converge.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$, donc

$$u_n=e^{-\sqrt{n}\ln(1+n^{-1/3})}=e^{-\sqrt{n}(n^{-1/3}-\frac{1}{2}n^{-2/3}+o(n^{-2/3}))}=e^{-n^{1/6}}\times\underbrace{e^{-\frac{1}{2}n^{-1/6}+o(n^{-1/6})}}_{\to 1},$$

ce qui entraîne $u_n\underset{+\infty}{\sim}e^{-n^{1/6}}>0$, donc $\sum u_n$ a même nature que $\sum e^{-n^{1/6}}$.
Pour étudier la nature de $\sum e^{-n^{1/6}}$, on compare à une série de Riemann : $e^{-x}\underset{x\to+\infty}{=o}(1/x^\alpha)$ donc avec $\alpha=12$ (par exemple), on obtient que $e^{-n^{1/6}}\underset{n\to+\infty}{=o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui montre que $\sum u_n$ converge.

3. Pour tout $n\geq 2$, $u_n=\frac{(\ln n)^n}{n!}>0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(\ln(n+1))^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{(\ln n)^n}=\frac{(\ln(n)+\ln(1+1/n))^{n+1}}{(n+1)\times(\ln n)^n}$$

$$=\frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{n+1}\times\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)^n\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln(n)}{n}\times\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)^n.$$

Or, en effectuant un DL :

$$\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)^n=e^{-n\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)}=e^{-(\frac{1}{\ln(n)}+o(\frac{1}{\ln(n)}))}\underset{+\infty}{\to}1,$$

donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}\sim\frac{\ln(n)}{n}\to 0$. Puisque cette limite est strictement inférieure à 1, on en déduit que $\sum u_n$ converge par la règle de d'Alembert.

Variante : soit $\alpha>0$. Pour n assez grand, on a $0<\ln(n)\leq n^\alpha$, donc $0<u_n\leq\frac{n^{\alpha n}}{n!}=v_n$, et on applique la règle de d'Alembert sur v_n (plus simple) :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(n+1)^{\alpha n+\alpha}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{n^{\alpha n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n}\times(n+1)^{\alpha-1}\underset{n\to+\infty}{\sim}e^\alpha n^{\alpha-1}$$

(faire encore un DL). En choisissant $0<\alpha<1$, on obtient que $\frac{v_{n+1}}{v_n}\to 0$, donc $\sum v_n$ converge et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_n^{n+1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$ (intégrale bien définie car la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc a fortiori sur tout segment $[n, n+1/2]$). Par croissance de l'intégrale, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq u_n \leq \int_n^{n+1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1/2} = \frac{1}{n(2n+1)} \leq \frac{1}{2n^2},$$
donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\pi/2)^{3/5} - (\arctan n)^{3/5}$. En posant $x_n = \pi/2 - \arctan n$, on a $x_n \to 0^+$ et
$$u_n = (\pi/2)^{3/5} - (\pi/2 - x_n)^{3/5} = (\pi/2)^{3/5} \times \left(1 - (1 - \frac{2}{\pi}x_n)^{3/5}\right),$$
donc
$$u_n = (\pi/2)^{3/5} \times \left(\frac{6}{5\pi}x_n + o(x_n)\right) \underset{+\infty}{\sim} Cx_n.$$
(avec $C > 0$). Mais on a aussi $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ pour tout réel $x > 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \arctan(1/n)$. On en déduit que $u_n \sim \frac{C}{n}$, et donc $\sum u_n$ diverge.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = (\mathrm{ch}(\sqrt{\ln n}))^{-2} = \frac{4}{(e^{\sqrt{\ln n}} + e^{-\sqrt{\ln n}})^2} \sim \frac{4}{e^{2\sqrt{\ln n}}} > 0.$$
On procède alors par comparaison à une série de Riemann : pour n assez grand, on a $2\sqrt{\ln(n)} \leq \ln(n)$, donc
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_0 \implies \frac{4}{e^{2\sqrt{\ln n}}} \geq \frac{4}{e^{\ln(n)}} = \frac{4}{n}.$$
Ainsi, par comparaison de SATP, $\sum \frac{4}{e^{2\sqrt{\ln n}}}$ diverge et donc $\sum u_n$ diverge.
7. On fixe un paramètre $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^{kn}}{(nk)!} > 0$ et
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{kn+k}}{(nk+k)!} \times \frac{(nk)!}{n^{kn}} = (1+1/n)^{kn} \times \frac{(n+1)^k}{(nk+k)(nk+k-1)\cdots(nk+1)},$$
si $k > 0$.
Le dénominateur comporte k facteurs (indépendant de n), donc on a l'équivalent $(nk+k)(nk+k-1)\cdots(nk+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} (nk)^k$, si bien que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nk\ln(1+1/n)}k^k \underset{n\to+\infty}{\sim} e^k/k^k.$$
Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 0 < 1$ donc par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge si $k > 0$.
Enfin, si $k = 0$, $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\sum u_n$ diverge.
8. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose
$$u_n = \sqrt[3]{n^3 - 4n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + an + b}.$$
Cette quantité est bien définie à partir d'un certain rang, car $n^2 + an + b \sim n^2 > 0$, donc $n^2 + an + b > 0$ pour n assez grand. De plus, on a le DL :
$$u_n = n\left(\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}\right)^{1/3} - \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}\right)^{1/2}\right)$$
$$= n\left(\left(1 + \frac{1}{3}(-\frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}) - \frac{1}{9}(\frac{16}{n^2}) + O(1/n^3)\right) - \left(1 + \frac{1}{2}(\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}) - \frac{1}{8}(\frac{a^2}{n^2}) + O(1/n^3)\right)\right)$$
$$= -\left(\frac{4}{3} + \frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{1}{9} - \frac{b}{2} + \frac{a^2}{8}\right)\frac{1}{n} + O(1/n^2).$$
Si $\frac{4}{3} + \frac{a}{2} \neq 0$, alors u_n ne tend pas vers 0, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Si $\frac{4}{3} + \frac{a}{2} \neq 0$, alors deux sous-cas :
- si $-\frac{1}{9} - \frac{b}{2} + \frac{a^2}{8} = C \neq 0$, alors $u_n \sim C/n$ et donc $\sum u_n$ diverge.
- si $-\frac{1}{9} - \frac{b}{2} + \frac{a^2}{8} = 0$, alors $u_n = O(1/n^2)$, donc $\sum u_n$ converge.
En conclusion, $\sum u_n$ converge si et seulement si $(a, b) = (-8/3, 14/9)$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = (n\sin(1/n))^{n^2} - e^{-1/6} = e^{n^2\ln(1-\frac{1}{6n^2}+O(1/n^4))} - e^{-1/6}$$
$$= e^{-1/6+O(1/n^2)} - e^{-1/6} = e^{-1/6}(e^{O(1/n^2)} - 1) = O(1/n^2),$$
donc $\sum u_n$ converge.
10. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$0 < u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!} = \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + \frac{1}{n!}}{(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)} \leq \frac{2}{n^p}$$
si $p > 0$ (car le numérateur est inférieur à $1 + (n-1) * (1/n) < 2$ et le dénominateur comporte p facteurs tous supérieurs à n). Cette majoration montre donc que ($p \geq 2 \implies \sum u_n$ converge). Reste à traiter les cas $p = 1$ et $p = 0$ (pour lesquels la majoration précédente ne donne rien).
- si $p = 1$, alors $u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!} \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$, donc $\sum u_n$ diverge.
- si $p = 0$, alors $u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} \geq 1$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Finalement, $\sum u_n$ converge ssi $p \geq 2$.

