

## Exercices du CH01 : Séries et sommabilité

**Exercices de la banque INP à étudier :** ex 5 (séries de Bertrand), 6 (d'Alembert), 7 (critère des équivalents), 46 (utilisation de DL), 55 (suites récurrentes doubles),

**Niveaux de difficulté des exercices de TD :**

(\*) : Exercice simple, en général de l'application directe du cours.

(\*\*) : Exercice de niveau intermédiaire.

(\*\*\*) : Exercice difficile, demandant de l'initiative.

### I Feuille 24 MP2I, "Sommatons"

#### Exercice 1 (\*)

Nature et somme des séries de terme général :

- |                                                                       |                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$                                       | 5) $\ln \left( \frac{n^2+3n+2}{n^2+3n} \right)$                         |
| 2) $(-1)^n \int_0^1 t^n dt$                                           | 6) $\arctan \frac{1}{n^2+n+1}$<br>(étudier $\arctan(n+1) - \arctan n$ ) |
| 3) $\frac{n+1}{2^n}$                                                  |                                                                         |
| 4) $\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$ |                                                                         |

#### Corrigé de l'exercice 1

On note  $u_n$  le terme général de la série étudiée dans chaque cas.

1. On procède par télescopage. Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^N 2 \ln(n+1) - \sum_{n=1}^N \ln(n) - \sum_{n=1}^N \ln(n+2),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^N u_n = 2 \sum_{n=2}^{N+1} \ln(n) - \sum_{n=1}^N \ln(n) - \sum_{n=3}^{N+2} \ln(n) = \ln(2) + \ln(N+1) - \ln(N+2) = \ln(2) + \ln \left( \frac{N+1}{N+2} \right) \xrightarrow{+\infty} \ln(2),$$

ce qui montre que  $\sum u_n$  converge et  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2)$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (-1)^n \int_0^1 t^n dt$ , donc par linéarité de l'intégrale

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-t)^k dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t)^k dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

(puisque la raison de la somme géométrique est  $-t \neq 1$  lorsque  $t \in [0, 1]$ ). Donc (toujours par linéarité de l'intégrale) :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt = \ln(2) + R_n,$$

avec  $|R_n| \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2}$  (par croissance de l'intégrale), et donc  $R_n \rightarrow 0$ , ce qui montre que la série  $\sum u_n$  converge et  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \ln(2)$ .

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{n+1}{2^n}$ . Ici, le calcul des sommes partielles est plus astucieux. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère le polynôme de variable réelle  $x$  :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n (k+1)x^k = \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1}.$$

Il s'agit de la dérivée du polynôme  $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} x^k$ .

Or, pour tout réel  $x \neq 1$ , on a  $Q_n(x) = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$ , donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad P_n(x) = Q'_n(x) = \frac{-(n+2)x^{n+1}(1-x) + (1-x^{n+2})}{(1-x)^2}.$$

Pour  $|x| < 1$ , on a  $x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $nx^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  (par croissances comparées) donc en faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$  dans la relation précédente, on obtient que la série  $\sum (k+1)x^k$  converge et

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On conclut en évaluant en  $x = 1/2$  :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^k} = 4.$$

4. Encore du télescopage :

$$\begin{aligned} \forall N \geq 2, \quad \sum_{n=2}^N \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^N \frac{2}{\sqrt{n}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N+1}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Donc la série étudiée converge et  $\sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

5. Toujours du télescopage :

$$\begin{aligned} \forall N \geq 1, \quad \sum_{n=1}^N \ln \left( \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n} \right) &= \sum_{n=1}^N \ln \left( \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N (\ln(n+1) - \ln(n)) + \sum_{n=1}^N (\ln(n+2) - \ln(n+3)) = \ln(N+1) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(N+3) \\ &= \ln(3) + \ln \left( \frac{N+1}{N+3} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln(3). \end{aligned}$$

Donc la série étudiée converge et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n} \right) = \ln(3)$ .

6. On a en fait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \arctan(n+1) - \arctan(n) = \arctan \left( \frac{1}{n^2 + n + 1} \right).$$

Pour le voir, on calcule la tangente de ces deux angles : en notant  $\theta = \arctan(n+1)$  et  $\varphi = \arctan(n)$ , on a  $0 \leq \varphi < \theta < \pi/2$ , et

$$\tan(\theta - \varphi) = \frac{\tan(\theta) - \tan(\varphi)}{1 + \tan(\theta)\tan(\varphi)} = \frac{n+1 - n}{1 + (n+1)n} = \frac{1}{n^2 + n + 1}.$$

Puisque  $\theta - \varphi \in ]-\pi/2, \pi/2[$ , on a alors

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = \theta - \varphi = \arctan(\tan(\theta - \varphi)) = \arctan \left( \frac{1}{n^2 + n + 1} \right).$$

On conclut alors par ... télescopage !

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^N \arctan \left( \frac{1}{n^2 + n + 1} \right) = \sum_{n=0}^N (\arctan(n+1) - \arctan(n)) = \arctan(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \pi/2.$$

Donc la série étudiée converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan \left( \frac{1}{n^2 + n + 1} \right) = \pi/2$ .

**Exercice 2 (\*\*)**

Nature des séries de terme général :

- |                                                                       |                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\frac{n!}{n^n}$                                                   | 12) $\frac{a^n n^n}{n! n^b}, b \in \mathbb{R}, a > 0, (a, b) \neq (1/e, 1/2)$       |
| 2) $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$        | 13) $(\pi/2)^{3/5} - (\arctan n)^{3/5}$                                             |
| 3) $\frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$                                       | 14) $u_{2n} = \prod_{k=2}^n \frac{\ln k}{k}, u_{2n+1} = 0$                          |
| 4) $\tan(1/n^2) \cdot \ln\left(\frac{n^2 + \sqrt{n}}{n^2 - n}\right)$ | 15) $(\operatorname{ch} \sqrt{\ln n})^{-2}$                                         |
| 5) $\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$               | 16) $\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$                                   |
| 6) $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1}$                          | 17) $\frac{n^{kn}}{(nk)!}, k \in \mathbb{N}$                                        |
| 7) $\frac{n^2}{2^n + n}$                                              | 18) $\sqrt[3]{n^3 - 4n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + an + b},$<br>$(a, b) \in \mathbb{R}^2$ |
| 8) $\frac{(\ln n)^n}{n!}$                                             | 19) $(n \sin \frac{1}{n})^{n^2} - e^{-1/6}$                                         |
| 9) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1$                             | 20) $\frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}$                                           |
| 10) $\frac{1}{n}$ si $n$ est un carré, $\frac{1}{n^2}$ sinon          |                                                                                     |
| 11) $\int_n^{n+1/2} \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$                      |                                                                                     |

**Corrigé de l'exercice 2**On note  $u_n$  le terme général de la série étudiée dans chacun des cas.

1. Pour tout
- $n \in \mathbb{N}$
- ,
- $u_n = \frac{n!}{n^n} > 0$
- et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-n \ln(1+1/n)} = e^{-n(1/n + o(1/n))} \rightarrow e^{-1} < 1,$$

(en faisant un  $DL$ ), donc la série  $\sum u_n$  converge (par la règle de d'Alembert).

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$ , donc  $\sum u_n$  diverge (puisque  $\sum \frac{1}{n}$  diverge).
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)} = \frac{\ln(n)}{n + \ln(1 - e^{-n})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} \geq 0$ , donc  $\sum u_n$  et  $\sum \frac{\ln(n)}{n}$  sont de même nature.

Pour étudier la nature de  $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ , on utilise une comparaison série-intégrale : la fonction  $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$  est continue et décroissante sur  $[e, +\infty[$  (car dérivable et  $f'(t) = \frac{1 - \ln(t)}{t^2} \leq 0$  pour  $t \geq e \simeq 2,718$ ), d'où

$$\forall k \geq 4, \quad \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

En sommant, on obtient :

$$\forall n \geq 4, \quad \sum_{k=4}^n \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=4}^n f(k) \leq \sum_{k=4}^n \int_{k-1}^k f(t) dt,$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq 4, \quad \int_4^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \sum_{k=4}^n u_k \leq \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt,$$

ce qui donne la minoration

$$\forall n \geq 4, \quad \sum_{k=4}^n f(k) \geq \frac{1}{2} (\ln(n+1)^2 - \ln(4)^2) \xrightarrow{+\infty} +\infty,$$

donc finalement,  $\sum u_n$  diverge.

4. Pour tout
- $n \geq 2$
- ,
- $u_n = \tan(1/n^2) \ln\left(\frac{n^2 + \sqrt{n}}{n^2 - n}\right) = \tan(1/n^2) \times (\ln(1 + 1/n^{3/2}) - \ln(1 - 1/n))$
- .

Vu que  $\tan(x) = x + o(x)$  et  $\ln(1+x) = x + o(x)$  lorsque  $x \rightarrow 0$ , on en déduit

$$u_n = (1/n^2 + o(1/n^2)) \times (1/n + o(1/n)) \sim 1/n^3 > 0.$$

Par comparaison de séries à termes de signe constant, on en déduit que  $\sum u_n$  et  $\sum 1/n^3$  ont même nature, donc  $\sum u_n$  converge.

5. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$ , donc

$$u_n = e^{-\sqrt{n} \ln(1+n^{-1/3})} = e^{-\sqrt{n}(n^{-1/3} - \frac{1}{2}n^{-2/3} + o(n^{-2/3}))} = e^{-n^{1/6}} \times \underbrace{e^{-\frac{1}{2}n^{-1/6} + o(n^{-1/6})}}_{\rightarrow 1},$$

ce qui entraîne  $u_n \underset{+\infty}{\sim} e^{-n^{1/6}} > 0$ , donc  $\sum u_n$  a même nature que  $\sum e^{-n^{1/6}}$ .

Pour étudier la nature de  $\sum e^{-n^{1/6}}$ , on compare à une série de Riemann :  $e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1/x^\alpha)$  donc avec  $\alpha = 12$  (par exemple), on obtient que  $e^{-n^{1/6}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , ce qui montre que  $\sum u_n$  converge.

6. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1} = \frac{2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + n - 1}} \\ &= \frac{2}{n\left(\sqrt{1 + 1/n + 1/n^2} + \sqrt{1 + 1/n - 1/n^2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0, \end{aligned}$$

donc  $\sum u_n$  diverge (comme  $\sum 1/n$ ).

7. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{n^2}{2^n + n} \sim \frac{n^2}{2^n} > 0$  et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} \underset{+\infty}{\rightarrow} \frac{1}{2} < 1,$$

donc  $\sum u_n$  converge d'après la règle de d'Alembert.

8. Pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n = \frac{(\ln n)^n}{n!} > 0$  et

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(\ln(n+1))^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(\ln n)^n} = \frac{(\ln(n) + \ln(1 + 1/n))^{n+1}}{(n+1) \times (\ln n)^n} \\ &= \frac{\ln(n) + \ln(1 + 1/n)}{n+1} \times \left(1 + \frac{\ln(1 + 1/n)}{\ln(n)}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} \times \left(1 + \frac{\ln(1 + 1/n)}{\ln(n)}\right)^n. \end{aligned}$$

Or, en effectuant un DL :

$$\left(1 + \frac{\ln(1 + 1/n)}{\ln(n)}\right)^n = e^{-n \ln\left(1 + \frac{\ln(1 + 1/n)}{\ln(n)}\right)} = e^{-(\frac{1}{\ln(n)} + o(\frac{1}{\ln(n)}))} \underset{+\infty}{\rightarrow} 1,$$

donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0$ . Puisque cette limite est strictement inférieure à 1, on en déduit que  $\sum u_n$  converge par la règle de d'Alembert.

**Variante :** soit  $\alpha > 0$ . Pour  $n$  assez grand, on a  $0 < \ln(n) \leq n^\alpha$ , donc  $0 < u_n \leq \frac{n^{\alpha n}}{n!} = v_n$ , et on applique la règle de d'Alembert sur  $v_n$  (plus simple) :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^{\alpha n + \alpha}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^{\alpha n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha n} \times (n+1)^{\alpha-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\alpha n^{\alpha-1}$$

(faire encore un DL). En choisissant  $0 < \alpha < 1$ , on obtient que  $\frac{v_{n+1}}{v_n} \rightarrow 0$ , donc  $\sum v_n$  converge et par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum u_n$  converge.

9. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1 = e^{n \ln(1 + 1/n^2)} - 1 = e^{1/n + o(1/n)} - 1 \sim \frac{1}{n},$$

donc  $\sum u_n$  diverge.

10. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = 1/n$  si  $n$  est un carré, et  $u_n = 1/n^2$  sinon. La suite  $(S_n)$  définie par  $S_n = u_1 + \dots + u_n$ , est strictement croissante (puisque  $u_k > 0$  pour tout  $k$ ), donc elle converge ou bien tend vers  $+\infty$ . Etudions une suite extraite :

$$\begin{aligned} S_{n^2} &= \sum_{j=1}^{n^2} u_j = \sum_{k=1}^n u_{k^2} + \sum_{j \in [1, n^2] \setminus \{1^2, 2^2, \dots, n^2\}} u_j \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{j \in [1, n^2] \setminus \{1^2, 2^2, \dots, n^2\}} \frac{1}{j^2}, \end{aligned}$$

donc

$$S_{n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{j^2} \leq 2 \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{j^2} \leq 2 \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} < +\infty.$$

Ainsi, la suite extraite  $(S_{n^2})$  est majorée par  $2\zeta(2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2}{j^2}$  (au passage  $\zeta(2) = \pi^2/6$ ), et par croissance de  $(S_n)$  :

$$S_n \leq S_{n^2} \leq 2\zeta(2),$$

donc  $(S_n)$  est-elle même majorée. On en déduit que  $(S_n)$  converge, donc la série  $\sum u_n$  converge.

### Remarque

On peut être plus précis et calculer la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  : en reprenant le calcul précédent,

$$S_{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{j^2} - \sum_{j \in \{1^2, \dots, n^2\}} \frac{1}{j^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{j^2} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\zeta(2) - \zeta(4),$$

où  $\zeta(2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \pi^2/6$  et  $\zeta(4) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^4} = \pi^4/90$ . Donc finalement (puisque on sait que  $(S_n)$  converge) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n^2} = \pi^2/3 - \pi^4/90.$$

11. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \int_n^{n+1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$  (intégrale bien définie car la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc a fortiori sur tout segment  $[n, n+1/2]$ ). Par croissance de l'intégrale, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \int_n^{n+1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1/2} = \frac{1}{n(2n+1)} \leq \frac{1}{2n^2},$$

donc par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum u_n$  converge.

12. On a ici  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $(a, b) \neq (1/e, 1/2)$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{a^n n^n}{n! n^b} > 0$ . Donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!(n+1)^b} \times \frac{n! n^b}{a^n n^n} = a(1+1/n)^{n-b} \underset{+\infty}{\sim} a(1+1/n)^n \underset{+\infty}{\sim} ae.$$

La règle de d'Alembert permet alors de conclure que la série  $\sum u_n$  converge si  $0 < a < 1/e$  et diverge si  $a > 1/e$ .

Reste à traiter le cas  $a = 1/e$ , où la règle de d'Alembert est insuffisante. On peut être plus précis en utilisant la *méthode de Raabe-Duhamel*, basée le DL à deux termes :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} e^{(n-b) \ln(1+1/n)} = e^{-1+(n-b)(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(1/n^3))} = e^{-\frac{b+1/2}{n} + O(1/n^2)}$$

c'est-à-dire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{b+1/2}{n} + O(1/n^2).$$

L'idée est de comparer  $u_n$  à une suite de Riemann  $1/n^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  bien choisi. Pour cela on travaille sur le rapport

$$v_n = \frac{u_n}{1/n^\alpha} = n^\alpha u_n.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= (1 + 1/n)^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{\alpha}{n} + O(1/n^2)\right) \times \left(1 - \frac{b + 1/2}{n} + O(1/n^2)\right) \\ &= 1 + \frac{\alpha - b - 1/2}{n} + O(1/n^2).\end{aligned}$$

On en déduit la monotonie de  $(v_n)$  à partir d'un certain rang suivant le signe de  $\alpha - b - 1/2$ . Par hypothèse on a  $b \neq 1/2$ , donc deux cas se présentent :

- si  $b > 1/2$ , alors  $b + 1/2 > 1$ , donc on peut choisir  $\alpha$  tel que  $1 < \alpha < b + 1/2$ . Dans ce cas, on a à partir d'un certain rang  $n_0$  l'inégalité  $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ , donc  $(v_n)_{n \geq n_0}$  décroît. On en déduit que  $(v_n)$  est bornée, et donc  $u_n = O(1/n^\alpha)$  avec  $\alpha > 1$ , ce qui montre que  $\sum u_n$  converge.
- si  $b < 1/2$ , alors on peut choisir de même  $\alpha$  tel que  $b + 1/2 < \alpha < 1$ , et dans ce cas, on a  $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$  à partir d'un certain rang  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ , donc  $(v_n)_{n \geq n_0}$  croît, ce qui amène l'inégalité :

$$\forall n \geq n_0, \quad n^\alpha u_n \geq n_0^\alpha u_{n_0} > 0.$$

D'où  $1/n^\alpha = O(u_n)$  avec  $\alpha < 1$ , ce qui montre que  $\sum u_n$  diverge.

**Variante** : pour étudier la suite  $v_n$ , on peut aussi considérer la série télescopique

$$\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \sum \ln(v_{n+1}/v_n).$$

D'après les calculs précédents :

$$\ln(v_{n+1}/v_n) = \ln\left(1 + \frac{\alpha - b - 1/2}{n} + O(1/n^2)\right) = \frac{\alpha - b - 1/2}{n} + O(1/n^2).$$

En choisissant  $\alpha = b + 1/2$ , on a alors  $\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$  converge, donc par le lien suite-série, il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $\ln(v_n) \rightarrow \ell$ . Par continuité de la fonction exp, on en déduit que  $v_n \rightarrow e^\ell > 0$ , et donc  $u_n \sim \frac{e^\ell}{n^{b+1/2}}$  ce qui donne un équivalent de  $u_n$  et permet de conclure que  $\sum u_n$  converge ssi  $b > 1/2$ .

**Remarque** • Cette dernière méthode est meilleure car elle inclut le cas  $b = 1/2$ , qui n'était pas envisagé dans l'énoncé.

- Cet exercice est trivial avec la formule de Stirling :  $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ , donc

$$u_n = \frac{a^n n^n}{n! n^b} \sim \frac{(ae)^n}{\sqrt{2\pi} n^{b+1/2}},$$

et on conclut facilement par comparaison de SATP.

13. Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (\pi/2)^{3/5} - (\arctan n)^{3/5}$ . En posant  $x_n = \pi/2 - \arctan n$ , on a  $x_n \rightarrow 0^+$  et

$$u_n = (\pi/2)^{3/5} - (\pi/2 - x_n)^{3/5} = (\pi/2)^{3/5} \times \left(1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} x_n\right)^{3/5}\right),$$

donc

$$u_n = (\pi/2)^{3/5} \times \left(\frac{6}{5\pi} x_n + o(x_n)\right) \underset{+\infty}{\sim} C x_n.$$

(avec  $C > 0$ ). Mais on a aussi  $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$  pour tout réel  $x > 0$  donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n = \arctan(1/n)$ . On en déduit que  $u_n \sim \frac{C}{n}$ , et donc  $\sum u_n$  diverge.

14. Pour  $n \geq 2$ , on a  $u_{2n} = \prod_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{k}$  et  $u_{2n+1} = 0$ . Donc, en notant  $(S_n)_{n \geq 2}$  la suite des sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n} = S_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^n u_{2k} = \sum_{k=1}^n v_k,$$

en notant  $v_k = u_{2k}$  (puisque les termes d'indices impairs sont nuls). On peut alors utiliser la règle de d'Alembert :  $v_k > 0$  et

$$\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{u_{2k+2}}{u_{2k}} = \frac{\ln(k+1)}{k+1} \xrightarrow{+\infty} 0 < 1,$$

donc  $\sum v_k$  converge. Ainsi, les suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  convergent vers la même limite réelle, donc  $(S_n)$  converge, ce qui montre que  $\sum u_n$  converge.

15. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = (\operatorname{ch}(\sqrt{\ln n}))^{-2} = \frac{4}{(e^{\sqrt{\ln n}} + e^{-\sqrt{\ln n}})^2} \sim \frac{4}{e^{2\sqrt{\ln n}}} > 0.$$

On procède alors par comparaison à une série de Riemann : pour  $n$  assez grand, on a  $2\sqrt{\ln(n)} \leq \ln(n)$ , donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \implies \frac{4}{e^{2\sqrt{\ln n}}} \geq \frac{4}{e^{\ln(n)}} = \frac{4}{n}.$$

Ainsi, par comparaison de SATP,  $\sum \frac{4}{e^{2\sqrt{\ln n}}}$  diverge et donc  $\sum u_n$  diverge.

16. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2} < 0$ , donc par comparaison de séries à termes de signe constant, la série  $\sum u_n$  converge (comme  $\sum 1/n^2$ ).
17. On fixe un paramètre  $k \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{n^{kn}}{(nk)!} > 0$  et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{kn+k}}{(nk+k)!} \times \frac{(nk)!}{n^{kn}} = (1+1/n)^{kn} \times \frac{(n+1)^k}{(nk+k)(nk+k-1)\cdots(nk+1)},$$

si  $k > 0$ .

Le dénominateur comporte  $k$  facteurs (indépendant de  $n$ ), donc on a l'équivalent  $(nk+k)(nk+k-1)\cdots(nk+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (nk)^k$ , si bien que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{nk \ln(1+1/n)} k^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^k / k^k.$$

Ainsi,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0 < 1$  donc par la règle de d'Alembert,  $\sum u_n$  converge si  $k > 0$ .

Enfin, si  $k = 0$ ,  $u_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  donc  $\sum u_n$  diverge.

18. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On pose

$$u_n = \sqrt[3]{n^3 - 4n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + an + b}.$$

Cette quantité est bien définie à partir d'un certain rang, car  $n^2 + an + b \sim n^2 > 0$ , donc  $n^2 + an + b > 0$  pour  $n$  assez grand. De plus, on a le DL :

$$\begin{aligned} u_n &= n \left( \left( 1 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2} \right)^{1/3} - \left( 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} \right)^{1/2} \right) \\ &= n \left( \left( 1 + \frac{1}{3} \left( -\frac{4}{n} + \frac{5}{n^2} \right) - \frac{1}{9} \left( \frac{16}{n^2} \right) + O(1/n^3) \right) - \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{a^2}{n^2} \right) + O(1/n^3) \right) \right) \\ &= - \left( \frac{4}{3} + \frac{a}{2} \right) + \left( -\frac{1}{9} - \frac{b}{2} + \frac{a^2}{8} \right) \frac{1}{n} + O(1/n^2). \end{aligned}$$

Si  $\frac{4}{3} + \frac{a}{2} \neq 0$ , alors  $u_n$  ne tend pas vers 0, donc  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

Si  $\frac{4}{3} + \frac{a}{2} = 0$ , alors deux sous-cas :

- si  $-\frac{1}{9} - \frac{b}{2} + \frac{a^2}{8} = C \neq 0$ , alors  $u_n \sim C/n$  et donc  $\sum u_n$  diverge.

- si  $-\frac{1}{9} - \frac{b}{2} + \frac{a^2}{8} = 0$ , alors  $u_n = O(1/n^2)$ , donc  $\sum u_n$  converge.

En conclusion,  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $(a, b) = (-8/3, 14/9)$ .

19. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} u_n &= (n \sin(1/n))^{n^2} - e^{-1/6} = e^{n^2 \ln(1 - \frac{1}{6n^2} + O(1/n^4))} - e^{-1/6} \\ &= e^{-1/6 + O(1/n^2)} - e^{-1/6} = e^{-1/6} (e^{O(1/n^2)} - 1) = O(1/n^2), \end{aligned}$$

donc  $\sum u_n$  converge.

20. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$0 < u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!} = \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \dots + \frac{1}{n!}}{(n+p)(n+p-1) \dots (n+1)} \leq \frac{2}{n^p}$$

si  $p > 0$  (car le numérateur est inférieur à  $1 + (n-1) * (1/n) < 2$  et le dénominateur comporte  $p$  facteurs tous supérieurs à  $n$ ). Cette majoration montre donc que ( $p \geq 2 \implies \sum u_n$  converge).

Reste à traiter les cas  $p = 1$  et  $p = 0$  (pour lesquels la majoration précédente ne donne rien).

- si  $p = 1$ , alors  $u_n = \frac{1!+2!+\dots+n!}{(n+1)!} \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ , donc  $\sum u_n$  diverge.

- si  $p = 0$ , alors  $u_n = \frac{1!+2!+\dots+n!}{n!} \geq 1$ , donc  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

Finalement,  $\sum u_n$  converge ssi  $p \geq 2$ .

### Exercice 3 (\*\*)

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ . Montrer que  $\sum u_n$ ,  $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ ,  $\sum \ln(1+u_n)$  et  $\sum \int_0^{u_n} \frac{1}{1+x^e} dx$  sont de même nature.

### Corrigé de l'exercice 3

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ . Deux cas se présentent :

- si  $u_n \rightarrow 0$ , alors

$$\frac{u_n}{1+u_n} \sim u_n \sim \ln(1+u_n),$$

De plus, par croissance de l'intégrale et décroissance de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x^e}$  sur  $[0, +\infty[$ , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{u_n}{1+u_n^e} \leq \int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e} \leq u_n,$$

d'où

$$\int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e} \sim u_n$$

(puisque  $\frac{1}{1+u_n^e} \rightarrow 1$ ).

On conclut par comparaison de SATP que  $\sum u_n$ ,  $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ ,  $\sum \ln(1+u_n)$  et  $\sum \int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e}$  sont de même nature.

- si  $(u_n)$  ne tend pas vers zéro, alors  $\ln(1+u_n)$  non plus (sinon par continuité de  $\exp$  on aurait  $1+u_n \rightarrow e^0 = 1$ , c'est-à-dire  $u_n \rightarrow 0$ ),  $x_n = \frac{u_n}{1+u_n}$  non plus (car  $u_n(1-x_n) = x_n$ , donc  $x_n \rightarrow 0 \implies u_n \rightarrow 0$ ), ce qui montre que  $\sum u_n$ ,  $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$  et  $\sum \ln(1+u_n)$  sont grossièrement divergentes.

Enfin, la dernière série  $\sum \int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e}$  est également grossièrement divergente. En effet, on a par hypothèse :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, \quad u_n > \varepsilon_0,$$

ce qui permet de construire une suite extraite  $(u_{\varphi(n)})$  minorée par  $\varepsilon_0$ , et on a l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{u_{\varphi(n)}} \frac{dx}{1+x^e} \geq \int_0^{\varepsilon_0} \frac{dx}{1+x^e} = C > 0,$$

qui empêche  $\int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e}$  de tendre vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Dans ce second cas les quatre séries étudiées sont (grossièrement) divergentes, donc de même nature également.

**Exercice 4 (\*\*Comparaisons entre sommes partielles et restes de deux SATP)**

1. Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs telles que  $u_n \sim v_n$ . Montrer que si une des deux séries converge (resp. diverge), alors elles convergent (resp. divergent) toutes deux et leurs restes (resp. sommes partielles) sont équivalent(e)s.
2. Soit  $u_0 > 0$ , et  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$  pour  $n \geq 0$ . Étudier  $\sum 1/u_n$ , et donner un équivalent de  $\sum_{k=1}^n 1/u_k$ .

**Corrigé de l'exercice 4**

1. C'est un théorème du cours de MPI ("sommatation des relations de comparaison"), voir le chapitre 1.
2. On a  $u_0 > 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On montre facilement par récurrence que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}^2 - u_n^2 = 1,$$

donc en sommant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 = u_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = u_0^2 + n,$$

ce qui prouve que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{u_0^2 + n} \sim \sqrt{n}.$$

Ainsi,  $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$  et par comparaison de SATP, la série  $\sum 1/u_n$  diverge.

Par la question 1., on en déduit

$$\sum_{k=1}^n 1/u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}},$$

et on termine avec une comparaison série-intégrale pour déterminer un équivalent simple de cette dernière somme partielle : par continuité et décroissance de  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  sur  $]0, +\infty[$ , on a

$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

d'où en sommant :

$$\forall n \geq 2, \quad \int_2^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

ce qui donne en ajoutant 1 :

$$\forall n \geq 2, \quad 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 2 + 1.$$

Finalement,  $\sum_{k=1}^n 1/u_k \sim 2\sqrt{n}$ .

**Exercice 5 (\*\*Wallis et Stirling)**

1. Montrer que  $(u_n) = \left( \frac{n! \exp(n)}{n^n \sqrt{n}} \right)$  converge vers une limite  $L > 0$  (étudier la série télescopique associée à  $(\ln(u_n))$ ). Le calcul de  $L$  donne un équivalent de  $n!$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit les **intégrales de Wallis** :  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$ .  
Montrer :  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ ,  $I_{2p+1}/I_{2p-1} \leq I_{2p}/I_{2p-1} \leq 1$ , enfin :  $\lim_{p \rightarrow +\infty} I_{2p}/I_{2p-1} = 1$ .  
Calculer explicitement  $I_{2p}$  et  $I_{2p+1}$ , montrer que  $nI_n I_{n-1} = \pi/2$  et enfin :  $I_n \sim \sqrt{\pi/(2n)}$ .  
En déduire la **formule de Stirling** :  $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ .

**Corrigé de l'exercice 5**

- **Existence de  $L$**  : en notant, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} > 0$ , on a

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(u_{n+1}/u_n) = \ln\left(e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1/2}\right) = 1 - (n+1/2)\ln(1+1/n),$$

donc en faisant un  $DL$  :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(1/n^3)\right) = O(1/n^2),$$

ce qui montre que la série télescopique  $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$  converge, et donc la suite  $(\ln(u_n))$  converge vers un réel  $\ell$ . Par continuité de  $\exp$ , on a donc  $u_n \rightarrow e^\ell = L > 0$ , ce qui montre :

$$n! \sim Ln^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

- **Calcul de  $L$**  : considérons les intégrales de Wallis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$$

(la seconde égalité s'obtient avec le changement de variable  $u = \pi/2 - t$ ).

- \* **Relation de récurrence** : à l'aide d'une IPP, on obtient, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(t) \sin^{n+1}(t) dt = [-\cos(t) \sin^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) (n+1) \sin^n(t) dt,$$

c'est-à-dire

$$I_{n+2} = 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t)) \sin^n(t) dt = (n+1)(I_n - I_{n+2}),$$

d'où la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

- \* **Rapport de deux termes consécutifs** : la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à termes strictement positifs (par positivité de l'intégrale ou par récurrence simple), et décroissante puisque

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) \underbrace{(\sin(t) - 1)}_{\leq 0} dt \leq 0.$$

On en déduit les inégalités annoncées :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} \leq 1$$

(puisque  $0 < I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$ ).

Or d'après la relation de récurrence précédemment établie :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{2p}{2p+1} \rightarrow 1,$$

donc d'après le théorème des gendarmes, on a  $I_{2p}/I_{2p-1} \rightarrow 1$ .

- \* **Calcul explicite des  $I_n$**  : par récurrence simple (de "deux en deux", ce qui oblige à séparer les termes d'indices pairs et impairs), on obtient :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-4} = \dots = \frac{(2p-1)(2p-3) \dots 3 \times 1}{2p(2p-2) \dots 4 \times 2} I_0,$$

c'est-à-dire (en multipliant numérateur et dénominateur par  $2p(2p-2)\cdots 4 \times 2 = 2^p p!$ ) :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

De même :

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \cdots = \frac{2p(2p-2)\cdots 4 \times 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 5 \times 3} I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!},$$

puisque  $I_1 = 1$ .

\* **Produit de deux termes consécutifs** : on déduit des formules précédentes les relations

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{2p} I_{2p-1} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{2^{2p-2}((p-1)!)^2}{(2p-1)!} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2p},$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+1} I_{2p} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2p+1},$$

ce qui se résume à :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}.$$

\* **Equivalent de  $I_n$**  : en distinguant là encore les  $n$  pairs et impairs, on montre que  $I_n/I_{n-1} \rightarrow 1$ , c'est-à-dire  $I_n \sim I_{n-1}$ .

En effet, on a déjà montré que  $I_{2p}/I_{2p-1} \rightarrow 1$ , et on a

$I_{2p+1}/I_{2p} = (I_{2p+1}/I_{2p-1}) \times (I_{2p-1}/I_{2p}) \rightarrow 1$  (par produit de limites).

La relation  $I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$  donne donc (par produit d'équivalents)  $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ , et finalement :

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

\* **Conclusion (formule de Stirling)** : nous avons montré en première partie :

$$\exists L > 0, \quad n! \sim L n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

En outre, en considérant les intégrales de Wallis d'indice pair (par exemple), on a montré que

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2},$$

donc en utilisant les équivalents de  $p!$  et  $(2p)!$  en fonction de  $L$ , on obtient

$$I_{2p} \sim \frac{L(2p)^{2p} e^{-2p} \sqrt{2p}}{2^{2p} L^2 p^{2p} e^{-2p} p} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{L\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Mais on a aussi montré que

$$I_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}.$$

Donc nécessairement,  $\frac{\pi}{L\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , ce qui donne finalement

$$L = \sqrt{2\pi},$$

et donc

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

### Exercice 6 (\*\*)

Convergence de la série de terme général :

- 1)  $u_n = n \left( \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)^\alpha$
- 2)  $u_n = \frac{R_n}{S_n}$  (restes et sommes partielles de  $\sum 1/n^\alpha$ )
- 3)  $u_n = 1 / \sum_{k=1}^n \ln k$

**Corrigé de l'exercice 6**

A chaque fois, on cherche un équivalent simple du terme général proposé par comparaison série-intégrale :

1. Puisque la série  $\sum 1/n^2$  converge, le reste  $\sum_{k=n}^{+\infty} 1/k^2$  est bien défini donc  $u_n$  est bien défini pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On obtient facilement  $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  (pour plus de détails, voir l'exemple 2. plus général). Donc  $u_n = n \left( \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)^\alpha \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}} > 0$ , ce qui montre que  $\sum u_n$  converge ssi  $\alpha > 2$ .
2. Notons  $S_n = \sum_{k=1}^n 1/k^\alpha$  et  $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} 1/k^\alpha$ , avec  $\alpha > 1$  (pour assurer l'existence de  $R_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ). On note aussi  $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^\alpha = S_n + R_{n+1} > 0$ . Par continuité et décroissance de  $x \mapsto 1/x^\alpha$  sur  $]0, +\infty[$ , on a

$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} t^{-\alpha} dt \leq k^{-\alpha} \leq \int_{k-1}^k t^{-\alpha} dt,$$

donc en sommant :

$$\forall N \geq n \geq 2, \quad \int_n^{N+1} t^{-\alpha} dt \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^N t^{-\alpha} dt.$$

En calculant les intégrales et en faisant tendre  $N \rightarrow +\infty$ , on obtient l'encadrement

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq R_n \leq \frac{(n-1)^{1-\alpha}}{\alpha-1},$$

ce qui donne l'équivalent  $R_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ .

Finalement,  $u_n = \frac{R_n}{S_n} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\zeta(2)(\alpha-1)} > 0$ , donc la série  $\sum u_n$  est de même nature que  $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ .

En conclusion,  $\sum u_n$  converge ssi  $\alpha > 2$ .