Exercice 9 (***)
Déterminer la nature des séries de terme général :

1) $\frac{1}{n}$ si n est un carré, $\frac{1}{n^2}$ sinon

2) $\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$

3) $\frac{a^n n^n}{n!\, n^b}$, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $(a,b) \neq (1/e, 1/2)$

4) $u_{2n} = \prod_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$, $u_{2n+1} = 0$

Corrigé de l'exercice 9

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1/n$ si n est un carré, et $u_n = 1/n^2$ sinon. La suite (S_n) définie par $S_n = u_1 + \cdots + u_n$, est strictement croissante (puisque $u_k > 0$ pour tout k), donc elle converge ou bien tend vers $+\infty$. Etudions une suite extraite :
$$S_{n^2} = \sum_{j=1}^{n^2} u_j = \sum_{k=1}^{n} u_{k^2} + \sum_{j\in[1,n^2]\setminus\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}} u_j$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{j\in[1,n^2]\setminus\{1^2,2^2,\cdots,n^2\}} \frac{1}{j^2},$$
donc
$$S_{n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{j^2} \leq 2\sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{j^2} \leq 2\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} < +\infty.$$
Ainsi, la suite extraite (S_{n^2}) est majorée par $2\zeta(2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2}{j^2}$ (au passage $\zeta(2) = \pi^2/6$), et par croissance de (S_n) :
$$S_n \leq S_{n^2} \leq 2\zeta(2),$$
donc (S_n) est-elle même majorée. On en déduit que (S_n) converge, donc la série $\sum u_n$ converge.

Remarque
On peut être plus précis et calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$: en reprenant le calcul précédent,
$$S_{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{j^2} - \sum_{j\in\{1^2,\cdots,n^2\}} \frac{1}{j^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{j^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^4} \underset{n\to+\infty}{\to} 2\zeta(2) - \zeta(4),$$
où $\zeta(2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \pi^2/6$ et $\zeta(4) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^4} = \pi^4/90$. Donc finalement (puisqu'on sait que (S_n) converge) :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n^2} = \pi^2/3 - \pi^4/90.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(e^n-1)} = \frac{\ln(n)}{n+\ln(1-e^{-n})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} \geq 0$, donc $\sum u_n$ et $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ sont de même nature.
En outre, $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 3$ donc $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge et finalement $\sum u_n$ diverge.
3. On a ici $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (1/e, 1/2)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{a^n n^n}{n! n^b} > 0$. Donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!(n+1)^b} \times \frac{n! n^b}{a^n n^n} = a\,(1+1/n)^{n-b} \underset{+\infty}{\sim} a\,(1+1/n)^n \underset{+\infty}{\sim} ae.$$

La règle de d'Alembert permet alors de conclure que la série $\sum u_n$ converge si $0 < a < 1/e$ et diverge si $a > 1/e$.
Reste à traiter le cas $a = 1/e$, où la règle de d'Alembert est insuffisante. On peut être plus précis en utilisant la *méthode de Raabe-Duhamel*, basée le DL à deux termes :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} e^{(n-b)\ln(1+1/n)} = e^{-1+(n-b)(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(1/n^3))} = e^{-\frac{b+1/2}{n} + O(1/n^2)}$$

c'est-à-dire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{b+1/2}{n} + O(1/n^2).$$

L'idée est de comparer u_n à une suite de Riemann $1/n^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi. Pour cela on travaille sur le rapport

$$v_n = \frac{u_n}{1/n^\alpha} = n^\alpha u_n.$$

On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = (1+1/n)^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{\alpha}{n} + O(1/n^2)\right) \times \left(1 - \frac{b+1/2}{n} + O(1/n^2)\right)$$

$$= 1 + \frac{\alpha - b - 1/2}{n} + O(1/n^2).$$

On en déduit la monotonie de (v_n) à partir d'un certain rang suivant le signe de $\alpha - b - 1/2$. Par hypothèse on a $b \neq 1/2$, donc deux cas se présentent :

- si $b > 1/2$, alors $b + 1/2 > 1$, donc on peut choisir α tel que $1 < \alpha < b + 1/2$. Dans ce cas, on a à partir d'un certain rang n_0 l'inégalité $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, donc $(v_n)_{n \geq n_0}$ décroît. On en déduit que (v_n) est bornée, et donc $u_n = O(1/n^\alpha)$ avec $\alpha > 1$, ce qui montre que $\sum u_n$ converge.
- si $b < 1/2$, alors on peut choisir de même α tel que $b + 1/2 < \alpha < 1$, et dans ce cas, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$, donc $(v_n)_{n \geq n_0}$ croît, ce qui amène l'inégalité :

$$\forall n \geq n_0, \qquad n^\alpha u_n \geq {n_0}^\alpha u_{n_0} > 0.$$

D'où $1/n^\alpha = O(u_n)$ avec $\alpha < 1$, ce qui montre que $\sum u_n$ diverge.

Variante : pour étudier la suite v_n, on peut aussi considérer la série téléscopique

$$\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \sum \ln(v_{n+1}/v_n).$$

D'après les calculs précédents :

$$\ln(v_{n+1}/v_n) = \ln\left(1 + \frac{\alpha - b - 1/2}{n} + O(1/n^2)\right) = \frac{\alpha - b - 1/2}{n} + O(1/n^2).$$

En choisissant $\alpha = b + 1/2$, on a alors $\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ converge, donc par le lien suite-série, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(v_n) \to \ell$. Par continuité de la fonction exp, on en déduit que $v_n \to e^\ell > 0$, et donc $u_n \sim \frac{e^\ell}{n^{b+1/2}}$ ce qui donne un équivalent de u_n et permet de conclure que $\sum u_n$ converge ssi $b > 1/2$.

Remarque • *Cette dernière méthode est meilleure car elle inclut le cas $b = 1/2$, qui n'était pas envisagé dans l'énoncé.*

- *Cet exercice est trivial avec la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, donc*

$$u_n = \frac{a^n n^n}{n! n^b} \sim \frac{(ae)^n}{\sqrt{2\pi}\, n^{b+1/2}},$$

et on conclut facilement par comparaison de SATP.

4. Pour $n \geq 2$, on a $u_{2n} = \prod_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$ et $u_{2n+1} = 0$. Donc, en notant $(S_n)_{n\geq 2}$ la suite des sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n} = S_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_{2k} = \sum_{k=1}^{n} v_k,$$

en notant $v_k = u_{2k}$ (puisque les termes d'indices impairs sont nuls). On peut alors utiliser la règle de d'Alembert : $v_k > 0$ et

$$\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{u_{2k+2}}{u_{2k}} = \frac{\ln(k+1)}{k+1} \underset{+\infty}{\to} 0 < 1,$$

donc $\sum v_k$ converge. Ainsi, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite réelle, donc (S_n) converge, ce qui montre que $\sum u_n$ converge.

Exercice 10 (**)
Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}}$.

Corrigé de l'exercice 10
On procède par comparaison série-intégrale. La fonction $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ étant continue et décroissante sur $[0, +\infty[$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_k^{k+1} e^{-\sqrt{t}} dt \leq e^{-\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k} e^{-\sqrt{t}} dt,$$

donc en sommant :

$$\forall 1 \leq n \leq N, \qquad \int_n^{N+1} e^{-\sqrt{t}} dt \leq \sum_{k=n}^{N} e^{-\sqrt{k}} \leq \int_{n-1}^{N} e^{-\sqrt{t}} dt.$$

On calcule les intégrales à l'aide du changement de variable $t = u^2$, qui donne :

$$\int_a^b e^{-\sqrt{t}} dt = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} 2ue^{-u} du \underset{IPP}{=} \left[-2(1+u)e^{-u}\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}.$$

D'où l'encadrement :

$$\forall 1 \leq n \leq N, \qquad 2(1+\sqrt{n})e^{-\sqrt{n}} - 2(1+\sqrt{N+1})e^{-\sqrt{N+1}} \leq \sum_{k=n}^{N} e^{-\sqrt{k}} \leq 2(1+\sqrt{n-1})e^{-\sqrt{n-1}} - 2(1+\sqrt{N})e^{-\sqrt{N}},$$

qui donne en faisant tendre $N \to +\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 2(1+\sqrt{n})e^{-\sqrt{n}} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}} \leq 2(1+\sqrt{n-1})e^{-\sqrt{n-1}}$$

(le passage à la limite est licite car la série converge, vu que $e^{-\sqrt{k}} = o(1/k^2)$).
Enfin,

$$e^{-\sqrt{n-1}} = e^{-\sqrt{n}\sqrt{1-1/n}} = e^{-\sqrt{n}(1-1/(2n)+o(1/n))} = e^{-\sqrt{n}} e^{1/(2\sqrt{n})+o(1/\sqrt{n})} \sim e^{-\sqrt{n}},$$

donc les deux extrémités de l'encadrement sont équivalentes à $2\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}}$, ce qui montre que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}}.$$

Exercice 11 (**)
Etudier la convergence de la série de terme général :

1) $u_n = \frac{R_n}{S_n}$ (restes et sommes partielles de $\sum 1/n^\alpha$ avec $\alpha > 1$)

2) $u_n = 1/\sum_{k=1}^{n} \ln k$

Corrigé de l'exercice 11
A chaque fois, on cherche un équivalent simple du terme général proposé par comparaison série-intégrale :

1. Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^\alpha$ et $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} 1/k^\alpha$, avec $\alpha > 1$ (pour assurer l'existence de R_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). On note aussi $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^\alpha = S_n + R_{n+1} > 0$.
Par continuité et décroissance de $x \mapsto 1/x^\alpha$ sur $]0, +\infty[$, on a

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} t^{-\alpha} dt \leq k^{-\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} t^{-\alpha} dt,$$

donc en sommant :

$$\forall N \geq n \geq 2, \qquad \int_n^{N+1} t^{-\alpha} dt \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{N} t^{-\alpha} dt.$$

En calculant les intégrales et en faisant tendre $N \to +\infty$, on obtient l'encadrement

$$\forall n \geq 2, \qquad \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq R_n \leq \frac{(n-1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1},$$

ce qui donne l'équivalent $R_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.
Finalement, $u_n = \dfrac{R_n}{S_n} \sim \dfrac{n^{1-\alpha}}{\zeta(2)(\alpha-1)} > 0$, donc la série $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
En conclusion, $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 2$.

Variante : en utilisant la sommabilité.
Soit $\alpha > 1$. Puisque $S_n \to \zeta(2) > 0$, on a $u_n = \frac{R_n}{S_n} \sim \frac{R_n}{\zeta(2)} > 0$, donc $\sum u_n$ est de même nature que $\sum R_n$. En outre, on a dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} u_{n,k} \right),$$

où $u_{n,k} = 1/k^\alpha$ si $k \geq n$ et $u_{n,k} = 0$ sinon. Vu que la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est à termes positifs, on peut intervertir les sommes (théorème de Fubini positif). On a donc, toujours dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{k+1}{k^\alpha} \right).$$

Or, $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{k+1}{k^\alpha}\right) < +\infty \iff \alpha > 2$ (en passant par un équivalent), donc on en déduit :
$\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 2$.

2. On a ici $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \ln(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par continuité et croissance de ln sur $]0, +\infty[$, on a

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_{k-1}^{k} \ln(t) dt,$$

donc en sommant :

$$\forall n \geq 2, \qquad \int_2^{n+1} \ln(t) dt \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leq \int_1^{n} \ln(t) dt,$$

c'est-à-dire (par IPP)

$$\forall n \geq 2, \qquad (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln(2) + 2 \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leq n\ln(n) - n + 1.$$

Puisque $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n) = \ln(n) + O(1/n) \sim \ln(n)$, on déduit que les deux extrémités de l'encadrement précédent sont équivalentes à $n\ln(n)$, et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n),$$

si bien que $u_n \sim \dfrac{1}{n\ln(n)} > 0$.
Ainsi, $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$, qu'on étudie (encore !) par comparaison série-intégrale. Par continuité et décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ sur $]1, +\infty[$, on a

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{k\ln(k)},$$

donc en sommant

$$\forall n \geq 2, \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t\ln(t)} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty,$$

donc la série $\sum u_n$ diverge.

III TD du lundi 07/09

1) MPI* seulement

Exercice 12 (***)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n}{u_0 + \cdots + u_n}, \qquad w_n = \frac{u_n}{(u_0 + \cdots + u_n)^2}.$$

1. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (en utilisant $\sum \ln(1 - v_n)$).
2. Montrer que la série $\sum w_n$ converge (en montrant d'abord que la suite $(a_n) = \left(\frac{1}{u_0+\cdots+u_n}\right)$ converge).

Corrigé de l'exercice 12
Notons $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_n > 0$ pour tout n, la suite (S_n) est strictement croissante et strictement positive. On a donc deux cas : soit $S_n \to S > 0$, soit $S_n \to +\infty$.

1. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < v_n < 1$, donc $\ln(1 - v_n)$ est bien défini.
   Etudions la série $\sum \ln(1 - v_n)$: on a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

   $$\sum_{n=1}^{N} \ln(1 - v_n) = \sum_{n=1}^{N} \ln(S_{n-1}/S_n) = \sum_{n=1}^{N} (\ln(S_{n-1}) - \ln(S_n)) = \ln(S_0) - \ln(S_N).$$

   Si $S_N \underset{N\to+\infty}{\to} S > 0$, alors $\sum_{n=1}^{N} \ln(1 - v_n) \underset{N\to+\infty}{\to} \ln(S_0) - \ln(S)$.
   Si $S_N \underset{N\to+\infty}{\to} +\infty$, alors $\sum_{n=1}^{N} \ln(1 - v_n) \underset{N\to+\infty}{\to} -\infty$.
   On en conclut que la série $\sum \ln(1 - v_n)$ est de même nature que la série $\sum u_n$ (puisque $(S_N)_N$ est la suite des sommes partielles).
   Reste à montrer que les séries $\sum \ln(1 - v_n)$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Cela résulte du fait que :
   - si $v_n \not\to 0$, alors ces deux séries sont grossièrement divergentes,
   - si $v_n \to 0$, alors $\ln(1 - v_n) \sim -v_n$ (de signe constant, donc les deux séries ont même nature par le critère des équivalents.

   En conclusion, $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.
2. La suite décroissante $(a_n) = (1/S_n)$ converge (soit vers $1/S > 0$, soit vers 0), donc d'après le lien suite-série, la série telescopique $\sum(a_n - a_{n+1})$ converge. Or :

   $$a_n - a_{n+1} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{S_n S_{n+1}} \geq \frac{u_{n+1}}{S_{n+1}^2} = w_{n+1} \geq 0,$$

   donc par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum w_{n+1}$ converge, donc $\sum w_n$ converge.

Exercice 13 (*Avec des parties entières)**
Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$.

Corrigé de l'exercice 13
On va travailler sur les sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k}.$$

Pour tous entiers $(m, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a

$$\lfloor\sqrt{k}\rfloor = m \iff m \leq \sqrt{k} < m + 1 \iff m^2 \leq k < (m + 1)^2,$$

$$\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor = m \iff m \leq \sqrt{k+1} < m+1 \iff m^2 - 1 \leq k < (m+1)^2 - 1,$$

donc il est intéressant de regrouper les termes de la somme S_n par paquets :

$$\forall n \geq 1, \qquad S_{(n+1)^2-1} = \sum_{k=1}^{(n+1)^2-1} \frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k} = \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \underbrace{\frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k}}_{=0 \text{ si } k<(m+1)^2-1} \right),$$

c'est-à-dire

$$S_{(n+1)^2-1} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(m+1)^2-1} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+2)} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+2} \right).$$

Par téléscopage, on obtient

$$S_{(n+1)^2-1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}.$$

Enfin, on sait que la suite réelle (S_n) est croissante (car $u_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$), et possède une suite extraite convergente donc elle converge, et $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}$
(sinon on aurait $S_n \to +\infty$ et la suite extraite $S_{(n+1)^2-1}$ ferait de même, ce qui est contradictoire).
Finalement, la série $\sum u_n$ converge et on a $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 3/4$.

2) MPI/MPI*

Exercice 14 (**)
Etudier la convergence de la série de terme général :

1) $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right)$
2) $\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$
3) $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$

Corrigé de l'exercice 14

1) On procède par développement asymptotique du terme général (qui est bien défini pour $n \geq 2$) :

$$u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$= (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O(1/n)\right)\right)$$
$$= (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n} + O(1/n^{3/2})\right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O(1/n^{3/2}).$$

On a donc $u_n = x_n + y_n$ avec $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $y_n \sim -\frac{1}{n}$ (de signe constant). Puisque $\sum x_n$ converge (par le CSSA étant donné que la suite $n \mapsto 1/\sqrt{n}$ décroît vers 0) et $\sum y_n$ diverge (par le critère des équivalents), on en déduit par somme que $\sum u_n$ diverge.

2) Encore des développements asymptotiques : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}} - 1\right) = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n^{3/2}} + o(1/n^{3/2}),$$

donc $\sum u_n$ converge (somme de trois séries convergentes, par les mêmes arguments que précédemment).