**Variante :** en utilisant la sommabilité.

Soit  $\alpha > 1$ . Puisque  $S_n \rightarrow \zeta(2) > 0$ , on a  $u_n = \frac{R_n}{S_n} \sim \frac{R_n}{\zeta(2)} > 0$ , donc  $\sum u_n$  est de même nature que  $\sum R_n$ . En outre, on a dans  $[0, +\infty[$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{n,k} \right),$$

où  $u_{n,k} = 1/k^\alpha$  si  $k \geq n$  et  $u_{n,k} = 0$  sinon. Vu que la famille  $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$  est à termes positifs, on peut intervertir les sommes (théorème de Fubini positif). On a donc, toujours dans  $[0, +\infty[$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^k \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{k+1}{k^\alpha} \right).$$

Or,  $\sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{k+1}{k^\alpha} \right) < +\infty \iff \alpha > 2$  (en passant par un équivalent), donc on en déduit :  $\sum u_n$  converge ssi  $\alpha > 2$ .

3. On a ici  $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \ln(k)}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . Par continuité et croissance de  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$ , on a

$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_{k-1}^k \ln(t) dt,$$

donc en sommant :

$$\forall n \geq 2, \quad \int_2^{n+1} \ln(t) dt \leq \sum_{k=2}^n \ln(k) \leq \int_1^n \ln(t) dt,$$

c'est-à-dire (par IPP)

$$\forall n \geq 2, \quad (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln(2) + 2 \leq \sum_{k=2}^n \ln(k) \leq n\ln(n) - n + 1.$$

Puisque  $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + 1/n) = \ln(n) + O(1/n) \sim \ln(n)$ , on déduit que les deux extrémités de l'encadrement précédent sont équivalentes à  $n\ln(n)$ , et donc

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) = \sum_{k=2}^n \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\ln(n),$$

si bien que  $u_n \sim \frac{1}{n\ln(n)} > 0$ .

Ainsi,  $\sum u_n$  est de même nature que  $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ , qu'on étudie (encore!) par comparaison série-intégrale. Par continuité et décroissance de  $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$  sur  $]1, +\infty[$ , on a

$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{k\ln(k)},$$

donc en sommant

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln(k)} \geq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t\ln(t)} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc la série  $\sum u_n$  diverge.

#### Exercice 7 (\*\*)

Équivalent de  $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}}\right)$ .

#### Corrigé de l'exercice 7

On procède par comparaison série-intégrale. La fonction  $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$  étant continue et décroissante sur  $[0, +\infty[$ , on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_k^{k+1} e^{-\sqrt{t}} dt \leq e^{-\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k e^{-\sqrt{t}} dt,$$

donc en sommant :

$$\forall 1 \leq n \leq N, \quad \int_n^{N+1} e^{-\sqrt{t}} dt \leq \sum_{k=n}^N e^{-\sqrt{k}} \leq \int_{n-1}^N e^{-\sqrt{t}} dt.$$

On calcule les intégrales à l'aide du changement de variable  $t = u^2$ , qui donne :

$$\int_a^b e^{-\sqrt{t}} dt = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} 2ue^{-u} du \underset{IPP}{=} [-2(1+u)e^{-u}]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}.$$

D'où l'encadrement :

$$\forall 1 \leq n \leq N, \quad 2(1+\sqrt{n})e^{-\sqrt{n}} - 2(1+\sqrt{N+1})e^{-\sqrt{N+1}} \leq \sum_{k=n}^N e^{-\sqrt{k}} \leq 2(1+\sqrt{n-1})e^{-\sqrt{n-1}} - 2(1+\sqrt{N})e^{-\sqrt{N}},$$

qui donne en faisant tendre  $N \rightarrow +\infty$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2(1+\sqrt{n})e^{-\sqrt{n}} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}} \leq 2(1+\sqrt{n-1})e^{-\sqrt{n-1}}$$

(le passage à la limite est licite car la série converge, vu que  $e^{-\sqrt{k}} = o(1/k^2)$ ).

Enfin,

$$e^{-\sqrt{n-1}} = e^{-\sqrt{n}\sqrt{1-1/n}} = e^{-\sqrt{n}(1-1/(2n)+o(1/n))} = e^{-\sqrt{n}} e^{1/(2\sqrt{n})+o(1/\sqrt{n})} \sim e^{-\sqrt{n}},$$

donc les deux extrémités de l'encadrement sont équivalentes à  $2\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}}$ , ce qui montre que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}}.$$

### Exercice 8 (\*\*\*)

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs de suite de sommes partielles  $(S_n)$ . Montrer que :

1.  $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$  est convergente (utiliser une comparaison intégrale) ;
2.  $\sum u_n$  et  $\sum \frac{u_n}{S_n}$  sont de même nature (si  $\sum u_n$  diverge, utiliser  $\sum \frac{u_n}{S_{n-1}}$  et une comparaison intégrale).

### Corrigé de l'exercice 8

Vu les hypothèses, la suite  $(S_n)$  est strictement croissante et  $S_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a par continuité et décroissance de  $t \mapsto 1/t^2$  sur  $]0, +\infty[$  :

$$0 < \frac{u_n}{S_n^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{S_n^2} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}.$$

Or, la série télescopique  $\sum \left( \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right)$  converge, puisque la suite  $(1/S_n)$  converge (sa limite est  $1/S$  où  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in ]0, +\infty]$  avec convention  $1/S = 0$  si  $S = +\infty$ ).

En conclusion  $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$  converge par comparaison de SATP.

2. Deux cas se présentent :

- si  $\sum u_n$  converge, alors  $S_n \rightarrow S > 0$ , donc  $\frac{u_n}{S_n} \sim \frac{u_n}{S} > 0$ , ce qui montre par comparaison de SATP que  $\sum \frac{u_n}{S_n}$  converge.
- si  $\sum u_n$  diverge, alors  $S_n \rightarrow +\infty$ . D'autre part :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_n}{S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_{n-1}} \geq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t} = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1}).$$

Puisque  $\ln(S_n) \rightarrow +\infty$ , la série télescopique  $\sum (\ln(S_n) - \ln(S_{n-1}))$  diverge, et par comparaison de SATP, la série  $\sum \frac{u_n}{S_{n-1}}$  diverge.

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{u_n}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n},$$

donc  $\ln(S_n) - \ln(S_{n-1}) = -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$ .

Si  $\frac{u_n}{S_n} \rightarrow 0$ , alors  $-\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) \sim u_n/S_n$ , donc  $\frac{u_n}{S_n} \sim \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ , et en réutilisant l'argument de la série télescopique, la série  $\sum u_n/S_n$  diverge.

Si  $\frac{u_n}{S_n}$  ne tend pas vers 0, alors la série  $\sum u_n/S_n$  diverge grossièrement.

On a donc bien montré que si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum u_n/S_n$  diverge.

### Exercice 9 (\*\*\*)

Soit  $\sum a_n$  une série à termes positifs divergente. On note  $(S_n)$  la suite de ses sommes partielles.

1. Montrer que  $\frac{a_{N+1}}{S_{N+1}} + \dots + \frac{a_{N+k}}{S_{N+k}} \geq 1 - \frac{S_N}{S_{N+k}}$ , et en déduire que  $\sum \frac{a_n}{S_n}$  est divergente.
2. Etablir que  $\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$ , et en déduire que  $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$  est convergente (utiliser une intégrale).

On suppose maintenant que  $\sum a_n$  est convergente,  $(a_n)$  non stationnaire à 0, et on pose  $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ .

3. Montrer pour  $m < n$  :  $\frac{a_m}{R_m} + \dots + \frac{a_n}{R_n} \geq 1 - \frac{R_n}{R_m}$ . Qu'en déduire ?
4. Montrer que :  $\frac{a_n}{\sqrt{R_n}} \leq 2(\sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}})$ . Qu'en déduire ?

### Corrigé de l'exercice 9

1. Par hypothèse, la suite  $(S_n)$  est croissante et diverge vers  $+\infty$ , donc on a  $S_n > 0$  à partir d'un certain rang  $n_0 \geq 1$ , ce qui permet de diviser par  $S_n$ .

Par croissance de  $(S_n)$ , on a, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $N$  tel que  $N + 1 \geq n_0$  :

$$\frac{a_{N+1}}{S_{N+1}} + \dots + \frac{a_{N+k}}{S_{N+k}} \geq \frac{a_{N+1}}{S_{N+k}} + \dots + \frac{a_{N+k}}{S_{N+k}} = \frac{S_{N+k} - S_N}{S_{N+k}} = 1 - \frac{S_N}{S_{N+k}}.$$

Supposons que  $\sum a_n/S_n$  converge. Alors, en faisant tendre  $k \rightarrow +\infty$  dans l'inégalité précédente (à  $N$  fixé), on obtient puisque  $S_{N+k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$  :

$$\forall N \geq n_0 - 1, \quad \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{a_i}{S_i} \geq 1,$$

ce qui contredit le fait que le reste  $\sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{a_i}{S_i}$  tend vers 0 lorsque  $N \rightarrow +\infty$ .

Donc la série  $\sum a_n/S_n$  diverge.

2. Pour tout  $n \geq \max(n_0, 2)$ , on a par continuité et décroissance de  $t \mapsto 1/t^2$  sur  $]0, +\infty[$  :

$$0 \leq \frac{a_n}{S_n^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{S_n^2} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}.$$

Or, la série télescopique  $\sum \left( \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right)$  converge, puisque la suite  $(1/S_n)$  converge (sa limite est 0). Donc  $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$  converge par comparaison de SATP.

3.

4.

#### Exercice 10 (\*\*)

Soit une suite  $(z_n)$  telle que  $\operatorname{Re}(z_n) \geq 0$ ,  $\sum z_n$  et  $\sum z_n^2$  convergent. Montrer que  $\sum |z_n|^2$  converge.

#### Exercice 11 (\*)

Trouver les réels  $a, b, c$  pour que  $\sum u_n$  converge où :  $u_n = a \ln(n^2 - 1) + b \ln(n + 2) + c \ln(n^2 + 2n)$ .

#### Exercice 12 (\*\*)

Convergence de la série de terme général :

- |                                                          |                                                            |
|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1) $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}\right)$ | 6) $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} \sin x \, dx$ |
| 2) $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$              | 7) $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$               |
| 3) $\sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$                             | 8) $\frac{(-1)^n}{n^{2/3} + \cos n}$                       |
| 4) $\sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$                        | 9) $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$                           |
| 5) $\frac{(-1)^n}{\ln(n + (-1)^n)}$                      |                                                            |

#### Exercice 13 (\*)

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Montrer que  $\sum (-1)^n \int_0^1 x^n f(x) dx$  est convergente de somme  $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx$ . Qu'obtient-on si  $f$  est constante égale à 1 sur  $[0, 1]$  ?

#### Exercice 14 (\*\*)

Soit  $f$  continue décroissante de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$ . Nature de la série  $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin t \, dt$ .

#### Exercice 15 (\*\*)

Montrer que le produit de Cauchy de  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$  par elle-même est convergent.

**Corrigé de l'exercice 10**

Le produit de Cauchy de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$  par elle-même est la série

$$\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \times \frac{(-1)^{n-k+1}}{n-k+1} \right) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n,$$

$$\text{avec } a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{1}{n+2} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+1} \right) = \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Montrons alors que  $(a_n)$  vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. On a :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+3} \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = -\frac{1}{(n+2)(n+3)} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leq 0,$$

donc  $(a_n)$  est décroissante. De plus  $a_n \sim \frac{\ln(n+1)}{n+2}$ , donc  $(a_n)$  tend vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, le produit de Cauchy  $\sum (-1)^n a_n$  est donc une série convergente.

**Exercice 16 (\*\*Transformation d'Abel)**

- 1) Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites complexes. On note  $(B_n)$  la suite des sommes partielles de  $\sum b_n$ . Montrer que pour tout  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$  :

$$\sum_{k=1}^p a_{n+k} b_{n+k} = \sum_{k=1}^p (a_{n+k} - a_{n+k+1}) B_{n+k} - a_{n+1} B_n + a_{n+p+1} B_{n+p}.$$

En déduire que si  $(B_n)$  est bornée,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  et  $\sum (a_{n+1} - a_n)$  est absolument convergente, alors  $\sum a_n b_n$  est convergente.