3) On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n = (n!)^{-1/n} = e^{-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(k)}$.
Puisque la suite $(\ln(k))_k$ est croissante et tend vers $+\infty$, il en est de même de la suite de ses moyennes de Cesàro $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(k))_n$ (exercice classique), donc par composition, (a_n) est décroissante et tend vers 0. On conclut par le CSSA que $\sum u_n$ converge.

Exercice 15 (Fonction zeta de Riemann)**
On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ pour $s \in \mathbb{C}$.

1. Quel est le domaine d'absolue convergence de cette série dans $\mathbb{C}$?
   On note ζ la fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ sur le domaine ainsi déterminé.
2. Montrer que la restriction de ζ à l'axe réel est strictement décroissante.
3. Pour $s \in]1, +\infty[$, établir un encadrement de $\zeta(s)$ par comparaison série-intégrale.
4. En déduire la limite de $\zeta(s)$ lorsque $s \to +\infty$, puis un équivalent de $\zeta(s)$ lorsque $s \to 1^+$.

Corrigé de l'exercice 15

1. Pour tout $s = x + iy \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$n^{-s} = e^{-s\ln(n)} = e^{-x\ln(n) - iy\ln(n)} = n^{-x} e^{-iy\ln(n)},$$
donc $|n^{-s}| = n^{-x} = n^{-Re(s)}$.
On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge absolument si et seulement si $Re(s) > 1$.

2. Pour $1 < s < t$, on a par regroupement de séries convergentes :
$$\zeta(s) - \zeta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{n^t} \right) \geq 0$$
(somme d'une série à termes positifs puisque $n^t \geq n^s$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), d'où la décroissance.
Et en fait cette décroissance est stricte car (par exemple) :
$$\zeta(s) - \zeta(t) \geq \frac{1}{2^s} - \frac{1}{2^t} > 0.$$

3. On effectue une comparaison série-intégrale : pour $s \in]1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto t^{-s}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$, donc
$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{k^s} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^s}.$$
En sommant et en utilisant la relation de Chasles, on obtient
$$\forall n \geq 2, \qquad \int_2^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \int_1^{n} \frac{dt}{t^s},$$
c'est-à-dire
$$\forall n \geq 2, \qquad \frac{2^{-s+1} - (n+1)^{-s+1}}{s-1} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \frac{1 - n^{-s+1}}{s-1}.$$
En faisant tendre $n \to +\infty$ (tout converge car $-s+1 < 0$), on obtient
$$\frac{2^{-s+1}}{s-1} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{s-1},$$
d'où l'encadrement
$$\forall s \in]1, +\infty[, \qquad 1 + \frac{2^{-s+1}}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}.$$

4. En faisant tendre $s \to +\infty$, on obtient par le théorème des gendarmes que $\zeta(s) \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   Puisque $2^{-s+1} \underset{s\to1^+}{\longrightarrow} 1$, l'encadrement de la question précédente donne l'équivalent :

$$\zeta(s) \underset{s\to1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}.$$

Exercice 16 (Exemple à paramètre)**
Déterminer en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^\alpha}$.

Corrigé de l'exercice 16
On procède par développement asymptotique du terme général : puisque $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

On a donc $u_n = x_n + y_n$ avec $x_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^{2\alpha}}$.
Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum x_n$ converge pour tout $\alpha > 0$.
Puisque $\left(-\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)_{n\geq1}$ est de signe constant, la série $\sum y_n$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$, donc elle converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.
Finalement, par somme : la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.

Exercice 17 (**)
Soit f continue décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Déterminer la nature de la série $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)dt$.

Corrigé de l'exercice 17
Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)dt$. Le changement de variable $y = t - n\pi$ donne

$$u_n = (-1)^n \int_0^\pi f(y+n\pi)\sin(y)dy.$$

En posant $a_n = \displaystyle\int_0^\pi f(y+n\pi)\sin(y)dy$, on obtient facilement que (a_n) est décroissante (puisque $\sin \geq 0$ sur $[0,\pi]$ et f est décroissante). Etudions maintenant la convergence de la suite (a_n).
Nous avons l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2f((n+1)\pi) = \int_0^\pi f((n+1)\pi)\sin(y)dy \leq a_n \leq \int_0^\pi f(n\pi)\sin(y)dy = 2f(n\pi).$$

En outre, f étant décroissante et minorée, elle possède une limite réelle $\ell \in \mathbb{R}^+$ en $+\infty$. L'encadrement précédent permet de conclure que $a_n \to \ell$. Deux cas se présentent donc :

- si $\ell = 0$, alors $a_n \to 0$ et $\sum u_n = \sum(-1)^n a_n$ converge par le CSSA ;
- si $\ell > 0$, alors $u_n = (-1)^n a_n$ ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

En conclusion $\sum u_n$ converge ssi $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

IV TD du mardi 08/09

Exercice 18 (*Equivalent de somme partielle)
On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k}{k+1}}$. Calculer un équivalent simple de S_n.

Corrigé de l'exercice 18
On a $e^{-\frac{k}{k+1}} \underset{k\to+\infty}{\sim} e^{-1}$, et la série à termes positifs $\sum e^{-1}$ diverge (grossièrement), donc d'après le théorème de sommation des relations de comparaison (cas divergent), les sommes partielles sont équivalentes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k}{k+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} e^{-1} = \frac{n}{e}.$$

Exercice 19 (*Equivalent de reste)
Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$.
Déterminer un équivalent simple de R_n. *Indication : penser à un télescopage.*

Corrigé de l'exercice 19
Tout d'abord, la série $\sum_{k\geq 0} \frac{a^k}{k!}$ converge absolument pour tout réel a (par la règle de d'Alembert) donc R_n existe. Remarquons ensuite que le terme général $\frac{a^k}{k!}$ possède un équivalent téléscopique :

$$\frac{a^k}{k!} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{a^k}{k!} - \frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$$

puisque $\frac{a^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{a}{k+1} \times \frac{a^k}{k!} = o\left(\frac{a^k}{k!}\right)$.
Donc d'après le théorème de sommation des relations de comparaison (cas convergent), les restes sont équivalents :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(-\frac{a^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{a^k}{k!}\right) = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 20 (Développement asymptotique de somme partielle)**
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$.
Déterminer un équivalent simple de S_n puis montrer qu'on peut former un développement asymptotique de la forme $S_n = \ln(n) + C + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$, où C est une constante.

Corrigé de l'exercice 20
Puisque $\frac{1}{k+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k}$, la série $\sum \frac{1}{k+\sqrt{k}}$ diverge et il y a équivalence des sommes partielles (d'après le théorème de sommation des relations de comparaison). Donc $S_n \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ (cf. cours).
Etudions ensuite la différence $u_n = S_n - \ln(n)$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}}\right) - \frac{1}{n} + O(1/n^2)$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})\right) - \frac{1}{n} + O(1/n^2) \sim -\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Ainsi, la série téléscopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge (critère des équivalents pour les séries dont le terme général est de signe constant) donc la suite (u_n) converge vers un réel C. Par définition de la convergence, on a $u_n = C + o(1)$, c'est-à-dire $S_n = \ln(n) + C + o(1)$.

Exercice 21 (Série associée à une suite récurrente)**
Soit $u_0 > 0$, et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ pour $n \geq 0$. Étudier $\sum 1/u_n$, et donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n 1/u_k$.

Corrigé de l'exercice 21

On a $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre facilement par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1}^2 - u_n^2 = 1,$$

donc en sommant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^2 = u_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = u_0^2 + n,$$

ce qui prouve que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sqrt{u_0^2 + n} \sim \sqrt{n}.$$

Ainsi, $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et par comparaison de SATP, la série $\sum 1/u_n$ diverge.
Par le théorème de sommation des équivalents (cas divergent), on en déduit :

$$\sum_{k=1}^n 1/u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}},$$

et on termine avec une comparaison série-intégrale pour déterminer un équivalent simple de cette dernière somme partielle : par continuité et décroissance de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0,+\infty[$, on a

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

d'où en sommant :

$$\forall n \geq 2, \qquad \int_2^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

ce qui donne en ajoutant 1 :

$$\forall n \geq 2, \qquad 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 2 + 1.$$

Finalement, $\displaystyle\sum_{k=1}^n 1/u_k \sim 2\sqrt{n}$ (car les deux suites encadrantes sont équivalentes à $2\sqrt{n}$).

Exercice 22 (*Etude d'une suite récurrente)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

1. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (monotonie et convergence).
2. En considérant la suite $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ pour α bien choisi, déterminer un équivalent de u_n.
3. La série de terme général u_n est-elle convergente ?

Remarque
Dans les concours les plus ambitieux, la méthode permettant de déterminer un équivalent de u_n n'est pas forcément donnée. Il faut retenir que cette idée peut être testée pour des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_n \to 0$ et $f(x) \underset{x\to0}{\sim} x$.

Corrigé de l'exercice 22

1. La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-1,+\infty[$, et on a $f(]0,+\infty[) \subset]0,+\infty[$. Donc la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $]0,+\infty[$ (puisque $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   En outre,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \ln(1+u_n) - u_n < 0$$
   (car $\ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$, ce qui se montre rapidement en étudiant $x \mapsto x - \ln(1+x)$ sur $[0,+\infty[$).
   Ainsi, (u_n) est strictement décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}^+$. En passant alors à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ (vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$), on obtient $\ell = f(\ell)$ (par continuité de f au point ℓ), et donc $\ell = 0$ (toujours d'après l'étude de $x \mapsto x - \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}^+$).
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a (puisque $u_n \to 0$)
   $$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = \ln(1+u_n)^\alpha - u_n^\alpha = \left(u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)\right)^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha \left(\left(1 - \frac{u_n}{2} + o(u_n)\right)^\alpha - 1\right),$$
   donc
   $$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\alpha}{2} u_n^{1+\alpha}.$$
   En choisissant $\alpha = -1$, on obtient l'équivalent simple :
   $$u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$
   Le théorème de sommation des relations de comparaison (cas divergent) pour les suites de signe constant donne alors l'équivalence des sommes partielles :
   $$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^{-1} - u_k^{-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{n}{2},$$
   c'est-à-dire
   $$u_n^{-1} - u_0^{-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}.$$
   Comme $u_n^{-1} \to +\infty$, on a
   $$u_n^{-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^{-1} - u_0^{-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2},$$
   et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.
3. Finalement, la série $\sum u_n$ diverge par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs.

V TD du mercredi 09/09

1) MPI* seulement

Exercice 23 (Critère pour un ensemble au plus dénombrable)**

1. Démontrer qu'un ensemble I est au plus dénombrable ssi il existe une suite croissante $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I dont la réunion est égale à I.
2. *Applications* : utiliser ce critère pour démontrer ou redémontrer les résultats suivants : $\mathbb{Z}$ est dénombrable, $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.

Corrigé de l'exercice 23

1. Si I est réunion (croissante ou pas) de parties $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finies, alors I est fini ou dénombrable, donc au plus dénombrable, c'est un théorème du cours. Montrons la réciproque.
   Si I est au plus dénombrable, alors il est fini ou dénombrable (c'est équivalent d'après le cours).
   Si I est fini, alors en posant $I_n = I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le résultat voulu.
   Si I est dénombrable, alors il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I$. Posons alors $I_n = \varphi(\llbracket 0, n\rrbracket)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Chaque I_n est fini de cardinal $n+1$, on a $I_n \subset I_{n+1}$ (puisque $\llbracket 0, n\rrbracket \subset \llbracket 0, n+1\rrbracket$), et
   $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\llbracket 0, n\rrbracket) = \varphi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \llbracket 0, n\rrbracket\right) = \varphi(\mathbb{N}) = I.$$
2. Les décompositions suivantes permettent de conclure :
   $$\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \llbracket -n, n\rrbracket,$$
   $$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \llbracket 0, n\rrbracket \times \llbracket 0, n\rrbracket,$$
   $$\mathbb{Z}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,\ a_k \in \llbracket -n, n\rrbracket \right\}.$$

Exercice 24 (***)
Calculer $\sum_{(p,q)\in A} \frac{1}{p^2q^2}$ où $A = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ p \wedge q = 1\}$ en fonction de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

Corrigé de l'exercice 24
L'idée est de grouper les couples d'entiers $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ suivant les valeurs de leur PGCD $d \in \mathbb{N}^*$. Le théorème de sommation par paquets pour les familles positives donne dans $[0, +\infty]$:
$$\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2q^2} = \sum_{d\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{(p,q)\in A_d} \frac{1}{p^2q^2} \right),$$
où $A_d = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ p \wedge q = d\}$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$. Ensuite, décrivons l'ensemble A_d pour d fixé : tout couple $(p,q) \in A_d$ s'écrit de façon unique $(p,q) = (da, db)$ avec a et b premiers entre eux, ce qui donne une bijection $\begin{cases} A_1 & \longrightarrow & A_d \\ (a,b) & \longmapsto & (da, db) \end{cases}$. Ainsi :
$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{(p,q)\in A_d} \frac{1}{p^2q^2} = \sum_{(a,b)\in A_1} \frac{1}{(da)^2(db)^2} = \frac{1}{d^4} S,$$
où $S = \sum_{(a,b)\in A_1} \frac{1}{a^2b^2}$ est la somme à calculer. On en déduit :
$$\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2q^2} = \sum_{d\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{d^4} S = S \times \zeta(4).$$

Mais par le théorème de Fubini, on a également :

$$\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}\right)\frac{1}{p^2} = \zeta(2)^2,$$

donc finalement $S = \dfrac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)}$.

2) MPI/MPI*

Exercice 25 (Reconnaissance du caractère dénombrable (ou pas))**
Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ? Justifier.

1. L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux.
2. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$.
3. L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 25

1. On rappelle que $\mathbb{D} = \{\frac{a}{10^k},\ a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$.
   Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable (c'est du cours) et $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, on en déduit que $\mathbb{D}$ est au plus dénombrable. Or, $\mathbb{D}$ est infini, donc il est dénombrable.
   Variante : l'application $s : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ (a,k) & \longmapsto & \frac{a}{10^k}\end{array}\right.$ est surjective par définition de $\mathbb{D}$.
   Et $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ étant dénombrable (comme produit fini d'ensembles dénombrables), il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$. Donc on a une surjection $s\circ\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{D}$, ce qui montre que $\mathbb{D}$ est au plus dénombrable, et comme il est infini, il est dénombrable.
2. L'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \\ (a,b) & \longmapsto & a+b\sqrt{2}\end{array}\right.$ est surjective par définition de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, et injective car :
   $$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \implies (b = d) \text{ ou } (b \neq d \text{ et } \sqrt{2} = \frac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q});$$
   mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ donc
   $$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \implies b = d \implies (a,b) = (c,d).$$
   On a donc une bijection $\varphi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et puisque $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable (comme produit fini d'ensembles dénombrables), on en déduit que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est dénombrable.
3. Toute partie finie de $\mathbb{N}$ est majorée, donc est incluse dans une partie finie du type $[\![0,n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}$. En notant $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, on a donc :
   $$\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ A \subset [\![0,n]\!]\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}([\![0,n]\!]).$$
   Ainsi, $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $card(\mathcal{P}([\![0,n]\!])) = 2^{n+1}$), donc $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est au plus dénombrable, et infini (il contient tous les singletons $\{n\}$ avec $n \in \mathbb{N}$ par exemple), donc $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est dénombrable.

Exercice 26 (Nombres algébriques)**
On dit d'un nombre complexe z qu'il est *algébrique* lorsqu'il est racine d'un polynôme **non nul** à coefficients rationnels.

1. Donner divers exemples de nombres algébriques.
2. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est dénombrable.
3. Que dire de l'ensemble des nombres algébriques ?

Corrigé de l'exercice 26

1. Le nombre $\sqrt{2}$ est algébrique car racine de X^2-2.
   Le "nombre d'or" $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est algébrique car racine de X^2-X-1.
   Pour tout nombre premier p et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[k]{p}$ est algébrique car racine de X^k-p.
   Le nombre i est algébrique car racine de X^2+1.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_n = e^{2i\pi/n}$ est algébrique car racine de X^n-1.
   Les nombres e et π ne sont pas algébriques (ils sont dits "transcendants", mais c'est plus difficile à montrer).
2. On a $\mathbb{Z}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n[X]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_n[X]$ est dénombrable (car en bijection avec $\mathbb{Z}^{n+1}$, lui-même dénombrable comme produit fini d'ensembles dénombrables). Donc $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable (comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables).
3. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres complexes algébriques. Un nombre z est algébrique si et seulement si il est racine d'un polynôme non nul à coefficients **entiers** (quitte à multiplier tous les coefficients d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ qui annule z par le produit de tous les dénominateurs). En notant, pour tout polynôme P, $Z(P)$ l'ensemble des racines complexes de P, on a donc la décomposition
$$\mathcal{A} = \bigcup_{P\in\mathbb{Z}[X]\setminus\{0\}} Z(P),$$
ce qui montre que $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable (comme réunion dénombrable d'ensembles finis). Mais $\mathcal{A}$ est infini (cf. question 1.), donc $\mathcal{A}$ est dénombrable.