À quoi peut-on ramener ces conditions si  $(a_n)$  converge vers 0 en décroissant ?

- 2) On suppose que  $\sum u_n$  est une série complexe convergente. Montrer que  $\sum \frac{u_n}{n}$  converge également.

- 3) Étudier  $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$  pour  $\alpha > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ .

**Exercice 17 (\*\*Exemples de sommations par tranches)**

Étudier les séries de terme général

- 1)  $\frac{1}{n} \cos \frac{2n\pi}{3}$
- 2)  $1 - n^{1/p(n)}$ , où  $p(n)$  désigne le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de  $n$ .
- 3)  $u_{3p} = -\frac{2}{3p}$ ,  $u_n = 1/n$  sinon
- 4)  $u_n = 1/n^\alpha$  si l'écriture décimale de  $n$  ne comporte pas de 1,  $u_n = 0$  sinon.

**Exercice 18 (\*\*Règle de la loupe)**

Soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs décroissante.

- 1) Montrer que  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\sum 2^n u_{2^n}$  est convergente (**règle de la loupe**).
- 2) Retrouver que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$  et  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^p}$  convergent si et seulement si  $p > 1$ .

**Exercice 19 (\*\*)**

Les familles suivantes sont-elles sommables ?

- 1)  $(x)_{x \in \mathbb{D} \cap [0,1]}$
- 2)  $(1/x^2)_{x \in \mathbb{Q}_+^*}$
- 3)  $(a^n)_{n \in \mathbb{Z}}$
- 4)  $(1/(p^2 + q^2)^\alpha)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$
- 5)  $(1/(p+q)^\alpha)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$

**Corrigé de l'exercice 11**

- 1) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'ensemble  $\mathbb{D} \cap [0, 1]$  contient la famille  $(\frac{k}{10^n})_{k \in [0, 10^n]}$ , et on a

$$\sum_{k=0}^{10^n} \frac{k}{10^n} = \frac{10^n(10^n + 1)}{2 \times 10^n} > \frac{10^n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc les sommes sur les parties finies  $F \subset \mathbb{D} \cap [0, 1]$  de la famille  $(x)_{x \in \mathbb{D} \cap [0, 1]}$  ne sont pas majorées, ce qui montre que la famille de réels positifs  $(x)_{x \in \mathbb{D} \cap [0, 1]}$  n'est pas sommable.

- 2) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'ensemble  $\mathbb{Q}_+^*$  contient  $1/n$ , donc puisque  $(\frac{1}{x^2})_{x \in \mathbb{Q}_+^*}$  est une famille de réels positifs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{x \in \mathbb{Q}_+^*} \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{(1/n)^2} = n^2.$$

On en déduit que  $\sum_{x \in \mathbb{Q}_+^*} \frac{1}{x^2} = +\infty$ , et donc la famille  $(\frac{1}{x^2})_{x \in \mathbb{Q}_+^*}$  n'est pas sommable.

*On peut bien entendu rédiger comme dans le premier exemple en disant que les sommes sur les parties finies ne sont pas majorées, si l'on ne veut pas travailler dans  $[0, +\infty]$ .*

- 3) Soit  $a \in \mathbb{C}^*$ . La famille  $(a^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable si et seulement si  $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(a^n)_{n \in -\mathbb{N}^*} = (a^{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont sommables, ce qui équivaut à la convergence des séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a|^n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (1/|a|)^n$ , ou encore aux conditions respectives  $|a| < 1$  et  $|a| > 1$ . Ces conditions étant incompatibles, la famille  $(a^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  n'est pas sommable.
- 4) Encadrer avec  $1/(p+q)^{2\alpha}$  et  $2^\alpha/(p+q)^{2\alpha}$  puis nature par paquets diago.
- 5) La famille  $(u_{i,j}) = (\frac{1}{(i+j)^\alpha})_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est positive, donc elle est sommable si et seulement si

$$\sum_{n \geq 2} \left( \sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, i+j=n} u_{i,j} \right) < +\infty$$

(en sommant par paquets suivant les diagonales du quadrillage  $(\mathbb{N}^*)^2$ ). On a donc

$$(u_{i,j}) \text{ sommable} \iff \sum_{n \geq 2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \sum_{n \geq 2} \frac{n-1}{n^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 2,$$

puisque  $\frac{n-1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$

**Exercice 20 (\*\*)**

Montrer que les familles suivantes sont sommables et calculer leurs sommes :

- 1)  $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$  avec  $|q| < 1$
- 2)  $(r^{|n|} e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$  avec  $r \in [0, 1[$  et  $\theta \in \mathbb{R}$
- 3)  $(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)})_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$

**Corrigé de l'exercice 12**

- 1)
- 2) La famille  $(r^{|n|} e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable si et seulement si  $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable (puisque  $|r^{|n|} e^{in\theta}| = r^{|n|}$  et  $n \mapsto r^{|n|}$  est paire), c'est-à-dire si et seulement si  $\sum_{n \geq 0} r^n$  converge. Et c'est le cas car  $r \in [0, 1[$ . On a donc (en sommant par paquets suivant la décomposition  $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \mathbb{N}^* \cup (-\mathbb{N}^*)$  :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} r^n e^{in\theta} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} r^n e^{-in\theta} = 1 + \frac{r e^{i\theta}}{1 - r e^{i\theta}} + \frac{r e^{-i\theta}}{1 - r e^{-i\theta}},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} = 1 + \frac{2r \cos(\theta) - 2r^2}{(1 - r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}.$$

3)

**Exercice 21 (\*\*)**

Montrer par calculs de sommes que les familles suivantes ne sont pas sommables :

- 1)  $\left(\frac{1}{p^2 - q^2}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, p \neq q}$
- 2)  $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  avec  $a_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}$

**Exercice 22 (\*\*\*)**

Calculer les sommes suivantes (utiliser  $\zeta(2) = \pi^2/6$  et  $\zeta(4) = \pi^4/90$ ) :

- 1)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$
- 2)  $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$
- 3)  $\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^2 q^2}$  où  $A = (\mathbb{N}^*)^2$ , puis  $A = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p \text{ divise } q\}$ , et enfin  $A = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p \wedge q = 1\}$

**Corrigé de l'exercice 13**

1)

2)

3) (a)

(b) Considérons la famille positive  $(a_{p,q})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  définie par

$$\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad a_{p,q} = \begin{cases} \frac{1}{p^2 q^2} & \text{si } p|q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La famille  $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p|q}$  est sommable si et seulement si  $(a_{p,q})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  l'est, ce qui équivaut (par le théorème de Fubini pour les familles positives) à la condition :

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left( \sum_{q \in \mathbb{N}^*} a_{p,q} \right) < +\infty.$$

Or,

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left( \sum_{q \in \mathbb{N}^*} a_{p,q} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \sum_{q \in p\mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2 q^2} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 (kp)^2} \right) = \left( \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} \right) \times \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right) < +\infty,$$

donc la famille proposée est sommable et sa somme vaut :

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p|q} \frac{1}{p^2 q^2} = \left( \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} \right) \times \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right) = \frac{\pi^6}{540}.$$

(c)

**Exercice 23 (\*\*)**

Soit  $\sigma$  une bijection de  $\mathbb{N}^*$  sur  $\mathbb{N}^*$ . Montrer que :

- 1)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$  est convergente,
- 2)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$  est divergente,
- 3)  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$  est divergente, en étudiant  $(S_{2n} - S_n)$ , où  $(S_n)$  est la suite des sommes partielles associée.

**Exercice 24 (\*\*)**

- 1) Montrer que tout naturel  $p$  non nul s'écrit de manière unique sous la forme  $2^n(2k+1)$  avec  $k$  et  $n$  naturels.
- 2) Pour  $|z| < 1$ , montrer que :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}$ .

**Exercice 25 (\*\*\*)**

Montrer que pour tout  $|x| < 1$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$  où  $d(n)$  est le nombre de diviseurs positifs de  $n$ .

**II Exercices supplémentaires****1) Exemples d'études de convergence****Exercice 26 (\*\*Exemple à paramètre)**

Déterminer en fonction de  $\alpha > 0$  la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^\alpha}$ .

**Corrigé de l'exercice 14**

On procède par développement asymptotique du terme général : puisque  $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \left( 1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

On a donc  $u_n = x_n + y_n$  avec  $x_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  et  $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n^{2\alpha}}$ .

Par le critère spécial des séries alternées, la série  $\sum x_n$  converge pour tout  $\alpha > 0$ .

Puisque  $(-\frac{1}{n^{2\alpha}})_{n \geq 1}$  est de signe constant, la série  $\sum y_n$  est de même nature que la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ , donc elle converge si et seulement si  $\alpha > 1/2$ .

Finalement, par somme : la série  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\alpha > 1/2$ .

**Exercice 27 (\*\*Lien suite-série)**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à termes positifs ou nuls. Soit  $u_0 > 0$ .

On définit par récurrence la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$ .

Montrer que la série  $\sum a_n$  converge ssi la suite  $(u_n)$  converge.

**Corrigé de l'exercice 15**

Tout d'abord, on montre facilement par récurrence que la suite  $(u_n)$  est bien définie et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ .

On a également  $(u_n)$  croissante car  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \geq 0$ . Montrons alors l'équivalence demandée.

- Si la série  $\sum a_n$  converge, alors puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \leq \frac{a_n}{u_0},$$

on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que la série télescopique  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge, et donc la suite  $(u_n)$  converge.

- Réciproquement, si la suite  $(u_n)$  converge, notons  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ . On a  $\ell \geq u_0 > 0$ , donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a_n}{\ell} \geq 0.$$

Puisque la suite  $(u_n)$  converge, la série télescopique  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge, et donc par le critère des équivalents, la série  $\sum \frac{a_n}{\ell}$  converge, ce qui montre que  $\sum a_n$  converge.

**Exercice 28 (\*\*Suites trigonométriques)**

1. Pour quelles valeurs de  $x \in \mathbb{R}$  la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \cos(nx)$  converge-t-elle ?  
*Indication : on cherchera des relations entre  $u_n$ ,  $u_{n+1}$  et  $u_{n+2}$  d'une part,  $u_n$  et  $u_{2n}$  d'autre part. Ensuite, on fera un raisonnement par analyse-synthèse.*
2. Faire de même avec la suite  $v_n = \sin(nx)$  (en utilisant le résultat de la question précédente).
3. En déduire les valeurs de  $x \in \mathbb{R}$  pour lesquelles la suite complexe  $z_n = e^{inx}$  converge.

**Corrigé de l'exercice 16**

1. On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = (2 \cos x)u_{n+1} - u_n, \quad u_{2n} = 2u_n^2 - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell \in \mathbb{R}$ , alors, en passant à la limite dans ces relations, on obtient

$$\begin{cases} \ell(1 - \cos(x)) = 0 \\ (\ell - 1)(2\ell + 1) = 0 \end{cases}.$$

Le cas  $\ell = 0$  est contradictoire avec la seconde relation, donc  $\ell \neq 0$ , ce qui implique

$$\begin{cases} \cos(x) = 1 \\ \ell \in \{1, -\frac{1}{2}\} \end{cases}$$

On a donc  $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ , ce qui implique que la suite  $(u_n)$  est constante égale à 1.

Réciproquement, la suite constante égale à 1 est évidemment convergente.

On a donc montré l'équivalence

$$(u_n) \text{ converge} \iff x \equiv 0 [2\pi] \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1.$$

2. Ici, il faut utiliser les résultats établis précédemment pour  $u_n$ , ainsi que l'interaction entre les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ . On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$v_{2n} = 2v_n u_n, \quad v_{n+2} = (2 \cos x)v_{n+1} - v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si  $(v_n)$  converge vers une limite  $\ell \in \mathbb{R}$ , alors, en passant à la limite dans la seconde relation, on obtient

$$\ell(1 - \cos(x)) = 0.$$

- Si  $\ell = 0$ , alors on utilise la relation

$$v_{n+1} = (\cos x)v_n + (\sin x)u_n,$$

qui entraîne  $(\sin x)u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Ceci impose  $\sin(x) = 0$ , car sinon, on aurait  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , et c'est impossible d'après la question précédente (puisque  $(u_n)$  ne peut converger que vers 1).