Exercice 27 (**)
Les familles suivantes sont-elles sommables ?

1) $(x)_{x\in\mathbb{D}\cap[0,1]}$
2) $(1/x^2)_{x\in\mathbb{Q}_+^*}$
3) $(a^n)_{n\in\mathbb{Z}}$
4) $(1/(p+q)^\alpha)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$
5) $(1/(p^2+q^2)^\alpha)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$

Corrigé de l'exercice 27

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{D}\cap[0,1]$ contient la famille $\left(\frac{k}{10^n}\right)_{k\in[0,10^n]}$, et on a
$$\sum_{k=0}^{10^n} \frac{k}{10^n} = \frac{10^n(10^n+1)}{2\times 10^n} > \frac{10^n}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
donc les sommes sur les parties finies $F \subset \mathbb{D}\cap[0,1]$ de la famille $(x)_{x\in\mathbb{D}\cap[0,1]}$ ne sont pas majorées, ce qui montre que la famille de réels positifs $(x)_{x\in\mathbb{D}\cap[0,1]}$ n'est pas sommable.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{Q}_+^*$ contient $1/n$, donc puisque $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}_+^*}$ est une famille de réels positifs :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{x\in\mathbb{Q}_+^*} \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{(1/n)^2} = n^2.$$
On en déduit que $\sum_{x\in\mathbb{Q}_+^*} \frac{1}{x^2} = +\infty$, et donc la famille $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}_+^*}$ n'est pas sommable.
On peut bien entendu rédiger comme dans le premier exemple en disant que les sommes sur les parties finies ne sont pas majorées, si l'on ne veut pas travailler dans $[0,+\infty]$.
3) Soit $a \in \mathbb{C}^*$. La famille $(a^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a^n)_{n\in-\mathbb{N}^*} = (a^{-n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont sommables, ce qui équivaut à la convergence des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a|^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(1/|a|)^n$, ou encore aux conditions respectives $|a|<1$ et $|a|>1$. Ces conditions étant incompatibles, la famille $(a^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas sommable.
4) La famille $(u_{p,q}) = \left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est positive, donc elle est sommable si et seulement si
$$\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ p+q=n} u_{p,q}\right) < +\infty$$

(en sommant par paquets suivant les diagonales du quadrillage $(\mathbb{N}^*)^2$). On a donc

$$(u_{p,q}) \text{ sommable } \iff \sum_{n\geq 2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \sum_{n\geq 2}\frac{n-1}{n^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 2,$$

puisque $\dfrac{n-1}{n^\alpha} \sim \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

5) On procède par encadrement : pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a $(p+q)^2 = p^2+q^2+2pq$, donc en utilisant l'inégalité $2pq \leq p^2+q^2$, on obtient

$$p^2+q^2 \leq (p+q)^2 \leq 2(p^2+q^2),$$

donc $\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}$ est compris entre $\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}}$ et $\frac{2^\alpha}{(p+q)^{2\alpha}}$ (le sens de l'inégalité dépend du signe de α). Ainsi, en travaillant dans $[0,+\infty]$ (les familles sont positives), on a

$$\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} < +\infty \iff \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}} < +\infty,$$

ce qui équivaut (d'après l'exemple précédent) à $2\alpha > 2$, c'est-à-dire $\alpha > 1$.

Exercice 28 (**)
Montrer que les familles suivantes sont sommables et calculer leurs sommes :

1) $(r^{|n|}e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$
2) $\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$

Corrigé de l'exercice 28

1) La famille $(r^{|n|}e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable (puisque $|r^{|n|}e^{in\theta}| = r^{|n|}$ et $n \mapsto r^{|n|}$ est paire), c'est-à-dire si et seulement si $\sum_{n\geq 0} r^n$ converge. Et c'est le cas car $r \in [0,1[$. On a donc (en sommant par paquets suivant la décomposition $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \mathbb{N}^* \cup (-\mathbb{N}^*)$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta} = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^n e^{in\theta} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^n e^{-in\theta} = 1 + \frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta} = 1 + \frac{2r\cos(\theta) - 2r^2}{(1-r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}.$$

2) On note $u_{p,q} = \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ et on procède par téléscopage : pour tous entiers $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$:

$$u_{p,q} = \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+1+q^2},$$

donc pour tout $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{1}{0+q^2} - \lim_{P\to+\infty}\frac{1}{P+1+q^2} = \frac{1}{q^2}.$$

D'où $\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty$. On en déduit par le théorème de Fubini que la famille positive $(u_{p,q})$ est sommable et

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} u_{p,q} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 29 (Sommation de restes)**

1. Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a-t-elle un sens ?
3. Montrer qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$.

Corrigé de l'exercice 29

1. Par comparaison série-intégrale avec la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$, continue et décroissante sur $]0, +\infty[$, on obtient :
$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} x^{-\alpha} dx \leq k^{-\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} x^{-\alpha} dx,$$
donc en sommant :
$$\forall N \geq n+1 \geq 2, \qquad \int_{n+1}^{N+1} x^{-\alpha} dx \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} dx \leq \int_n^N x^{-\alpha} dx,$$
c'est-à-dire
$$\forall N \geq n+1 \geq 2, \qquad \frac{(n+1)^{1-\alpha} - (N+1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} dx \leq \frac{n^{1-\alpha} - N^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$
En passant à la limite lorsque $N \to +\infty$ dans cet encadrement (on peut car les trois membres admettent une limite finie, étant donné que $\alpha > 1$), on obtient
$$\forall n \geq 1, \qquad \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq R_n \leq \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1},$$
et donc $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
2. La série à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ converge, c'est-à-dire lorsque $\alpha > 2$.
3. Si $\alpha > 2$, alors la famille positive $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ définie par
$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \qquad a_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{k^\alpha} & \text{si } k \geq n+1 \\ 0 & \text{si } k \leq n \end{cases}$$
est sommable (d'après le théorème de Fubini), puisque
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{n,k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right) < +\infty.$$
Et on a de plus :
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{n,k} \right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,k} \right),$$
c'est-à-dire
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}},$$
ce qui montre la formule voulue.

Exercice 30 (Suite double)**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite double $\left(\frac{z^{2p}}{q^{2p+2}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable ssi $|z|<1$ et, lorsqu'elle est sommable, montrer que sa somme vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-z^2}$.

Corrigé de l'exercice 30

Par définition, la famille de nombres complexes $(a_{p,q}) = \left(\frac{z^{2p}}{q^{2p+2}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si $(|a_{p,q}|)$ est sommable, ce qui équivaut à

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}|a_{p,q}|\right) < +\infty,$$

d'après le théorème de Fubini pour les familles positives. Or,

$$\forall q\in\mathbb{N}^*, \qquad \sum_{p=0}^{+\infty}|a_{p,q}| = \frac{1}{q^2}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}(|z|^2/q^2)^p\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |z|\geq q \\ \dfrac{1}{q^2-|z|^2} & \text{si } |z|<q \end{cases},$$

donc

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}|a_{p,q}|\right) < +\infty \implies \forall q\in\mathbb{N}^*, \quad |z|<q \iff |z|<1.$$

Réciproquement, si $|z|<1$, alors

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}|a_{p,q}|\right) = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2-|z|^2} < +\infty$$

(car $\frac{1}{q^2-|z|^2} \underset{q\to+\infty}{\sim} \frac{1}{q^2}$). En conclusion, la famille $(a_{p,q})$ est sommable si et seulement si $|z|<1$, et dans ce cas, le théorème de Fubini pour les familles de nombres complexes donne :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} a_{p,q} = \sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}a_{p,q}\right) = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2-z^2},$$

ce qui est la formule voulue.

VI A faire pour lundi 14/09

Exercice 31 (Transformation d'Abel)**

1. Soit (a_n) et (b_n) deux suites complexes. On note (B_n) la suite des sommes partielles de $\sum b_n$. Montrer que pour tout $(n_0, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n_0 \leq n$:
$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=n_0}^{n} (a_k - a_{k+1})B_k - a_{n_0}B_{n_0-1} + a_{n+1}B_n$$
(avec la convention $B_{-1} = 0$ lorsque $n_0 = 0$).
2. En déduire que si (B_n) est bornée, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\sum(a_{n+1}-a_n)$ est absolument convergente, alors $\sum a_n b_n$ est convergente.
3. À quoi peut-on ramener ces conditions si (a_n) converge vers 0 en décroissant ?
Faire le lien avec le critère spécial des séries alternées.
4. On suppose que $\sum u_n$ est une série complexe convergente.
Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge également.
5. Étudier la nature de $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
6. La technique de réécriture des sommes partielles de la question 1. s'appelle une *transformation d'Abel*. On l'appelle parfois *intégration par parties discrète*. Expliquez cette analogie.

Corrigé de l'exercice 31

1. Puisque $B_k = \sum_{i=0}^{k} b_i$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $b_k = B_k - B_{k-1}$ (avec la convention $B_{-1} = 0$) donc pour tous entiers $0 \leq n_0 \leq n$:
$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=n_0}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=n_0-1}^{n-1} a_{k+1}B_k$$
$$= \sum_{k=n_0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=n_0}^{n} a_{k+1}B_k - a_{n_0}B_{n_0-1} + a_{n+1}B_n = \sum_{k=n_0}^{n} (a_k - a_{k+1})B_k - a_{n_0}B_{n_0-1} + a_{n+1}B_n.$$
2. Par hypothèse, il existe $M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |B_n| \leq M$. Etudions les termes de l'expression précédente lorsque $n \to +\infty$:
   - $a_{n_0}B_{n_0-1}$ est une constante.
   - Puisque $a_n \to 0$ par hypothèse et $|a_{n+1}B_n| \leq M|a_{n+1}|$, on a $a_{n+1}B_n \to 0$.
   - Puisque $|(a_k - a_{k+1})B_k| \leq M|a_{k+1} - a_k|$ et que la série $\sum |a_{k+1} - a_k|$ converge par hypothèse, on en déduit que la série $\sum(a_k - a_{k+1})B_k$ est absolument convergente donc convergente.

   Par somme, on en déduit que $\sum_{k=n_0}^{n} a_k b_k$ a une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque $n \to +\infty$, donc la série $\sum a_n b_n$ converge.
3. Si (a_n) décroît vers 0, alors $a_{n+1} - a_n$ est de signe constant (négatif) donc la convergence absolue de $\sum(a_{n+1} - a_n)$ équivaut à la convergence de cette série téléscopique, donc à la convergence de la suite (a_n). Ainsi, par la question précédente on obtient le résultat suivant : si (B_n) est bornée et si (a_n) décroît vers 0, alors la série $\sum a_n b_n$ converge.
Enfin, le critère spécial des séries alternées est un cas particulier de ce résultat puisque la suite $b_n = (-1)^n$ a ses sommes partielles bornées (elles valent 1 ou 0), donc si (a_n) décroît vers 0, la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.
4. Puisque la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, alors la suite de ses sommes partielles (S_n) converge dans $\mathbb{C}$ donc est bornée. Vu que la suite $(1/n)_{n\geq 1}$ décroît vers 0, on obtient par la question précédente (appliquée avec $a_n = 1/n$ et $b_n = u_n$) la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$.

5. On applique ce qui précède avec $a_n = 1/n^\alpha$ (qui décroît vers 0 puisque $\alpha > 0$) et $b_n = \cos(n\theta)$, dont les sommes partielles (B_n) sont bornées : en effet, $e^{i\theta} \neq 1$ par hypothèse donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |B_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)\right| = \left|Re\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)\right| \leq \frac{|1-e^{i(n+1)\theta}|}{|1-e^{i\theta}|} \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}.$$

On en déduit d'après la question 3. que la série $\sum_{n\geq 1} a_n b_n = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ converge.

6. Analogie avec l'IPP : soit b une fonction continue, a une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle réel $[n_0, n]$. Alors on a

$$\int_{n_0}^{n} a(t)b(t)dt = a(n)B(n) - a(n_0)B(n_0) - \int_{n_0}^{n} a'(t)B(t)dt,$$

où B désigne une primitive de b.
La formule de la question 1. se réécrit :

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k b_k = a_{n+1}B_n - a_{n_0}B_{n_0-1} - \sum_{k=n_0}^{n} (a_{k+1} - a_k)B_k,$$

donc l'analogie est la suivante :

- les intégrales sont remplacées par des sommes ;
- la primitivation des fonctions est remplacée par le passage d'une suite (b_n) à ses sommes partielles : $(b_n) \to (B_n)$;
- la dérivation des fonctions est remplacée par l'opération $(a_n) \to (a_{n+1} - a_n)$;
- mais il y a un petit décalage d'indice dans le terme "entre crochets" !

Exercice 32 (Non interversion des sommations)**
Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.
Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p}$ (*on admettra que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$). Commenter le résultat.

Corrigé de l'exercice 32

Fixons $n \in \mathbb{N}$. La série à termes positifs $\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n^2-p^2} + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$ converge car $\frac{1}{n^2-p^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{p^2}$. De plus, par téléscopage, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = \frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n-p}\right) + \frac{1}{2n}\sum_{p=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p+n} - \frac{1}{p-n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) + \frac{1}{2n}\left(-1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{2n}\right),$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{4n^2}.$$

Par ailleurs, $\sum_{p=0}^{+\infty} a_{0,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{-1}{p^2} = -\frac{\pi^2}{6}$. Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{0,p} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2} = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{24} = -\frac{\pi^2}{8}.$$

Symétriquement, on a :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} -a_{p,n} = -\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,n} = -\left(-\frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Finalement, on a $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} \neq \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p}$, donc la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable (sinon, les deux procédés de sommation donneraient le même résultat d'après le théorème de Fubini pour les familles de nombres complexes).

Exercice 33 (Exemples de sommations par tranches)**
Étudier les séries de terme général

1) $u_n = \frac{1}{n}\cos\frac{2n\pi}{3}$;
2) $u_n = 1 - n^{1/p(n)}$, où $p(n)$ désigne le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n ;
3) $u_n = 1/n^\alpha$ si l'écriture décimale de n ne comporte pas de 1, $u_n = 0$ sinon.

Corrigé de l'exercice 33

1) On a $u_n = 1/n$ si n est multiple de 3, et $u_n = -1/(2n)$ sinon. Cela permet de réécrire les sommes partielles (S_n) en groupant les termes par trois : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{3n} = (u_1 + u_2 + u_3) + \cdots + (u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}) = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2(3k-2)} - \frac{1}{2(3k-1)} + \frac{1}{3k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{-9k+4}{6k(3k-1)(3k-2)}.$$

Puisque $\frac{-9k+4}{6k(3k-1)(3k-2)} \sim Cte/k^2$, cette série converge donc il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que $S_{3n} \to S$.
On en déduit que

$$S_{3n+1} = S_{3n} + u_{3n+1} \to S, \qquad S_{3n+2} = S_{3n+1} + u_{3n+2} \to S.$$

Ainsi, les trois suites extraites (S_{3n}), (S_{3n+1}) et (S_{3n+2}) convergent vers la même limite réelle S. Puisque les indices de ces trois suites extraites forment un recouvrement fini de $\mathbb{N}$, on en déduit que la suite (S_n) converge vers S, ce qui montre que la série $\sum u_n$ converge.