- Si  $\ell \neq 0$ , alors on a  $\cos(x) = 1$ , et donc  $\sin(x) = 0$ .

On a dans tous les cas  $\sin(x) = 0$  et donc  $x \in \pi\mathbb{Z}$ , ce qui implique que la suite  $(v_n)$  est constante égale à 0.

Réciproquement, la suite constante égale à 0 est évidemment convergente.

On a donc montré l'équivalence

$$(v_n) \text{ converge} \iff x \equiv 0 [\pi] \iff \forall n \in \mathbb{N}, v_n = 0.$$

3. Puisque  $z_n = u_n + iv_n$ , la suite  $(z_n)$  converge si et seulement si les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent, ce qui équivaut à  $x \equiv 0 [2\pi]$ , c'est-à-dire  $z_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  d'après les questions précédentes.

**Exercice 29 (\*\*Séries de Bertrand)**

1. Pour  $\beta \in \mathbb{R}$ , montrer que la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$  converge ssi  $\beta > 1$ .

*On pensera à des comparaisons séries-intégrales...*

2. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$  converge ssi  $\alpha > 1$  ou  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ .

**Corrigé de l'exercice 17**

- 1.
- 2.

**Exercice 30 (\*\*Règle de Raabe-Duhamel)**

Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que  $(v_n)$  est aussi une suite de réels strictement positifs et qu'à partir d'un certain rang, on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ .  
Montrer que  $(u_n)$  est dominée par  $(v_n)$ .
2. (a) On suppose qu'il existe  $\alpha > 1$  tel que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .  
À l'aide d'une comparaison à une série de Riemann, montrer la convergence de  $\sum u_n$ .  
(b) On suppose ici qu'il existe  $\alpha < 1$  tel que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .  
Montrer que  $\sum u_n$  diverge.  
(c) **Application** : Soit  $a \in \mathbb{R}$ .  
Étudier la convergence absolue de la série de terme général  $u_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$ .

**Corrigé de l'exercice 18**

- 1.
2. (a)
- (b)
- (c)

**2) Calculs de sommes****Exercice 31 (\*\*Sommes trigonométriques)**

Soient  $x$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Étudier la convergence et calculer la somme des séries  $\sum x^n \cos(n\theta)$  et  $\sum x^n \sin(n\theta)$ .

**Corrigé de l'exercice 19**

Puisque  $x \in \mathbb{R}$ , remarquons que les séries proposées sont les parties réelle et imaginaire de la série géométrique  $\sum x^n e^{in\theta} = \sum (xe^{i\theta})^n$ .

Cette série converge si et seulement si  $|xe^{i\theta}| < 1$ , c'est-à-dire  $|x| < 1$ .

- Si  $x \in ]-1, 1[$ , on a donc convergence des deux séries proposées (rappelons qu'une suite complexe converge si et seulement si ses parties réelle et imaginaire convergent, donc il en est de même pour les séries en appliquant ce raisonnement aux sommes partielles), et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(n\theta) + i \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{i\theta})^n = \frac{1}{1 - xe^{i\theta}} = \frac{1 - xe^{-i\theta}}{|1 - xe^{i\theta}|^2},$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(n\theta) = \frac{1 - x \cos(\theta)}{1 - 2x \cos(\theta) + x^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n\theta) = \frac{x \sin(\theta)}{1 - 2x \cos(\theta) + x^2}.$$

- Si  $x \notin ]-1, 1[$ , au moins une des deux séries proposées diverge, essayons d'identifier laquelle.  
Si  $\sum x^n \cos(n\theta)$  converge, alors nécessairement  $|x^n \cos(n\theta)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc puisque  $|x| \geq 1$  :

$$|\cos(n\theta)| \leq |x|^n |\cos(n\theta)| \leq |x^n \cos(n\theta)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui est impossible (voir l'exercice sur les suites trigonométriques).

Donc  $\sum x^n \cos(n\theta)$  diverge pour tout réel  $\theta$  dans ce cas.

De même, si  $\sum x^n \sin(n\theta)$  converge, alors par majoration,  $\sin(n\theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , ce qui se produit seulement si  $\theta \equiv 0 [\pi]$  (toujours d'après l'exercice sur les suites trigonométriques), et dans ce cas, la série  $\sum x^n \sin(n\theta)$  converge bien (c'est la série nulle).

Donc  $\sum x^n \sin(n\theta)$  converge si et seulement si  $\theta \equiv 0 [\pi]$  et dans ce cas,  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n\theta) = 0$ .

### Exercice 32 (\*Exemple à paramètre)

Déterminer des réels  $a$  et  $b$  tels que la série de terme général  $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$  converge. Calculer alors sa somme.

### Corrigé de l'exercice 20

### Exercice 33 (\*\*Calculs de sommes fractionnaires)

- Calculer  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n^2-1)}$ .
- On note  $P_k$  le polynôme de degré  $k$  défini par :  $P_k(X) = X(X-1)\cdots(X-(k-1))$ .
  - Calculer  $\sigma_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_k(n)}{n!}$ . On admettra que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ .
  - En déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n^2+n+1}{n!}$ .

### Corrigé de l'exercice 21

- On décompose en éléments simples : il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que

$$\frac{1}{(X+2)(X^2-1)} = \frac{a}{X+2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-1}.$$

En multipliant par  $X+2$  et en évaluant en  $X = -2$ , on obtient  $a = 1/3$ . De même,  $b = -1/2$  et  $c = 1/6$ . On a donc, pour tout  $N \geq 2$ , on obtient par télescopage :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{1}{(n+2)(n^2-1)} &= \frac{1}{6} \left( \sum_{n=2}^N \frac{2}{n+2} + \sum_{n=2}^N \frac{-3}{n+1} + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left( \sum_{n=4}^{N+2} \frac{2}{n} + \sum_{n=3}^{N+1} \frac{-3}{n} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{2}{N+2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{5}{36}. \end{aligned}$$

Finalement, la série proposée converge et  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n^2-1)} = \frac{5}{36}$ .

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le polynôme  $P_k$  admet pour racines les entiers  $0, 1, \dots, k-1$  (pas de racines si  $k = 0$ , puisque  $P_0 = 1$  avec la convention du produit vide), donc  $P_k(n) = 0$  si  $k > n$ . On en déduit (sous réserve de convergence) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sigma_k = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{P_k(n)}{n!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Cette série converge vers  $e$  (d'après l'énoncé), donc la série proposée converge et  $\sigma_k = e$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

- Il suffit d'écrire la série proposée comme combinaison linéaire des séries convergentes  $(\sigma_k)_{0 \leq k \leq 3}$ , et ceci se fait en exprimant le polynôme  $Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1$  comme combinaison linéaire de  $(P_0, P_1, P_2, P_3)$  (qui forme une base échelonnée en degrés de  $\mathbb{R}_3[X]$ ). En écrivant :

$$Q(X) = \sum_{k=0}^3 \lambda_k P_k(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X(X-1) + \lambda_3 X(X-1)(X-2),$$

on obtient par évaluations successives en  $X = 0, 1, 2, 3$  les équations :

$$\begin{cases} \lambda_0 = Q(0) = 1 \\ \lambda_0 + \lambda_1 = Q(1) = 4 \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = Q(2) = 15 \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 6\lambda_3 = Q(3) = 40 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_0 = 1 \\ \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}.$$

Donc  $Q(X) = P_0 + 3P_1 + 4P_2 + P_3$ , et par combinaison linéaire de séries convergentes, on en déduit que la série proposée converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 + n^2 + n + 1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q(n)}{n!} = \sigma_0 + 3\sigma_1 + 4\sigma_2 + \sigma_3 = 9e.$$

### Exercice 34 (\*\*Avec des parties entières)

Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général  $u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$ .

### Corrigé de l'exercice 22

On va travailler sur les sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k}.$$

Pour tous entiers  $(m, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , on a

$$\lfloor \sqrt{k} \rfloor = m \iff m \leq \sqrt{k} < m+1 \iff m^2 \leq k < (m+1)^2,$$

$$\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor = m \iff m \leq \sqrt{k+1} < m+1 \iff m^2 - 1 \leq k < (m+1)^2 - 1,$$

donc il est intéressant de regrouper les termes de la somme  $S_n$  par paquets :

$$\forall n \geq 1, \quad S_{(n+1)^2-1} = \sum_{k=1}^{(n+1)^2-1} \frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k} = \sum_{m=1}^n \left( \sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \underbrace{\frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k}}_{=0 \text{ si } k < (m+1)^2-1} \right),$$

c'est-à-dire

$$S_{(n+1)^2-1} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{(m+1)^2-1} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m(m+2)} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m+2} \right).$$

Par télescopage, on obtient

$$S_{(n+1)^2-1} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}.$$

Enfin, on sait que la suite réelle  $(S_n)$  est croissante (car  $u_k \geq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ), et possède une suite extraite convergente donc elle converge, et  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}$ .

En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \geq 1$  tel que

$$n \geq n_0 \implies \frac{3}{4} - \varepsilon \leq S_{(n+1)^2-1} \leq \frac{3}{4} + \varepsilon,$$

et donc par croissance de  $(S_n)$  :

$$n \geq (n_0 + 1)^2 - 1 \implies \frac{3}{4} - \varepsilon \leq S_{(n_0+1)^2-1} \leq S_n \leq S_{(n+1)^2-1} \leq \frac{3}{4} + \varepsilon.$$

Finalement, la série proposée converge vers  $3/4$ .

**Exercice 35 (\*\*Calcul à partir de la série harmonique)**

Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(2n-1)}$ , et calculer sa somme en utilisant le développement asymptotique bien connu de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

**Corrigé de l'exercice 23**

**Exercice 36 (\*Utilisation d'un produit de Cauchy)**

Soit  $a \in ]-1, 1[$ . Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} na^n$  (après avoir justifié la convergence!) à l'aide d'un produit de Cauchy.

**Corrigé de l'exercice 24**

La série  $\sum_{n \geq 0} a^n$  est absolument convergente (car  $|a| < 1$ ), donc le produit de Cauchy de cette série par elle-même converge absolument. Or, ce produit de Cauchy est la série :

$$\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n a^k a^{n-k} \right) = \sum_{n \geq 0} (n+1)a^n = \sum_{n \geq 1} na^{n-1},$$

donc la série  $\sum_{n \geq 1} na^{n-1}$  converge absolument et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na^{n-1} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \right)^2 = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

En multipliant par  $a$ , on obtient que  $\sum_{n \geq 1} na^n$  converge absolument et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

### 3) Sommabilité

**Exercice 37 (\*\*Des exemples de produits de Cauchy)**

1. Montrer que le produit de Cauchy de la série semi-convergente  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  par elle-même est une série divergente.
2. Montrer que le produit de Cauchy de la série semi-convergente  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  par elle-même est une série convergente.

**Corrigé de l'exercice 25**

1. Le produit de Cauchy de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$  par elle-même est la série

$$\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1}} \times \frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k+1}} \right) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}},$$

et cette série est grossièrement divergente car

$$\left| (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \right| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = 1.$$

2. Le produit de Cauchy de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$  par elle-même est la série

$$\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \times \frac{(-1)^{n-k+1}}{n-k+1} \right) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n,$$

$$\text{avec } a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{1}{n+2} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+1} \right) = \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Montrons alors que  $(a_n)$  vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. On a :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+3} \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = -\frac{1}{(n+2)(n+3)} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leq 0,$$

donc  $(a_n)$  est décroissante. De plus  $a_n \sim \frac{\ln(n+1)}{n+2}$ , donc  $(a_n)$  tend vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, le produit de Cauchy  $\sum (-1)^n a_n$  est donc une série convergente.

### Exercice 38 (\*\*Sommation de la fonction zeta)

Montrer que la série  $\sum_{p \geq 2} (\zeta(p) - 1)$  converge et calculer sa somme.

La fonction  $\zeta$  de Riemann est définie pour  $s \in ]1, +\infty[$  par  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ .

### Corrigé de l'exercice 26

Pour tout  $p \geq 2$ , on a  $\zeta(p) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ , donc

$$\sum_{p \geq 2} (\zeta(p) - 1) = \sum_{p \geq 2} \left( \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \right).$$

Sous réserve de sommabilité de la famille positive  $(a_{n,p}) = \left(\frac{1}{n^p}\right)_{p \geq 2, n \geq 2}$ , on a par le théorème de Fubini l'égalité :

$$\sum_{p=2}^{+\infty} (\zeta(p) - 1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \left( \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \sum_{p=2}^{+\infty} (1/n)^p \right)_{0 < 1/n < 1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1/n^2}{1 - 1/n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

Or,

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^N \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1,$$

donc  $\sum_{n=2}^{+\infty} \left( \sum_{p=2}^{+\infty} (1/n)^p \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 < +\infty$ , ce qui montre la sommabilité de  $(a_{p,q})$ .

On en conclut que la série  $\sum_{p \geq 2} (\zeta(p) - 1)$  converge et

$$\sum_{p=2}^{+\infty} (\zeta(p) - 1) = 1.$$

### Exercice 39 (\*\*Sommation de restes)

1. Soit  $\alpha > 1$ . Déterminer un équivalent de  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ .

2. Pour quels  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  a-t-elle un sens ?

3. Montrer qu'alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$ .

**Corrigé de l'exercice 27**

1. Par comparaison série-intégrale avec la fonction  $x \mapsto 1/x^\alpha$ , continue et décroissante sur  $]0, +\infty[$ , on obtient :

$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} x^{-\alpha} dx \leq k^{-\alpha} \leq \int_{k-1}^k x^{-\alpha} dx,$$

donc en sommant :

$$\forall N \geq n+1 \geq 2, \quad \int_{n+1}^{N+1} x^{-\alpha} dx \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N x^{-\alpha} dx,$$

c'est-à-dire

$$\forall N \geq n+1 \geq 2, \quad \frac{(n+1)^{1-\alpha} - (N+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{n^{1-\alpha} - N^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

En passant à la limite lorsque  $N \rightarrow +\infty$  dans cet encadrement (on peut car les trois membres admettent une limite finie, étant donné que  $\alpha > 1$ ), on obtient

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq R_n \leq \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1},$$

et donc  $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ .

2. La série à termes positifs  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$  converge si et seulement si  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$  converge, c'est-à-dire lorsque  $\alpha > 2$ .

3. Si  $\alpha > 2$ , alors la famille positive  $(a_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$  définie par

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \quad a_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{k^\alpha} & \text{si } k \geq n+1 \\ 0 & \text{si } k \leq n \end{cases}$$

est sommable (d'après le théorème de Fubini), puisque

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{n,k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right) < +\infty.$$

Et on a de plus :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{n,k} \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n,k} \right),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}},$$

ce qui montre la formule voulue.

**Exercice 40 (\*\*Suite double)**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Montrer que la suite double  $\left( \frac{z^{2p}}{q^{2p+2}} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$  est sommable ssi  $|z| < 1$  et, lorsqu'elle est sommable, montrer que sa somme vaut  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - z^2}$ .

**Corrigé de l'exercice 28**

Par définition, la famille de nombres complexes  $(a_{p,q}) = \left( \frac{z^{2p}}{q^{2p+2}} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$  est sommable si et seulement si  $(|a_{p,q}|)$  est sommable, ce qui équivaut à

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p,q}| \right) < +\infty,$$

d'après le théorème de Fubini pour les familles positives. Or,

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p,q}| = \frac{1}{q^2} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} (|z|^2/q^2)^p \right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |z| \geq q \\ \frac{1}{q^2 - |z|^2} & \text{si } |z| < q \end{cases},$$

donc

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p,q}| \right) < +\infty \implies \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad |z| < q \iff |z| < 1.$$

Réciproquement, si  $|z| < 1$ , alors

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p,q}| \right) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2 - |z|^2} < +\infty$$

(car  $\frac{1}{q^2 - |z|^2} \underset{q \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{q^2}$ ). En conclusion, la famille  $(a_{p,q})$  est sommable si et seulement si  $|z| < 1$ , et dans ce cas, le théorème de Fubini pour les familles de nombres complexes donne :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} a_{p,q} = \sum_{q=1}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} \right) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2 - z^2},$$

ce qui est la formule voulue.

**Exercice 41 (\*\*\*) Non intervention des sommations**

Pour  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ , on pose  $a_{n,p} = \frac{1}{n^2 - p^2}$  si  $n \neq p$  et  $a_{n,n} = 0$ .

Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p}$  et  $\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p}$  (on admettra que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ). Commenter le résultat.

**Corrigé de l'exercice 29**

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . La série à termes positifs  $\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 - p^2} + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}$  converge car  $\frac{1}{n^2 - p^2} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{p^2}$ . De plus, par télescopage, on a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} &= \frac{1}{2n} \sum_{p=0}^{n-1} \left( \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n-p} \right) + \frac{1}{2n} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{p+n} - \frac{1}{p-n} \right) \\ &= \frac{1}{2n} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right) + \frac{1}{2n} \left( -1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{2n} \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = \frac{1}{2n} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{4n^2}.$$

Par ailleurs,  $\sum_{p=0}^{+\infty} a_{0,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{-1}{p^2} = -\frac{\pi^2}{6}$ . Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{0,p} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{24} = -\frac{\pi^2}{8}.$$

Symétriquement, on a :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} -a_{p,n} = - \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,n} = - \left( -\frac{\pi^2}{8} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Finalement, on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} \neq \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p}$ , donc la famille  $(a_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$  n'est pas sommable (sinon, les deux procédés de sommation donneraient le même résultat d'après le théorème de Fubini pour les familles de nombres complexes).

#### 4) Recherche d'équivalents

##### Exercice 42 (\*Equivalent de somme partielle)

On pose, pour tout  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n e^{-\frac{k}{k+1}}$ . Calculer un équivalent simple de  $S_n$ .

##### Corrigé de l'exercice 30

##### Exercice 43 (\*\*Equivalent de somme partielle 2)

Prouver qu'on a  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$ .

##### Corrigé de l'exercice 31

##### Exercice 44 (\*\*Développement asymptotique de somme partielle)

On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}}$ .

Déterminer un équivalent simple de  $S_n$  puis montrer qu'on peut former un développement asymptotique de la forme  $S_n = \ln(n) + C + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$ , où  $C$  est une constante.

##### Corrigé de l'exercice 32

##### Exercice 45 (\*Equivalent de reste)

Pour  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , on définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$ .

Déterminer un équivalent simple de  $R_n$ . *Indication : penser à un télescopage.*

##### Corrigé de l'exercice 33

##### Exercice 46 (\*\*Un oral de CCINP)

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^n (3k-2)$  et  $v_n = \frac{1}{n^{3/4}}$ .

1. À l'aide d'un développement asymptotique, montrer que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$  à partir d'un certain rang.
2. En utilisant la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ , montrer que la série  $\sum u_n$  diverge.
3. En considérant la série de terme général  $w_n = \frac{2}{3} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ , montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{2/3}}$ .

**Corrigé de l'exercice 34**

1. Pour tout  $n \geq 1$  :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+1}{3n+3} = \left(1 + \frac{1}{3n}\right) \times \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) = \left(1 + \frac{1}{3n}\right) \times \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

De même,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-3/4} = 1 - \frac{3}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n} > 0,$$

ce qui montre que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 0$  à partir d'un certain rang  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ .

2. En posant  $q_n = \frac{u_n}{v_n} > 0$  pour tout  $n \geq 1$ , on a  $\forall n \geq n_0$ ,  $q_{n+1} \geq q_n$  d'après la question précédente, donc la suite  $(q_n)_{n \geq n_0}$  est croissante. On en déduit  $q_n \geq q_{n_0}$ , d'où la minoration  $u_n \geq q_{n_0} v_n > 0$ , ce qui montre la divergence de la série  $\sum u_n$  par comparaison à la série de Riemann divergente  $\sum v_n$ .
3. Cela s'inspire de la méthode des "puissances télescopiques" présentée à l'exercice 49 : pour déterminer un équivalent de  $u_n$ , on travaille avec la série télescopique  $\sum (\ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n))$ , où  $\alpha$  est un réel bien choisi.

En posant  $w_n = \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n)$ , on a

$$w_n = \alpha \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{2}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \left(\alpha - \frac{2}{3}\right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si on choisit  $\alpha = 2/3$ , on a  $w_n = O(1/n^2)$ , donc la série télescopique

$\sum w_n = \sum (\ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n))$  converge, ce qui montre que la suite  $(\ln(n^\alpha u_n))$  converge vers un réel  $\ell$ . Par continuité de l'exponentielle, on obtient  $n^\alpha u_n \rightarrow e^\ell = C > 0$ , et donc  $u_n \sim \frac{C}{n^{2/3}}$ .

**Exercice 47 (\*\*Fausses séries)**

1. Déterminer un équivalent quand  $n \rightarrow +\infty$  de  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3}$ .
2. Pour  $\alpha$  réel, on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+n}\right)^\alpha$ . Déterminer un équivalent de  $S_n$ .

**Corrigé de l'exercice 35**

**Attention** : nous n'avons pas affaire à des séries ici, car le terme général des sommes dépend de  $k$  et du nombre de termes  $n$ .

1. On fait apparaître une somme de Riemann :

$$u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + 2(k/n))^3}.$$

En considérant la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{(1+2x)^3}$ , qui est continue sur  $[0, 1]$ , on a donc, d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann (vu en MP2I) :

$$R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f = \int_0^1 (1+2x)^{-3} dx = 4/9.$$

(c'est la "méthode des rectangles à droite"). Finalement, on a

$$u_n = \frac{R_n(f)}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{9n^2}.$$

2. De même,  $S_n = \frac{1/n + R_n(g)}{n^{\alpha-1}}$ , où  $g : x \mapsto (1+x)^{-\alpha} \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$  et  $R_n(g) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(k/n)$ .

Puisque

$$R_n(g) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g = \begin{cases} \frac{2^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(2) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} > 0,$$

$$\text{on en déduit que } S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\alpha-1}}, \text{ où } C = \begin{cases} \frac{2^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(2) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$

#### Exercice 48 (\*\*\*) Une variante pour établir la formule de Stirling

1. Montrer que si  $f$  est une application de classe  $C^1$  sur  $[1, +\infty[$  alors :

$$\forall n \geq 2, \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n) = - \int_{n-1}^n (t-n+1)f'(t)dt.$$

2. On note, pour  $n \geq 2$ ,  $w_n = \int_{n-1}^n \ln(t)dt - \ln(n)$ .

- (a) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer qu'on a :

$$\forall n \geq 2, w_n = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \int_{n-1}^n (t-n+1)^2 \frac{1}{t^2} dt.$$

- (b) On note  $x_n = \int_{n-1}^n (t-n+1)^2 \frac{1}{t^2} dt$ . Montrer que la série  $\sum_{n \geq 2} x_n$  converge.

- (c) En déduire l'existence d'une constante  $K > 0$  telle que :

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(n) + K + o(1).$$

- (d) En déduire un équivalent de  $n!$  en fonction de  $K$ .

#### Remarque

Pour retrouver la formule de Stirling dans son intégralité, il reste une constante à déterminer. On peut par exemple utiliser les intégrales de Wallis  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$  pour cela.