Remarque
En utilisant le développement asymptotique de la série harmonique, on peut obtenir la valeur de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. *En effet,*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

(où γ *est la constante d'Euler), donc*

$$S_{3n} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k}\right) + \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k} = -\frac{1}{2}H_{3n} + \frac{1}{2}H_n$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\ln(3n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma + o(1)\right) = -\frac{\ln(3)}{2} + o(1),$$

donc $S = \lim_{n\to+\infty} S_{3n} = -\frac{\ln(3)}{2}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 1 - e^{\ln(n)/p(n)}$. D'autre part, si $n \in [10^k, 10^{k+1}[$, alors

$$p(n) = k = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor.$$

On en déduit $\frac{\ln(n)}{\ln(10)} - 1 < p(n) \leq \frac{\ln(n)}{\ln(10)}$, donc $\frac{p(n)}{\ln(n)} \to \frac{1}{\ln(10)}$, puis $u_n \to 1 - e^{\ln(10)} = -9$. Ainsi, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

3) Vu que $u_n \geq 0$, on peut travailler dans $[0, +\infty]$: en notant

$$A = \{n \in \mathbb{N}^*,\ n \text{ ne comporte pas de 1 dans son écriture décimale}\},$$

on a en éliminant les termes nuls :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha}.$$

On peut alors sommer par paquets selon la partition $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k$, où A_k désigne l'ensemble des $n \in A$ qui comportent exactement k chiffres :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n \in A_k} \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

Puisque $|A_k| = 8 \times 9^{k-1}$ (multiplier le nombre de possibilités par chiffre) et $A_k \subset [\![10^{k-1}, 10^k]\!]$, on en déduit l'encadrement dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 8 \times 9^{k-1} (1/10^k)^\alpha \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{k=1}^{+\infty} 8 \times 9^{k-1} (1/10^{k-1})^\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\frac{8}{10^\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} (9/10^\alpha)^k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq 8 \sum_{k=0}^{+\infty} (9/10^\alpha)^k.$$

Ainsi, $\sum u_n$ converge ssi $\sum_{k=0}^{+\infty} (9/10^\alpha)^k < +\infty$, ce qui équivaut à $9 < 10^\alpha$, ou encore à $\alpha > \frac{\ln(9)}{\ln(10)}$.

Exercice 34 (*Utilisation d'un produit de Cauchy)
Soit $a \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} na^n$ (après avoir justifié la convergence !) à l'aide d'un produit de Cauchy.

Corrigé de l'exercice 34
La série $\sum_{n \geq 0} a^n$ est absolument convergente (car $|a| < 1$), donc le produit de Cauchy de cette série par elle-même converge absolument. Or, ce produit de Cauchy est la série :

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a^k a^{n-k} \right) = \sum_{n \geq 0} (n+1) a^n = \sum_{n \geq 1} n a^{n-1},$$

donc la série $\sum_{n \geq 1} n a^{n-1}$ converge absolument et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \right)^2 = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

En multipliant par a, on obtient que $\sum_{n \geq 1} n a^n$ converge absolument et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a^n = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

Exercice 35 (Des exemples de produits de Cauchy)**

1. Montrer que le produit de Cauchy de la série semi-convergente $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même est une série divergente.
2. Montrer que le produit de Cauchy de la série semi-convergente $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ par elle-même est une série convergente.

Corrigé de l'exercice 35

1. Le produit de Cauchy de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ par elle-même est la série

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}} \times \frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k+1}}\right) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}},$$

et cette série est grossièrement divergente car

$$\left|(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = 1.$$

2. Le produit de Cauchy de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ par elle-même est la série

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \times \frac{(-1)^{n-k+1}}{n-k+1}\right) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n,$$

avec $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{1}{n+2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.
Montrons alors que (a_n) vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. On a :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+3}\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = -\frac{1}{(n+2)(n+3)}\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leq 0,$$

donc (a_n) est décroissante. De plus $a_n \sim \frac{\ln(n+1)}{n+2}$, donc (a_n) tend vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, le produit de Cauchy $\sum(-1)^n a_n$ est donc une série convergente.

Exercice 36 (**)
Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$.

1) Quelle est la nature des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$?
2) Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ est divergente, en étudiant $(S_{2n} - S_n)$, où (S_n) est la suite des sommes partielles associée.

Corrigé de l'exercice 36

1. Puisque $(1/n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de réels positifs, on peut réindexer les termes sans changer la somme. Dans $[0, +\infty]$, on a donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma(n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

ce qui montre que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$ converge. De même, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = +\infty,$$

donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ diverge.

2. Pour tout $n \geq 1$, on a
$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k).$$
Or, $\sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k)$ est la somme de n entiers naturels non nuls distincts, donc
$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{4n^2}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)}{8n^2} \to \frac{1}{8},$$
ce qui montre que la suite (S_n) diverge (sinon $S_{2n} - S_n \to 0$), donc la série étudiée diverge.

Exercice 37 (*Règle de la loupe)**
Soit (u_n) une suite de réels positifs décroissante.
1. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum 2^n u_{2^n}$ est convergente (**règle de la loupe**).
2. Retrouver que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ convergent si et seulement si $p > 1$.

Corrigé de l'exercice 37

1. Puisque la suite (u_n) est positive, on peut sommer par paquets dans $[0, +\infty]$:
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n\in A_k} u_n \right),$$
où $A_k = [\![2^k, 2^{k+1} - 1]\!]$ (puisqu'on a la réunion disjointe $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \mathbb{N}^*$). Par décroissance de la suite (u_n), on peut encadrer :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |A_k| u_{2^{k+1}} \leq \sum_{n\in A_k} u_n \leq |A_k| u_{2^k},$$
donc (puisque $|A_k| = 2^k$ pour tout k) :
$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k u_{2^k} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k u_{2^k}.$$
On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n < +\infty \iff \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k u_{2^k} < +\infty$, ce qui montre l'équivalence voulue.

Remarque
On peut faire cet exercice sans sommabilité, en se contentant de travailler avec des sommes partielles, mais c'est plus technique.

2. En appliquant ce qui précède, la série positive $\sum 1/n^p$ est de même nature que la série géométrique $\sum (2^{1-p})^n$, donc elle converge ssi $2^{1-p} < 1$, ce qui équivaut à $p > 1$.
En itérant ce principe, la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n \ln^p(n)}$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{(n \ln(2))^p}$, donc elle converge ssi $p > 1$.

Exercice 38 (*Théorème de Cauchy-Mertens)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes telles que $\sum u_n$ converge absolument et $\sum v_n$ converge. Montrer que le produit de Cauchy de ces deux séries converge vers $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.
Il n'est donc pas nécessaire que les deux séries soient absolument convergentes pour que leur produit de Cauchy converge !

Corrigé de l'exercice 38
Le produit de Cauchy est la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.
Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k, \qquad W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k.$$

Par hypothèse (et puisque la convergence absolue d'une série entraîne sa convergence), il existe $U, V \in \mathbb{C}$ tels que $U_n \to U$ et $V_n \to V$. Montrons alors que $W_n \to UV$. Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} u_j v_{k-j} \right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} u_j v_{k-j} \right) = \sum_{j=0}^{n} u_j V_{n-j}.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et majorons l'écart $|W_n - UV|$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|W_n - UV| \leq \left| \sum_{j=0}^{n} u_j V_{n-j} - U_n V \right| + |U_n V - UV|$$

$$= \left| \sum_{j=0}^{n} u_j (V_{n-j} - V) \right| + |U_n - U| \times |V| = \left| \sum_{j=0}^{n} u_{n-j} (V_j - V) \right| + |U_n - U| \times |V|.$$

On sépare alors la somme en deux : les termes de "grand" indice j (dans lesquels $|V_j - V|$ est petit), et les autres.
Puisque $V_j \to V$, il existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(j \geq j_0 \implies |V_j - V| \leq \varepsilon)$. On a donc pour $n \geq j_0$:

$$|W_n - UV| \leq \sum_{j=0}^{j_0 - 1} |u_{n-j}||V_j - V| + \varepsilon \sum_{j=j_0}^{n} |u_{n-j}| + |U_n - U| \times |V|.$$

En posant $M = \max_{0 \leq j \leq j_0 - 1} |V_j - V|$, on a donc

$$\forall n \geq j_0, \qquad |W_n - UV| \leq M \sum_{j=0}^{j_0 - 1} |u_{n-j}| + \varepsilon \sum_{j=j_0}^{n} |u_{n-j}| + |U_n - U| \times |V|$$

$$= M \sum_{k=n-j_0+1}^{n} |u_k| + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-j_0} |u_k| + |U_n - U| \times |V|.$$

Le premier de ces trois termes tend vers 0 quand $n \to +\infty$ car

$$0 \leq \sum_{k=n-j_0+1}^{n} |u_k| \leq \sum_{k=n-j_0+1}^{+\infty} |u_k| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

(reste de série convergente).
Le deuxième terme est majoré par $\varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$.
Le troisième terme tend aussi vers 0, puisque $U_n \to U$.
Donc il existe un entier $n_0 \geq j_0$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \qquad |W_n - UV| \leq M\varepsilon + \varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| + \varepsilon |V| = K\varepsilon,$$

en posant $K = M + \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| + |V|$, ce qui montre le résultat.