#### Corrigé de l'exercice 36

1. Soit  $n \geq 2$ . En effectuant une intégration par parties (en intégrant  $t \mapsto 1$  et dérivant  $t \mapsto f(t)$ ), on obtient :

$$\int_{n-1}^n f(t)dt = [(t-n+1)f(t)]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n (t-n+1)f'(t)dt = f(n) - \int_{n-1}^n (t-n+1)f'(t)dt.$$

2. (a) D'après la formule de la question précédente, appliquée à  $f : t \mapsto \ln(t)$ , on obtient, pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$w_n = \int_{n-1}^n \ln(t)dt - \ln(n) = - \int_{n-1}^n \frac{t-n+1}{t} dt.$$

On effectue alors à nouveau une intégration par parties, en intégrant  $t \mapsto t-n+1$  et en dérivant  $t \mapsto 1/t$ , on obtient :

$$w_n = - \left[ \frac{(t-n+1)^2}{2t} \right]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n \frac{(t-n+1)^2}{2t^2} dt = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \int_{n-1}^n \frac{(t-n+1)^2}{t^2} dt.$$

- (b) En notant  $x_n = \int_{n-1}^n (t-n+1)^2 \frac{1}{t^2} dt$ , on a par croissance de l'intégrale :

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq x_n \leq \frac{1}{(n-1)^2} \int_{n-1}^n (t-n+1)^2 dt = \frac{1}{3(n-1)^2}.$$

Puisque la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{3(n-1)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{3n^2}$  converge, on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que  $\sum x_n$  converge.

(c) Notons  $S = \sum_{n=2}^{+\infty} x_n \in \mathbb{R}^+$ . On a

$$\forall k \geq 2, \quad w_k = \int_{k-1}^k \ln(t) dt - \ln(k) = -\frac{1}{2k} - \frac{1}{2}x_k,$$

donc en sommant pour  $k = 2 \cdots n$ , on obtient par la relation de Chasles :

$$\forall n \geq 2, \quad \int_1^n \ln(t) dt - \sum_{k=2}^n \ln(k) = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n x_k,$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \geq 2, \quad n \ln(n) - n + 1 - \ln(n!) = -\frac{1}{2}(H_n - 1) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n x_k,$$

où  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$  avec  $\gamma > 0$  (la constante d'Euler). On en déduit le développement asymptotique :

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \left( H_n + \sum_{k=2}^n x_k + 1 \right) = n \ln(n) - n + \frac{1}{2} (\ln(n) + \gamma + S + 1 + o(1)),$$

c'est-à-dire

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(n) + K + o(1),$$

avec  $K = \frac{1}{2}(\gamma + S + 1) > 0$ .

(d) En passant à l'exponentielle, on obtient enfin :

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^K e^{o(1)} = n^n e^{-n} e^K \sqrt{n} (1 + o(1)),$$

d'où la formule de Stirling  $n! \sim n^n e^{-n} e^K \sqrt{n}$ .

#### Exercice 49 (\*\*\*) Une suite récurrente)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 > 0$  et la relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ .

1. Etudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (monotonie et convergence).
2. En considérant la suite  $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$  pour  $\alpha$  bien choisi, déterminer un équivalent de  $u_n$ .
3. La série de terme général  $u_n$  est-elle convergente ?

#### Remarque

Dans les concours les plus ambitieux, la méthode permettant de déterminer un équivalent de  $u_n$  n'est pas forcément donnée. Il faut retenir que cette idée peut être testée pour des suites définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $u_n \rightarrow 0$  et  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .

#### Corrigé de l'exercice 37

- 1.
- 2.
- 3.

**Exercice 50 (\*\*Fonction zeta de Riemann)**

On considère la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$  pour  $s \in \mathbb{C}$ .

1. Pour quelles valeurs réelles de  $s$  la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$  est-elle convergente ?
2. Quel est le domaine d'absolue convergence de cette série dans  $\mathbb{C}$  ?  
On note  $\zeta$  la fonction  $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$  sur le domaine ainsi déterminé.
3. Déterminer la limite de  $\zeta(s)$  lorsque  $s \rightarrow +\infty$ .
4. Pour  $s$  réel, déterminer un équivalent de  $\zeta(s)$  lorsque  $s \rightarrow 1^+$ .

**Corrigé de l'exercice 38**

1. On sait que si  $s \in \mathbb{R}$ , la série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$  converge si et seulement si  $s > 1$ .
2. Pour tout  $s = x + iy \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$n^{-s} = e^{-s \ln(n)} = e^{-x \ln(n) - iy \ln(n)} = n^{-x} e^{-iy \ln(n)},$$

donc  $|n^{-s}| = n^{-x} = n^{-\operatorname{Re}(s)}$ .

On en déduit que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$  converge absolument si et seulement si  $\operatorname{Re}(s) > 1$ .

3. On effectue une comparaison série-intégrale : pour  $s \in ]1, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto t^{-s}$  est continue et décroissante sur  $]0, +\infty[$ , donc

$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{k^s} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^s}.$$

En sommant et en utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$\forall n \geq 2, \quad \int_2^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^s} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^s},$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{2^{-s+1} - (n+1)^{-s+1}}{s-1} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^s} \leq \frac{1 - n^{-s+1}}{s-1}.$$

En faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$  (tout converge car  $-s+1 < 0$ ), on obtient

$$\frac{2^{-s+1}}{s-1} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{s-1},$$

d'où l'encadrement

$$\forall s \in ]1, +\infty[, \quad 1 + \frac{2^{-s+1}}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}.$$

En faisant tendre  $s \rightarrow +\infty$ , on obtient par le théorème des gendarmes que  $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 1$ .

4. Puisque  $2^{-s+1} \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} 1$ , l'encadrement de la question précédente donne l'équivalent :

$$\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}.$$

**III Exercices sur la dénombrabilité****Exercice 51 (\*\*Reconnaissance du caractère dénombrable (ou pas))**

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ? Justifier.

1. L'ensemble  $\mathbb{D}$  des nombres décimaux.
2.  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ .
3. L'ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$ .

**Corrigé de l'exercice 39**

1. On rappelle que  $\mathbb{D} = \{\frac{a}{10^k}, a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ .

Puisque  $\mathbb{Q}$  est dénombrable (c'est du cours) et  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ , on en déduit que  $\mathbb{D}$  est au plus dénombrable. Or,  $\mathbb{D}$  est infini, donc il est dénombrable.

**Variante** : l'application  $s : \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ (a, k) & \longmapsto & \frac{a}{10^k} \end{cases}$  est surjective par définition de  $\mathbb{D}$ .

Et  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  étant dénombrable (comme produit fini d'ensembles dénombrables), il existe une bijection  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ . Donc on a une surjection  $s \circ \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$ , ce qui montre que  $\mathbb{D}$  est au plus dénombrable, et comme il est infini, il est dénombrable.

2. L'application  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{Q}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \\ (a, b) & \longmapsto & a + b\sqrt{2} \end{cases}$  est surjective par définition de  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ , et injective car :

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \implies (b = d) \text{ ou } (b \neq d \text{ et } \sqrt{2} = \frac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q});$$

mais  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  donc

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \implies b = d \implies (a, b) = (c, d).$$

On a donc une bijection  $\varphi : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  et puisque  $\mathbb{Q}^2$  est dénombrable (comme produit fini d'ensembles dénombrables), on en déduit que  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  est dénombrable.

3. Toute partie finie de  $\mathbb{N}$  est majorée, donc est incluse dans une partie finie du type  $[0, n]$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . En notant  $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$  l'ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$ , on a donc :

$$\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), A \subset [0, n]\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}([0, n]).$$

Ainsi,  $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$  est une réunion dénombrable d'ensembles finis (pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{card}(\mathcal{P}([0, n])) = 2^{n+1}$ ), donc  $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$  est au plus dénombrable, et infini (il contient tous les singletons  $\{n\}$  avec  $n \in \mathbb{N}$  par exemple), donc  $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$  est dénombrable.

**Exercice 52 (\*\*Ensemble infini et partie dénombrable)**

Démontrer que tout ensemble infini contient une partie dénombrable (*s'inspirer d'une démo. du cours*).

**Corrigé de l'exercice 40**

On s'inspire de la démonstration de "toute partie de  $\mathbb{N}$  est finie ou dénombrable".

Soit  $E$  un ensemble infini.  $E$  étant non vide, on peut choisir  $\varphi(0) \in E$ . Ensuite,  $E \setminus \{\varphi(0)\}$  étant non vide, on peut choisir  $\varphi(1) \in E$  distinct de  $\varphi(0)$ . Par récurrence forte : si on dispose de  $n$  éléments  $\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)$  deux à deux distincts dans  $E$ , alors puisque  $E \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}$  est non vide ( $E$  étant infini), il existe  $\varphi(n) \in E \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)\}$ , qui par construction est distinct de  $\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)$ .

Ainsi, on construit par récurrence forte une injection  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow E$ , et donc l'ensemble  $\varphi(\mathbb{N})$  est bien une partie de  $E$  qui est dénombrable, car en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

**Exercice 53 (\*\*Critère pour un ensemble au plus dénombrable)**

- Démontrer qu'un ensemble  $I$  est au plus dénombrable ssi il existe une suite croissante  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de parties finies de  $I$  dont la réunion est égale à  $I$ .
- Applications* : utiliser ce critère pour démontrer ou redémontrer les résultats suivants :  $\mathbb{Z}$  est dénombrable,  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable,  $\mathbb{Z}[X]$  est dénombrable.

**Corrigé de l'exercice 41**

- Si  $I$  est réunion (croissante ou pas) de parties  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  finies, alors  $I$  est fini ou dénombrable, donc au plus dénombrable, c'est un théorème du cours. Montrons la réciproque.  
Si  $I$  est au plus dénombrable, alors il est fini ou dénombrable (c'est équivalent d'après le cours).  
Si  $I$  est fini, alors en posant  $I_n = I$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a le résultat voulu.

Si  $I$  est dénombrable, alors il existe une bijection  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ . Posons alors  $I_n = \varphi([0, n])$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Chaque  $I_n$  est fini de cardinal  $n + 1$ , on a  $I_n \subset I_{n+1}$  (puisque  $[0, n] \subset [0, n + 1]$ ), et

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi([0, n]) = \varphi\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, n]\right) = \varphi(\mathbb{N}) = I.$$

2. Les décompositions suivantes permettent de conclure :

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n],$$

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, n] \times [0, n],$$

$$\mathbb{Z}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=0}^n a_k X^k, a_k \in [-n, n] \right\}.$$

#### Exercice 54 (\*\*Nombres algébriques)

On dit d'un nombre complexe  $z$  qu'il est *algébrique* lorsqu'il est racine d'un polynôme **non nul** à coefficients rationnels.

1. Donner divers exemples de nombres algébriques.
2. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est dénombrable.
3. Que dire de l'ensemble des nombres algébriques ?

#### Corrigé de l'exercice 42

1. Le nombre  $\sqrt{2}$  est algébrique car racine de  $X^2 - 2$ .  
Le "nombre d'or"  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est algébrique car racine de  $X^2 - X - 1$ .  
Pour tout nombre premier  $p$  et tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sqrt[k]{p}$  est algébrique car racine de  $X^k - p$ .  
Le nombre  $i$  est algébrique car racine de  $X^2 + 1$ .  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\omega_n = e^{2i\pi/n}$  est algébrique car racine de  $X^n - 1$ .  
Les nombres  $e$  et  $\pi$  ne sont pas algébriques (ils sont dits "transcendants", mais c'est plus difficile à montrer).
2. On a  $\mathbb{Z}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_n[X]$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}_n[X]$  est dénombrable (car en bijection avec  $\mathbb{Z}^{n+1}$ , lui-même dénombrable comme produit fini d'ensembles dénombrables). Donc  $\mathbb{Z}[X]$  est dénombrable (comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables).
3. Notons  $\mathcal{A}$  l'ensemble des nombres complexes algébriques. Un nombre  $z$  est algébrique si et seulement si il est racine d'un polynôme non nul à coefficients **entiers** (quitte à multiplier tous les coefficients d'un polynôme de  $\mathbb{Q}[X]$  qui annule  $z$  par le produit de tous les dénominateurs). En notant, pour tout polynôme  $P$ ,  $Z(P)$  l'ensemble des racines complexes de  $P$ , on a donc la décomposition

$$\mathcal{A} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}} Z(P),$$

ce qui montre que  $\mathcal{A}$  est au plus dénombrable (comme réunion dénombrable d'ensembles finis). Mais  $\mathcal{A}$  est infini (cf. question 1.), donc  $\mathcal{A}$  est dénombrable.